Sur les points d'ordre $\mathfrak{c}$ dans les continus.

Par

Stefan Mazurkiewicz (Varsovie).

1. Le point p, d'un éspace métrique et séparable est dit *d'ordre* $\mathfrak{c}$, si la frontière de tout ensemble ouvert contenant p et suffisament petit a la puissance du continu [1]). Désignons par $K^{\mathfrak{c}}$ l'ensemble de points d'ordre $\mathfrak{c}$ d'un éspace donné K, par $K^{\mathfrak{c}\mathfrak{c}}$ l'ensemble de points d'ordre $\mathfrak{c}$ de $K^{\mathfrak{c}}$. Une Note de M. Kuratowski et de moi [2]) contient la définition d'un continu K tel que $K^{\mathfrak{c}} \neq K^{\mathfrak{c}\mathfrak{c}}$. *Dans cette Note je vais donner la définition d'un continu Péanien* (c. à d. *localement connexe*) *K tel que*

$$K^{\mathfrak{c}} \neq 0 = K^{\mathfrak{c}\mathfrak{c}}. \tag{1,1}$$

Ce continu fournit en même temps la solution d'un problème de Urysohn.

2. Definition d'un ensemble auxiliaire L. La construction qui va suivre n'est qu'une modification d'une construction bien connue due à M. Sierpiński [3]). Désignons par $R(a, b, c, d)$ le rectangle determiné par les droites: $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$. Soit $R^* = R(a.\ b,\ c,\ d)$ un rectangle donné. Posons pour n naturel:

$$(2,1)\quad \begin{cases} T_{2n-1}(R^*) = R\left(\dfrac{a+b}{2} - \dfrac{b-a}{2^{2n-1}},\ \dfrac{a+b}{2} - \dfrac{b-a}{2^{2n}},\ \dfrac{3c+d}{4},\ d\right) \\[2ex] T_{2n}(R^*) = R\left(\dfrac{a+b}{2} + \dfrac{b-a}{2^{2n}},\ \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{b-a}{2^{2n-1}},\ c,\ \dfrac{c+3d}{4}\right). \end{cases}$$

Soit: $S(R^*)$ le segment de droite: $x = \dfrac{a+b}{2}$, $c \leqq y \leqq d$.

[1]) Menger: Math. Ann. 95, p. 280.

[2]) Fund. Math. XI, p. 29—35.

[3]) Fund. Math. II, p. 81—95.

Soit $R_0 = R\ (0, 1, 0, 1)$ et posons:

$$T_n = T_n(R_0), \quad T_{n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+1}} = T_{n_{k+1}}\left(T_{n_1, n_2, \dots, n_k}\right) \tag{2,2}$$

$$S_0 = S(R_0), \quad S_{n_1, n_2, \dots, n_k} = S(T_{n_1, n_2, \dots, n_k}) \tag{2,3}$$

$$L_1 = \prod_{k=1}^{\infty}\left(\sum T_{n_1, n_2, \dots, n_k}\right) \quad (n_1, n_2, \dots, n_k = 1, 2, \dots) \tag{2,4}$$

$$L_2 = S_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum S_{n_1, n_2, \dots, n_k}\right) \quad (n_1, n_2, \dots, n_k = 1, 2, \dots) \tag{2,5}$$

$$L = L_1 + L_2. \tag{2,6}$$

On démontre sans peine que L est fermé. Un raisonnement analogue à celui de M. Menger concernant l'ensemble E de M. Sierpiński [1]) montre que *l'on a pour tout point p de L_1*:

$$\dim_p L = 0. \tag{2,7}$$

3. Démonstration de la relation $L^{\mathfrak{c}} \neq 0$.

(3,1) [2]) Désignons, pour λ, μ_1, $\mu_2 > 0$ par $W(a, c, \lambda, \mu_1, \mu_2)$ l'octagone: $R(a, a+\lambda, c-\lambda-\mu_1, c-\lambda) + R(a-\lambda, a+\lambda, c-\lambda, c+\lambda) + R(a-\lambda, a, c+\lambda, c+\lambda+\mu_2)$. Nous dirons que le continu C *traverse* $R(a, b, c, d)$ si: 1) $C \subset R(a, b, c, d)$, 2) C a des points communs avec chacune des droites: $x = a$, $x = b$. Nous dirons que le continu C *traverse* $W(a, c, \lambda, \mu_1, \mu_2)$ si: 1) $C \subset W(a, c, \lambda, \mu_1, \mu_2)$; 2) C a des points communs avec chacune des deux lignes polygonales, dont la première est formé par les 3 segments: $x = a$, $c-\lambda-\mu_1 \leqq y \leqq c-\lambda$; $a-\lambda \leqq x \leqq a$, $y = c-\lambda$; $x = a-\lambda$, $c-\lambda \leqq y \leqq c+\lambda+\mu_2$, — la seconde, par les trois segments: $x = a+\lambda$, $c-\lambda-\mu_1 \leqq y \leqq c+\lambda$; $a \leqq x \leqq a+\lambda$, $y = c+\lambda$; $x = a$, $c+\lambda \leqq y \leqq c+\lambda+\mu_2$.

On établit facilement les resultats suivants:

(3,11) Si $c_1 \leqq c < d \leqq d_1$ et si C traverse $R(a, b, c, d)$, alors C traverse $R(a, b, c_1, d_1)$.

(3 12) Si $a \leqq a_1 < b_1 \leqq b$ et si C traverse $R(a, b, c, d)$; alors C contient un sous-continu C_1 qui traverse $R(a_1, b_1, c, d)$.

(3,13) Si: $a < g-\lambda < g+\lambda < b$, $c < h-\lambda < h+\lambda < d$ et si C traverse $R(a, b, c, d)$, — alors C contient un sous-continu C_1 qui traverse $W(g, h, \lambda, h-\lambda-c, d-h-\lambda)$.

[1]) Menger. Dimensionstheorie p. 138 ss.

[2]) Comp. Mazurkiewicz Fund. Math. III p. 72—74.

(3,14) Si: C traverse $W(a, c, \lambda, \mu_1, \mu_2)$ et si: $C \times R(a-\lambda, a+\lambda, c-\lambda, c+\lambda) = 0$, alors C traverse un des deux rectangles: $R(a, a+\lambda, c-\lambda-\mu_1, c)$ et $R(a-\lambda, a, c, c+\lambda+\mu_2)$.

(3,2) Soit $R^* = R(a, b, c, d)$; nous désignerons par $Z(R^*)$ le segment de droite: $x = \dfrac{a+b}{2}$, $\dfrac{3c+d}{4} \leqq y \leqq \dfrac{c+3d}{4}$. *Si C traverse $R\left(\dfrac{a+b}{2} - \sigma, \dfrac{a+b}{2} + \sigma, c, d\right)$ $(\sigma > 0)$ et ne contient pas $Z(R^*)$, alors ils existent deux sous-continus C_1, C_2 de C et deux entiers m_1, m_2 tels que C_i traverse $T_{m_i}(R^*)$ $(i = 1, 2)$.*

Soit q un point de $Z(R^*) - C$. Désignons par g l'ordonnée de q. Soit λ un nombre positif inférieur à la fois à: $\frac{1}{2}\rho(q, C)$, σ, $\dfrac{d-c}{4}$. D'après (3,13), C contient un sous-continu C', qui traverse $W\left(\dfrac{a+b}{2}, g, \lambda, g-\lambda-c, d-g-\lambda\right)$.

D'autre part on a:

$$(3,21)\qquad C' \times R\left(\frac{a+b}{2}-\lambda, \frac{a+b}{2}+\lambda, g-\lambda, g+\lambda\right) \subset C \times R\left(\frac{a+b}{2}-\lambda, \frac{a+b}{2}+\right.$$
$$\left.+\lambda, g-\lambda, g+\lambda\right) = 0.$$

Donc, d'après (3,14) C' traverse soit $R\left(\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{a+b}{2}+\lambda, c, g\right)$ soit $R\left(\dfrac{a+b}{2}-\lambda, \dfrac{a+b}{2}, g, d\right)$, donc d'après (3,11) soit $R\left(\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{a+b}{2}+\lambda, c, \dfrac{c+3d}{4}\right)$ soit $R\left(\dfrac{a+b}{3}-\lambda, \dfrac{a+b}{2}, \dfrac{3c+d}{4}, d\right)$. Dans le premier cas on pose $m_i = 2l_i$, dans le second: $m_i = 2l_i - 1$ $(i = 1, 2)$, l_1, l_2 désignant deux entiers tels que:

$$(3,22)\qquad \frac{b-a}{2^{2l_i-1}} \leqq \lambda. \qquad i = 1, 2$$

On a les inégalités:

$$(3,23)\qquad \begin{aligned} &\frac{a+b}{2} < \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2^{2l_i}} < \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2^{l_i-1}} \leqq \frac{a+b}{2} + \lambda \\ &\frac{a+b}{2} - \lambda \leqq \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2^{2l_i-1}} < \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2^{2l_i}} < \frac{a+b}{2}. \end{aligned} \qquad i = 1, 2$$

Comme dans le premier cas:

$$(3,24)\qquad T_{m_i}(R^*) = R\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2^{2l_i}}, \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2^{2l_i-1}}, c, \frac{c+3d}{4}\right)$$

dans le second:

$$(3,25)\qquad T_{m_i}(R^*) = R\left(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2^{2l_i-1}}, \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2^{2l_i}}, \frac{3c+d}{4}, d\right)$$

on voit que d'après (3,23) et (3,12) C' contient deux sous-continus C_1 et C_2 qui traversent $T_{m_1}(R^*)$, $T_{m_2}(R^*)$ respectivement.

(3,3) Désignons par p_0 le centre du rectangle R_0. Nous allons démontrer que $p_0 \subset L^c$. Soit V un voisinage de p_0, de diamètre $< \frac{1}{2}$. $\overline{V}$ est alors contenu dans l'intérieur de R_0, et on démontre facilement, qu'il existe un continu $C \subset \overline{V} - V$ et un nombre $\sigma > 0$ tel que C traverse $R(\frac{1}{2}-\sigma, \frac{1}{2}+\sigma, 0, 1)$. Il suffit de démontrer que l'ensemble $C \times L$ est non dénombrable. C'est certainement le cas si C contient un des segments: $Z(R_0)$, $Z(T_{n_1, n_2, \ldots, n_k})$. Dans le cas contraire, on peut, d'après (3,2), à toute suite dyadique [1]): $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)$, faire correspondre un entier $m(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)$ et un continu $C(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)$ de telle manière que l'on ai:

(3,31) $C(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)$ traverse $T_{m_1, m_2, \ldots, m_k}$, où $m_i = m(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_i)$ $i = 1, 2, \ldots, k$.

(3,32) $C(\beta_1) \subset C$; $C(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k, \beta_{k+1}) \subset C(\beta_1, \ldots, \beta_k)$.

Étant donné une suite dyadique infinie $(\beta_1, \beta_2, \ldots)$ faisons lui correspondre le point:

$$(3,33)\qquad v = \prod_{k=1}^{\infty} C(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k) = \prod_{k=1}^{\infty} T_{m_1, m_2, \ldots, m_k} \quad (m_i = m(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_i),$$
$$i = 1, 2, \ldots$$

v est contenu dans $C \times L$, d'après (3,31), (3,32), (2,4), (2,6). Comme à deux suites dyadiques infinies correspondent des points v différents, on voit bien que $C \times L$ a la puissance du continu. Donc:

$$(3,4)\qquad p_0 \subset L^c \neq 0.$$

4. Definition de K.

L étant fermé, il existe un ensemble linéaire E et une représentation continue de E sur L, effectuée par un couple de fonctions continues et determinées pour $\tau \subset E$: $x = \phi_1(\tau)$, $y = \phi_2(\tau)$. En désignant par a_1, a_2 les bornes inférieure et supérieure de E, nous définirons dans l'intervalle $a_1 \leqq \tau \leqq a_2$ deux fonctions: $\psi_1(\tau)$, $\psi_2(\tau)$ par les conditions:

$$(4,1)\qquad \psi_i(\tau) = \phi_i(\tau) \text{ pour } \tau \subset E.$$

(4,2) $\psi_i(\tau)$ varie linéairement dans tout intervalle contigu à E.

[1]) c. à d. composée de 0 et 1.

Soit K l'image de la courbe continue: $x=\psi_1(\tau)$, $y=\psi_2(\tau)$, $a_1 \leqq \tau \leqq a_2$. —

K est un continu Péanien contenant L. Donc, en vertu de (3,4):

$$L^c \subset K^c \neq 0. \tag{4,3}$$

D'autre part, d'après la définition de K, on a:

$$K = L + \sum_{n=1}^{\infty} I_n = L_1 + L_2 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n. \tag{4,4}$$

$I_1, I_2, \ldots$ étant de segments de droites. D'après (2,7), tout point $p \subset L_1$ peut être enfermé dans un voisinage $V(p)$, arbitrairement petit et tel que $(\overline{V(p)} - V(p)) \times L = 0$. L étant fermé, on peut remplacer $V(p)$ par un voisinage $U(p)$ remplissant les conditions suivantes:

$$U(p) \supset V(p); \tag{4,5}$$

(4,6) le diamètre de $U(p) < 2 \times$ diamètre de $V(p)$

$$[\overline{U(p)} - U(p)] \times L = 0. \tag{4,7}$$

(4,8) $U(p)$ est la somme d'un nombre fini d'intérieurs de cercles;

il en résulte que $\overline{U(p)} - U(p)$ est composée d'un nombre fini d'arcs de circonférences. Donc:

$$[\overline{U(p)} - U(p)] \times K = \sum_{n=1}^{\infty} I_n \times [\overline{U(p)} - U(p)] \tag{4,91}$$

est au plus dénombrable. Il en résulte en posant: $K_1 = L_2 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n$

$$K^c \subset K_1 \tag{4,92}$$

$$K^{cc} \subset K_1^c = 0 \tag{4,93}$$

car K_1 est composé d'un ensemble dénombrable de segments de droite.

5. Le problème de Urysohn. Urysohn a posé le problème suivant: *si $K^c \neq 0$, existe-t-il une infinité indénombrable de continus deux à deux disjoints, agregée à K* [1].

[1]) Urysohn. Verh. Akad. Amsterdam. Deel. XIII No. 4 (Eerste sectie) p. 141—142.

La reponse est négative; en effet, l'existence d'une telle infinité entraîne $K^{cc} \neq 0$. La démonstration se trouve implicite dans le mémoire de Urysohn (l. c.). Il suffit de faire la remarque suivante: si l'on considère l'infinité γ_1 comme ensemble de points de l'espace E de tous les sous-ensembles fermés de K et si l'on désigne par $\gamma_1^{(\alpha)}$ l'ensemble de points de condensation de γ_1, alors $\gamma_1 \times \gamma_1^{(\alpha)}$ est non dénombrable [1]).

[1]) Hausdorff. Grundzüge der Mengenlehre 1914, p. 269 (Kap. VIII, § 3, II).

Varsovie 7. XI. 1929.