sont plus générales que le problème actuel car elles traitent de continus quelconques; mais elles sont aussi plus restrictives, en ce que l'ensemble $E \times \mathfrak{M}_{n-1}$ y est supposé borné (pour toutes les $\mathfrak{M}_{n-1}$). ou mieux, le nombre de ses éléments est supposé tel. Dans les conditions actuelles, l'existence de la demi-tangente demeure assurée: notamment, notre énoncé englobe des courbes donnant lieu, à l'exemple de

$$y = x^2\left(2 + \cos\frac{1}{x}\right) \qquad (n = 2)$$

à un ensemble de points d'intersection fini, mais non borné; il englobe aussi des courbes simples indéfinies qui rappelleraient la sinusoïde $(n = 2)$ et l'hélice circulaire $(n = 3)$.

Enfin, M. le Professeur Sierpiński a bien voulu me signaler, dans le même ordre d'idées, une admirable note de Janiszewski *sur la géométrie des courbes planes générales.* (C. R. t. 150, p. 606). Dès 1910, l'illustre fondateur de la Revue des *Fundamenta* avait fait une étude approfondie des courbes du plan euclidien, qui dans toute région bornée, ne sont coupées par une droite qu'en un nombre limité de points. Il en avait établi la rectificabilité, ainsi que les propriétés pouvant se réduire, dans le cas $n = 2$, au théorème du nº 5.

Sur une propriété des espaces 0-dimensionnels.

Par

G. Poprougénko (Varsovie).

Un lemme démontré et généralisé récemment par M. Sierpiński[1]) nous permet de donner une démonstration très simple d'un théorème que j'ai déjà signalé (sans démonstration) dans une note antérieure[2]).

Désignons par E un espace métrique, par p—son élément variable. Nous allons démontrer le theorème suivant:

Théorème. *Pour qu'un espace métrique séparable E soit de dimension 0 (au sens de M. Menger), il faut et il suffit qu'il existe pour toute fonction $f(p)$ définie et continue sur un ensemble P fermé (relativement à E), d'ailleurs arbitraire, une fonction $F(p)$ définie et continue dans l'espace entier et telle que*

$$F(p) = f(p), \tag{1}$$

pour $p \in P$, et

$$F(E) = f(P)\,^{3)}. \tag{2}$$

Dém. I. *La nécessité.*

Soit E un espace métrique séparable 0-dimensionnel, P—un ensemble fermé (relativement à E), $f(p)$ — une fonction définie et continue sur P.

L'espace E étant de dimension 0, il existe, comme on sait, un ensemble X de nombres irrationnels x homéomorphe à E: il existe

[1]) W. Sierpiński, *Fund. Math.* t. XI, p. 118 et t. XIV, p. 234.

[2]) *Sur l'extension des fonctions de Baire etc.* C. R. Soc. Sc. de Varsovie, XXI, Classe III 1928, p. 243.

[3]) Le symbole $f(Z)$ désigne l'ensemble de valeurs de la fonction $f(p)$ $(p \in Z)$ sur l'ensemble Z.

donc une transformation biunivoque et bicontinue $\Phi - \Psi$, telle que

(3) $$\Phi(p) = x\,(p \in E),$$

(4) $$\Psi(x) = p\,(x \in X),$$

(5) $$\Phi(E) = X, \quad \Psi(X) = E.$$

Posons

$$\Phi(P) = Q.$$

L'ensemble Q étant fermé relativement à X, il existe, d'après le théorème cité de M. Sierpiński, une fonction $\varphi(x)$ définie et continue dans X satisfaisant aux conditions suivantes

(6) $$\varphi(X) = Q,$$

(7) $$\varphi(x) = x, \quad \text{pour} \quad x \in Q.$$

Posons

(8) $$F(p) = f(\Psi(\varphi(\Phi(p)))).$$

Les fonctions Φ, φ, Ψ et f étant continues, il résulte (comme on en s'assure sans peine) des relations (3)—(7) et de la formule (8) que la fonction composée $F(p)$, définie pour tout $p \in E$ et continue dans E, satisfait aux conditions (1) et (2), c. q. f. d.

II. *La suffisance.*

Supposons que l'espace E satisfaisant à la condition de notre théorème n'est pas de dimension 0. De cette hypothèse résulte qu'il existe au moins un point $p_0 \in E$ et (le point p_0 étant donné) un nombre $\lambda > 0$, tel que pour tout ensemble ouvert U satisfaisant aux relations

(9) $$p_0 \in U,$$

(10) $$U \subset K(p_0, \lambda),$$

on a

(11) $$\overline{U} - U \neq 0.$$

Posons

(12) $$P = (p_0) + \left[E - K\left(p_0, \frac{\lambda}{2}\right)\right]$$

et définissons sur P la fonction $f(p)$ par les conditions suivantes:

(13) $$f(p_0) = 1,$$

(14) $$f(p) = 0, \quad \text{pour} \quad p \in E - K\left(p_0, \frac{\lambda}{2}\right).$$

On voit que l'ensemble P est fermé (dans E) et que la fonction $f(p)$ définie par (13) et (14) est continue sur P: il existe donc, d'après notre hypothèse, une fonction $F(p)$, définie pour tout $p \in E$, continue sur E et satisfaisant aux conditions (1) et (2).

Définissons maintenant les ensembles U_1 et U_2 par les égalités suivantes:

(15) $$U_1 = \underset{p}{\mathrm{E}}\,[p \in E,\ F(p) = 1],$$

(16) $$U_2 = \underset{p}{\mathrm{E}}\,[p \in E,\ F(p) = 0].$$

L'ensemble de valeurs de $F(p)$ se composant de nombres 0 et 1, les relations (1), (2), (13) et (14) donnent, d'après (15) et (16):

(17) $$U_1 + U_2 = E,$$

(18) $$U_1 \cdot U_2 = 0,$$

$$E - K\left(p_0, \frac{\lambda}{2}\right) \subset U_2,$$

donc:

(19) $$U_1 \subset K\left(p_0, \frac{\lambda}{2}\right).$$

Or, les ensembles U_1 et U_2 étant fermés (d'après (15), (16) et la continuité de $F(p)$), ils sont en même temps ouverts (d'après (17) et (18)); U_1 étant fermé, on a: $\overline{U_1} - U_1 = 0$, ce qui est impossible en vertu de (19), (9), (10), (11), (13) et de la définition de l'ensemble U_1.

L'espace E est donc de dimension 0, ce qui prouve que la condition du théorème est suffisante.

Notre théorème est ainsi démontré.

Remarquons qu'on peut remplacer dans l'énoncé de ce théorème le mot „*continue*" par l'expression „*de classe α de Baire*". La démonstration (par l'induction transfinie est immédiate.