fonctions de Baire (sur M) est de puissance $2^{\aleph_0}$, tandis que l'ensemble de toutes les fonctions définies sur M est évidemment de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$ (car il existe $2^{2^{\aleph_0}}$ de sous-ensembles de M, et par conséquent autant de fonctions caractéristiques).

On peut démontrer de même que sur tout ensemble contenant un sous-ensemble parfait (donc, en particulier, sur tout ensemble borelien non dénombrable) il existe des fonctions de Baire de classe quelconque.

Sur l'existence des demi-tangentes à une courbe de Jordan.

Par

Georges Bouligand (Poitiers).

Dans tout cet article, nous raisonnerons en géométrie euclidienne à n dimensions, et nous ne considérerons que des ensembles fermés de points. Nous allons d'abord rappeler, en la précisant, une notion déjà utilisée [1]).

1. *Ensemble des demi-tangentes en un point d'accumulation.* Soit 0 un point d'accumulation de l'ensemble fermé E. Soit Δ_ε l'ensemble des demi-droites, ou rayons, joignant 0 aux points de E distincts de 0 et dont la distance à 0 ne dépasse pas ε. Soit $\overline{\Delta}_\varepsilon$ la fermeture de Δ_ε. Considérons l'ensemble $\overline{\Delta}_\varepsilon - \Delta_\varepsilon$. Pour l'obtenir, nous prenons un rayon r d'accumulation de rayons ϱ de Δ_ε; si les ϱ résultent de la jonction au point 0 de points de E (distants de 0 de moins de ε) ayant un point d'accumulation distinct de 0, ce point d'accumulation fait partie de E, donc son rayon de jonction r fait partie de Δ_ε et s'élimine de la différence $\overline{\Delta}_\varepsilon - \Delta_\varepsilon$: pour cette raison, l'ensemble $\overline{\Delta}_\varepsilon - \Delta_\varepsilon$ est indépendant de ε; les rayons qui le composent sont limites de rayons de jonction provenant de toutes les suites possibles de points de E tendant vers le point 0, à l'exclusion des rayons contenant une infinité de points de E admettant 0 pour point d'accumulation; ces rayons s'éliminent aussi de $\overline{\Delta}_\varepsilon - \Delta_\varepsilon$. En les ajoutant à $\overline{\Delta}_\varepsilon - \Delta_\varepsilon$, nous obtiendrons un ensemble Δ que nous appellerons justement *l'ensemble des demi-tangentes au point* 0. Chaque rayon

[1]) G. Bouligand: Sur quelques points de topologie restreinte du premier ordre. Bulletin de la Société Mathématique de France, t. 56 (année 1928) page 29. — Problèmes connexes de la notion d'enveloppe de M. Georges Durand (C. R. Ac. Sc. Paris, t. 189, année 1929, page 447, section II).

de Δ appartient à $\overline{\Delta}_\varepsilon$ (quel que soit ε). Réciproquement, un rayon r commun à tous les $\overline{\Delta}_\varepsilon$, ou bien contient une infinité de points de E s'accumulant en 0, ou bien est la limite de rayons de jonction de points de E tendant vers 0, non rectilignement; donc un tel rayon r appartient bien à l'ensemble Δ. Finalement Δ est le produit de tous les $\overline{\Delta}_\varepsilon$. Il est donc *fermé*.

2. Cette définition étant rappelée, nous allons maintenant en déduire une remarque simple concernant d'abord l'intersection d'un ensemble fermé et d'une multiplicité linéaire d'ordre $n-1$; soit $\mathfrak{M}_{n-1}$.

Supposons qu'on mène une telle multiplicité par un point d'accumulation 0 et que l'ensemble des points d'intersection avec E (soit $E \times \mathfrak{M}_{n-1}$) admette le point 0 pour point isolé. Malgré cela, $\mathfrak{M}_{n-1}$ peut contenir certains rayons de l'ensemble Δ des demi-tangentes relatif au point 0. Mais, si l'ensemble E est tout entier d'un même côté de $\mathfrak{M}_{n-1}$, il en sera de même pour Δ (que 0 soit ou non point isolé de $(E \times \mathfrak{M}_{n-1})$).

3. On peut donner différentes applications de cette remarque. Nous nous bornerons à considérer l'hypothèse suivante:

On suppose que E est formé du point 0 *et des points consécutifs sur un courbe simple de Jordan* (soit $0L$).

Moyennant cette hypothèse, nous allons d'abord démontrer ce lemme:

Dans le cas actuel. l'ensemble Δ *des demi-tangentes à l'arc* $0L$ *au point* 0 *est un continu* (pouvant se réduire à un rayon unique).

Tout d'abord, nous avons vu que cet ensemble est fermé. Raisonnons, pour plus de commodité, sur l'ensemble δ des points d'intersection des rayons de Δ et d'une sphère ($n-1$ fois étendue) de centre 0: il est aussi fermé; pour montrer qu'il est bien enchaîné, il nous suffit de prouver qu'on ne peut le scinder en ensembles fermés dont les distances mutuelles, sur la sphère, auraient des valeurs non nulles.

Supposons que la chose soit possible: en effectuant sur la sphère la construction de Cantor-Minkowski à partir de l'ensemble δ avec un rayon (géodésique) suffisamment petit [1]), on obtiendrait plusieurs

[1]) Il est superflu de faire observer que le mot „rayon" n'a plus ici la signification de demi-droite. Pour la construction de Cantor-Minkowski, voir mon mémoire du Bulletin des Sciences Mathématiques (sept. oct. 1928).

domaines fermés séparés, ayant pour frontières des variétés $n-2$ fois étendues: considérons les domaines coniques de l'espace initial, ayant pour sommet le point 0 et englobant tous les rayons qui aboutissent aux domaines sphériques précédents. Supposons que la courbe $0L$ coupe la frontière F_{n-1} d'un de ces domaines coniques, en certains points distincts de 0, et choissons sur $0L$ un point M anterieur au premier de ces points: cela peut s'effectuer, car le point 0 est un point isolé de l'intersection de F_{n-1} et de $0L$. Mais alors, l'ensemble Δ sera tout entier à l'intérieur du cône delimité par F_{n-1}, ce qui est en contradiction avec la présence de plusieurs domaines coniques séparés (C. Q. F. D.).

4. De ce lemme, on passe facilement au théorème suivant:

Toute multiplicité linéaire $\mathfrak{M}_{n-1}$. *menée par* 0 *de manière à traverser l'ensemble contìnu* Δ *des demi tangentes en* 0 *à l'arc* $0L$ *est coupée par l'arc* $0L$ *en un ensemble de points admettant le point* 0 *pour point d'accumulation.*

En disant que $\mathfrak{M}_{n-1}$ traverse Δ, nous entendrons qu'il y a des rayons de Δ de chaque côté de cette variété. Cela posé, démontrons le théorème énoncé, au moyen d'un raisonnement par l'absurde: si l'énoncé était inexact, le point 0 serait un point isolé de l'intersection $(0L \times \mathfrak{M}_{n-1})$; en appelant M un point antérieur au point d'intersection qui vient le premier après 0 sur l'art $0L$, on voit que l'arc $0M$ ne couperait $\mathfrak{M}_{n-1}$ qu'en 0. Donc, contrairement à l'hypothèse, l'ensemble Δ serait tout entier d'un même côté de $\mathfrak{M}_{n-1}$ (C. Q. F. D.).

5. Le théorème de n° 4 est intéressant à divers titres. D'une part, il confirme l'opportunité, déjà signalée, d'introduire systématiquement l'ensemble Δ. D'autre part, il entraîne immédiatement la proposition suivante:

Dans l'espace euclidien à n dimensions, tout arc simple (*ou toute courbe simple indéfinie*) *de Jordan qui est coupé par une variété linéaire à* $n-1$ *dimensions suivant un ensemble de points dépourvu de point d'accumulation à distance finie admet partout une demi-tangente antérieure et une demi-tangente postérieure.*

Cet énoncé est en relation avec les beaux résultats donnés par M. André Marchaud sur continus d'ordre borné [1]). Ces recherches

[1]) A. Marchaud, sur les continus d'ordre borné, C. R. Ac. Sc. Paris t. 189 (1929) p. 16.

sont plus générales que le problème actuel car elles traitent de continus quelconques; mais elles sont aussi plus restrictives, en ce que l'ensemble $E \times \mathfrak{M}_{n-1}$ y est supposé borné (pour toutes les $\mathfrak{M}_{n-1}$). ou mieux, le nombre de ses éléments est supposé tel. Dans les conditions actuelles, l'existence de la demi-tangente demeure assurée: notamment, notre énoncé englobe des courbes donnant lieu, à l'exemple de

$$y = x^2\left(2 + \cos\frac{1}{x}\right) \qquad (n=2)$$

à un ensemble de points d'intersection fini, mais non borné; il englobe aussi des courbes simples indéfinies qui rappelleraient la sinusoïde ($n=2$) et l'hélice circulaire ($n=3$).

Enfin, M. le Professeur Sierpiński a bien voulu me signaler, dans le même ordre d'idées, une admirable note de Janiszewski *sur la géométrie des courbes planes générales.* (C. R. t. 150, p. 606). Dès 1910, l'illustre fondateur de la Revue des *Fundamenta* avait fait une étude approfondie des courbes du plan euclidien, qui dans toute région bornée, ne sont coupées par une droite qu'en un nombre limité de points. Il en avait établi la rectificabilité, ainsi que les propriétés pouvant se réduire, dans le cas $n=2$, au théorème du nº 5.

Sur une propriété des espaces 0-dimensionnels.

Par

G. Poprougénko (Varsovie).

Un lemme démontré et généralisé récemment par M. Sierpiński[1]) nous permet de donner une démonstration très simple d'un théorème que j'ai déjà signalé (sans démonstration) dans une note antérieure[2]).

Désignons par E un espace métrique, par p—son élément variable. Nous allons démontrer le theorème suivant:

Théorème. *Pour qu'un espace métrique séparable E soit de dimension 0 (au sens de M. Menger), il faut et il suffit qu'il existe pour toute fonction $f(p)$ définie et continue sur un ensemble P fermé (relativement à E), d'ailleurs arbitraire, une fonction $F(p)$ définie et continue dans l'espace entier et telle que*

(1) $$F(p) = f(p),$$

pour $p \in P$, et

(2) $$F(E) = f(P)\,{}^{3)}.$$

Dém. I. *La nécessité.*

Soit E un espace métrique séparable 0-dimensionnel, P—un ensemble fermé (relativement à E), $f(p)$ — une fonction définie et continue sur P.

L'espace E étant de dimension 0, il existe, comme on sait, un ensemble X de nombres irrationnels x homéomorphe à E: il existe

[1]) W. Sierpiński, *Fund. Math.* t. XI, p. 118 et t. XIV, p. 234.

[2]) *Sur l'extension des fonctions de Baire etc.* C. R. Soc. Sc. de Varsovie, XXI, Classe III 1928, p. 243.

[3]) Le symbole $f(Z)$ désigne l'ensemble de valeurs de la fonction $f(p)$ ($p \in Z$) sur l'ensemble Z.