Zur Theorie der analytischen Mengen.

Von

Witold Hurewicz (Amsterdam).

Bekanntlich können die *abgeschlossenen Mengen* eines kompakten metrischen Raumes R ihrerseits auf naturgemässe Weise als *Elemente* eines neuen kompakten metrischen Raumes $\mathfrak{R}$ (des zu R gehörigen „*Potenzraumes*") aufgefasst werden [1]). Zwei abgeschlossene Mengen A und B von R haben dabei in $\mathfrak{R}$ definitionsgemäss den Abstand d, wenn d die kleinste nicht-negative Zahl ist mit der Eigenschaft, dass es zu jedem in einer dieser beiden Mengen liegenden Punkt p einen Punkt in der zweiten Menge q gibt, dessen Abstand von p (im Sinne der in R geltenden Metrik) die Zahl d nicht überschreitet.

Setzen wir R als nicht-abzählbar voraus und betrachten die Teilmenge $\mathfrak{M}$ des Potenzraumes $\mathfrak{R}$, bestehend aus allen *nicht-abzählbaren* abgeschlossenen Punktmengen von R. Das Hauptergebnis der vorliegenden Untersuchung besagt: $\mathfrak{M}$ ist (in Bezug auf $\mathfrak{R}$) eine *analytische Menge* [2]), dagegen ist die zu $\mathfrak{M}$ komplementäre Menge, die von den *abzählbaren* abgeschlossenen Teilmengen von R gebildet wird, *nicht-analytisch.* Dasselbe kann man auch so ausdrücken. Im Raum R aller abgeschlossener Mengen bilden die nicht-abzählbaren Mengen eine analytische, aber *keine Borelsche* Menge [3]).

[1]) Vgl. Hausdorff, Mengenlehre, S. 145—150; auch Ważewski, Fund. Math. t. IV, S. 219.

[2]) Analytische Mengen = Souslinsche Mengen (A). Wegen der (hauptsächlich von Lusin und Sierpiński entwickelten) Theorie der analytischen Mengen vgl. etwa Hausdorff, Mengenlehre, S. 177, ff. Die in der gegenwärtigen Arbeit zu benützenden Begriffe und Lehrsätze werden unten im § 1 zusammengestellt.

[3]) Eine Menge eines kompakten Raumes ist nämlich dann und nur dann Borelsche Menge, wenn sie gleichzeitig mit ihrem Komplement analytisch ist. Vgl. vorige Zitate, S. 184 ff. u. 276. Auch unten § 1.

Es scheint bemerkenswert, dass nicht-analytische (bzw. nicht Borelsche) Mengen, deren Herstellung in den gewöhnlich betrachteten Räumen mehr oder weniger gekünstelte Konstruktionen beansprucht, sich in Potenzräumen bereits bei einer ganz einfachen Fragestellung von selbst darbieten.

Verstehen wir unter der *Ordnung* einer *abzählbaren* abgeschlossenen Menge $M \subset R$ die erste Ordinalzahl $\alpha < \Omega$, für die die Ableitung M^α leer ist, so haben wir das weitere Ergebnis, dass für jedes $\eta < \Omega$ die abzählbaren abgeschlossenen Mengen von einer *Ordnung* $\leqq \eta$ in $\mathfrak{R}$ eine *Borelsche* Menge bilden (in Uebereinstimmung mit der allgemein gültigen Tatsache, dass in einem kompakten Raum jede zu einer analytischen Menge komplementäre Menge Summe von $\aleph_1$ Borelschen Mengen ist) und als Gegenstück dazu die folgende Verschärfung der zweiten Hälfte der Hauptttheorems: Eine Teilmenge von $\mathfrak{R} - \mathfrak{M}$ ist sicher *nicht-analytisch*, wenn unter ihren Elementen Mengen von *beliebigig hohen Ordnungen* vorkommen.

Die vorstehenden Resultate stehen im engen Zusammenhang zu den Untersuchungen von Mazurkiewicz und Sierpiński [4]) betreffend das *Verhältnis zwischen den analytischen Mengen und den stetigen Funktionen.* Nach einem von diesen beiden Autoren bewiesenen Satze ist für jede stetige reelle Funktion $f(x)$ der reellen Veränderlichen x die Menge $A(f)$ aller Werte, welche f mehr als abzählbar oft annimmt, analytisch [5]). Die Analogie zwischen diesem Ergebnis (das sich, wie wir sehen werden, leicht auf stetige Abbildungen von beliebigen kompakten Räumen über tragen lässt) und dem ersten Teil des oben ausgesprochenen Theorems ist einleuchtend, und es wird sich später bestätigen, dass die beiden Aussagen nur verschiedene Formulierungen einer und derselben Tatsache darstellen.

Die zweite negative Hälfte unseres Theorems findet ihr Analogon in der folgenden Aussage über stetige Funktionen:

$A(f)$ ist keine Borelsche Menge, wofern unter den Mengen $M(f=y)$ (so wird die Menge aller Punkte bezeichnet, in denen f den Wert y annimmt) abzählbare Mengen von beliebig hohen

[4]) Mazurkiewicz und Sierpiński, Fund. Math. 6, S. 161. Ferner Sierpiński, Fund. Math. 8. S. 370.

[5]) Es gilt auch die Umkehrung: Jede analytische (lineare) Menge tritt als eine zu einer stetigen Funktion gehörige Menge $A(f)$ auf. Vgl. Mazurkiewicz und Sierpiński a. a. O.

Ordnungen vertreten sind [6]). Andererseits kann schon mit verhältnismässig einfachen Mitteln (durch transfinite Induktion) die Umkehrung bewiesen werden: Wenn die Ordnungen der abzählbaren unter den Mengen $M(f=y)$ eine Schranke $\mu < \Omega$ nicht überschreiten, ist $A(f)$ eine Borelsche Menge [7]). Wir können auch sagen: Damit $A(f)$ eine Borelsche Menge sei, ist notwendig und hinreichend, dass die abzählbaren unter den Mengen $M(f=y)$, höchstens abzählbar viele *topologisch verschiedene* Typen liefern [8]).

1. Wir beginnen mit einer kurzen Zusammenfassung einiger bekannter Ergebnisse aus der Theorie der analytischen Mengen [9]). In einem kompakten Raum R liege ein *erzeugendes System* von abgeschlossenen Mengen

$$F_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \quad (k = 1, 2, \ldots; \; n_1, \ldots, n_k = 1, 2, \ldots)$$

vor mit der Eigenschaft:

$$(^0) \qquad F_{n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1}} \subset F_{n_1, n_2, \ldots, n_k}.$$

Die durch dieses System erzeugte analytische Menge A besteht definitionsgemäss aus den Punkten $x \,\varepsilon\, R$, zu denen es eine unendliche Folge natürlicher Zahlen $n_1, n_2, n_k, \ldots$, gibt, so dass x in dem Durchschnitt

$$\prod_{k=1}^{\infty} F_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$$

enthalten ist.

Sei jetzt x ein beliebiger Punkt von R. Mit $E(x)$ bezeichnen wir die Gesamtheit aller Indizeskomplexe $\pi = (n_1, n_2, \ldots, n_k)$, für die

$$x \,\varepsilon\, F_\pi.$$

[6]) Dass dieser Fall wirklich eintreten kann, folgt aus [5]).

[7]) Dies wurde bereits von Mazurkiewicz und Sierpiński in der oben zitierten Arbeit bemerkt (S. 163).

[8]) Wir machen Gebrauch von der Tatsache, dass zwei abgeschlossene abzählbare Menge A und B dann und nur dann homöomorph sind, wenn sie erstens dieselbe Ordnung α haben, und wenn zweitens die Ableitungen $A^{\alpha-1}$ und $B^{\alpha-1}$ aus derselben Anzahl von Punkten bestehen (Unter den Mengen derselben Ordnung gibt es also nur abzählbar viele nicht-homöomorphe). Cf. Mazurkiewicz und Sierpiński, *Fund. Math.* t. I. p. 21.

[9]) Wir schliessen uns dabei sehr eng an die Darstellung in Hausdorff's Mengenlehre an

Die Punkte der Menge A können wir dann dadurch charakterisieren, dass die diesen Punkten entsprechenden Mengen $E(x)$ Folgen von Indizeskomplexen von der Gestalt:

$$(n_1), \; (n_1, n_2), \ldots, \; (n_1, n_2, \ldots, n_k), \ldots$$

enthalten.

Ist E irgend eine Menge von Indizeskomplexen $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$, so nennen wir ein Element $\pi \equiv (n_1, n_2, \ldots, n_k)$ *fortsetzbar* in E, wenn es eine natürliche Zahl m gibt so dass der Komplex $(\pi, m) \equiv \equiv (n_1, \ldots, n_k, m)$ gleichfalls in E als Element vorkommt; ferner bezeichnen wir nach Hausdorff [10]) mit E_1 die Menge aller fortsetzbaren Elemente von E und setzen alsdann durch transfinite Rekursion für jede Ordinahlzahl $\alpha < \Omega$

$$E_\alpha = (E_{\alpha-1})_1 \quad \text{oder} \quad E_\alpha = \prod_{\beta<\alpha} E_\beta,$$

je nachdem α eine isolierte Zahl; oder eine Grenzzahl ist. Da die Anzahl der Elemente in E abzählbar ist, und Mengen E_α mit wachsendem α stets abnehmen (bzw. gleich bleiben), müssen sie von einer gewissen an miteinander übereinstimmen. Diese nach abzählbarvielen Schritten erreichte (eventuell leere) Menge $E_\lambda = E_{\lambda+1}$ besteht, wie leicht ersichtlich, aus allen Elementen π von E, die *unbeschränkt fortsetzbar* sind in dem Sinne, dass es eine unendliche Folge natürlicher Zahlen $\{i_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ gibt, derart dass für jedes k der Komplex $(\pi, i_1, \ldots, i_k)$ ein Element ist von E. Folgerung: Es ist $E_\lambda = 0$ für hinreichend grosse Werte von λ dann und nur dann, wenn E keine unbeschränkt fortsetzbaren Elemente enthält [11]).

Wenden wir die letzte Aussage auf die oben definierte Menge $E(x)$ an, so sehen wir: Zu jedem Punkt x der Menge $R - A$ gehört eine erste Ordinalzahl $\lambda = \lambda(x) < \Omega$ mit der Eigenschaft:

$$[E(x)]_\lambda = 0.$$

[10]) Mengenlehre, S. 444.

[11]) Einerseits kommt jedes in E unbeschränkt fortsetzbare Element π auch in E_1 als ein ebenfalls unfortsetzbares Element vor, folglich ist für jedes $\alpha / \pi \,\varepsilon\, E_\alpha$ Andererseits ergibt sich aus $E_\lambda = E_{\lambda+1}$ in einfacher Weise, dass jedes $\pi \,\varepsilon\, E_\lambda$ in E_λ und daher auch in E unbeschränkt fortsetzbar ist.

[12]) Die Theorie der Indizes wurde von Lusin und Sierpiński entwickelt, Die hier benützte Form der Definition stammt von Hausdorff (Mengenlehre, S 187).

Dieses $\lambda(x)$ heisst der Index des Punktes x in Bezug auf das System $\{F_{n_1,\ldots,n_k}\}$[12]). Sei für $\alpha < \Omega$ B_α die Menge aller Punkte x von $R-A$, für die $\lambda(x) \leqq \alpha$. Man zeigt ohne Schwierigkeit durch transfinite Induktion: B_α sind *Borelsche Mengen*[13]). Weiter gilt die folgende wichtige Behauptung:

(a) Ist die Teilmenge A^* von $R-A$ analytisch, so gilt für hinreichend grosse Werte von α $A^* : B_\alpha = 0$ (Mit anderen Worten kann $\lambda(x)$ auf A^* nur abzählbar viele Werte annehmen).

Unmittelbare Folgerung daraus ist:

(b) *Wenn die Menge $R-A$ analytisch ist, sind alle B_α von einem gewissen an leer.* Umgekehrt, gibt es ein $\eta < \Omega$, so dass für $\alpha > \eta$ $B_\alpha = 0$, so ist $R-A = \sum\limits_{\alpha \leqq \eta} B_\alpha$ Summe von abzählbar vielen Borelschen Mengen, also selbst Borelsche (und a fortiori analytische) Menge; dann ist natürlich auch A eine Borelsche Menge, und man kommt zu dem bekannten Ergebnis: Eine Menge ist dann und nur dann Borelsche Menge, wenn sie gleichzeitig mit ihrem Komplement analytisch ist.

Für die Behauptung (a) führen wir einen einfachen Beweis an. Eine analytische Menge $A^* \subset R-A$ sei durch das erzeugende System $\{F^*_{n_1,\ldots,n_k}\}$ gegeben. Wir betrachten die Menge Q, bestehend aus allen zweizeiligen Indizeskomplexen

$$(1) \qquad \begin{pmatrix} n_1, & n_2, & \ldots, & n_k \\ m_1, & m_2, & \ldots, & m_k \end{pmatrix}$$

mit der Eigenschaft:

$$F_{n_1,\ldots,n_k} \cdot F^*_{m_1,\ldots,m_k} \neq 0.$$

Ähnlich wie bei einzeiligen Komplexen nennen wir das Element (′) von Q fortsetzbar in Q, wenn bei passender Wahl der natürlichen Zahlen n_{k+1} und m_{k+1} der Komplex $\begin{pmatrix} n_1, & n_2, & \ldots, & n_k, & n_{k+1} \\ m_1, & m_2, & \ldots, & m_k, & m_{k+1} \end{pmatrix}$ ein Element von Q ist. Analog überträgt sich die Definition der unbeschränkten Fortsetzbarkeit. Wir zeigen vor allem: In Q gibt es keine unbeschränkt fortsetzbaren Elemente: Denn sonst gäbe es zwei Folgen $\{\bar{n}_k\}$ und $\{\bar{m}_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, so dass für jedes k $C_k = F_{\bar{n}_1,\ldots,\bar{n}_k} \cdot F^*_{\bar{m}_1,\ldots,\bar{m}_k} \neq 0$.

Nach (^{0}) ist dabei $C_{k+1} \subset C_k$, und aus dem Cantorschen „Durchschnittssatz" folgt $\prod\limits_{k=1}^{\infty} C_k = \prod\limits_{k=1}^{\infty} F_{\bar{n}_1,\ldots,\bar{n}_k} \cdot \prod\limits_{k=1}^{\infty} F^*_{\bar{m}_1,\ldots,\bar{m}_k} \neq 0$, während im Widerspruch damit $\prod\limits_{k=1}^{\infty} F_{\bar{n}_1,\ldots,\bar{n}_k} \subset A$, $\prod\limits_{k=1}^{\infty} F^*_{\bar{m}_1,\ldots,\bar{m}_k} \subset A^*$ und $A \cdot A^* = 0$ gilt.

Definieren wir die Mengen Q_α $(\alpha < \Omega)$ ganz analog wie oben die Mengen E_α, so folgt aus dem eben Bewiesenen die Existenz einer Zahl $\eta < \Omega$ mit $Q_\eta = 0$.

[13]) Vgl. etwa Hausdorff, Mengenlehre, S. 188—189.

Sei nun x ein Punkt von A^*; wir wählen eine unendliche Folge $\{m_i\}$, so dass

$$('') \qquad x \,\varepsilon\, F^*_{m_1,\ldots,m_k} \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

Sei ferner $(n_1, \ldots, n_k)$ ein Element der in Bezug auf das System $\{F_{n_1,\ldots,n_k}\}$ definierten Menge $E(x)$. Dann ist das System $\begin{pmatrix} n_1, & \ldots, & n_k \\ m_1, & \ldots, & m_k \end{pmatrix}$ ein Element von Q. (Nach der Definition von $E(x)$ und nach ('') ist nämlich $x \,\varepsilon\, F_{n_1,\ldots,n_k} \cdot F^*_{m_1,\ldots,m_k}$, also $F_{n_1,\ldots,n_k} \cdot F^*_{m_1,\ldots,m_k} \neq 0$. Jedem Element von $E(x)$ wird auf diese Weise eindeutig ein Element von Q zugeordnet, und man sieht leicht, dass bei dieser Zuordnung fortsetzbaren Elementen von $E(x)$ fortsetzbare Elemente von Q entsprechen, dass allgemeiner für jedes $\alpha < \Omega$ die Elemente von $[E(x)]_\alpha$ auf Elemente von Q_α abgebildet werden. Wegen $Q_\eta = 0$ ist daher $[E(x)]_\eta = 0$ für jedes $x \,\varepsilon\, A^*$, oder $A^* \cdot B_\alpha = 0$ für $\alpha > \eta$.

2. Im metrischen kompakten Raum R sei ein im Hausdorffschen Sinne vollständiges[14]) System aus abzählbar-vielen Umgebungen $\{U\}$ gegeben, wobei wir noch voraussetzen, dass zugleich mit den Umgebungen U_1 und U_2 auch die Vereinigungsmenge $U_1 \dotplus U_2$ zum System gehört (Die letzte Bedingung kann immer realisiert werden, indem man nötigenfalls das System durch ein umfassenderes ersetzt). Einen Komplex aus m $(m = 1, 2, \ldots)$ Umgebungen U, deren *abgeschlossene Hüllen zu je zwei fremd* sind, bezeichnen wir mit dem Symbol $K^{(m)}$. Den Umgebungskomplex $K^{(2m)}$ nennen wir eine *Verzweigung* des Komplexes $K^{(m)}$, wenn jede der 2^m Umgebungen von $K^{(m)}$ zwei (und somit auch *genau* zwei) Umgebungen von $K^{(2m)}$ als Teilmengen enthält.

Wir ordnen jetzt alle Komplexe $K^{(2)}$ (deren es ja nur abzählbar-viele gibt) auf eine beliebige aber bestimmte Weise in eine unendliche Folge:

$$K^{(2)}_1, \; K^{(2)}_2, \ldots, \; K^{(2)}_m, \ldots$$

an. Sodann bilden wir für jede natürliche Zahl n eine unendliche Folge

$$K^{(4)}_{n,1}, \; K^{(4)}_{n,2}, \ldots, \; K^{(4)}_{n,m}, \ldots$$

aus sämtlichen Verzweigungen des Komplexes $K^{(2)}_n$. Nunmehr werden für jedes Paar (n_1, n_2) alle Verzweigungen des Komplexes $K^{(4)}_{n_1,n_2}$ in eine Folge $\{K^{(8)}_{n_1,n_2,i}\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, angeordnet und allgemein wird jedem endlichen System natürlicher Zahlen $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ ein (bei

[14]) Darunter wird verstanden, dass es zu jedem Punkt von R beliebig kleine ihn enthaltende Umgebungen des Systems $\{\mathfrak{A}\}$ gibt.

Weglassen des oberen Index 2^k) mit $K_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ bezeichneter Umgebungskomplex $K^{(2k)}$ zugewiesen, so dass bei festen $n_1, n_2, \ldots, n_k$ die Folge $K_{n_1, \ldots, n_k, i}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ alle Verzweigungen des Komplexes $K_{n_1, \ldots, n_k}$ durchläuft.

Es ist leicht einzusehen (unter Berücksichtigung der Voraussetzung, dass die Summe zweier Umgebungen U wieder eine Umgebung U ergibt), dass unter den $K_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ *alle* Komplexe $K^{(2^k)}$ mindestens einmal vertreten sind. Ebenso leicht bestätigt man: Sind in jeder Umgebung des Komplexes $K_{n_1, \ldots, n_k}$ je 2^m Umgebungen eines Komplexes $K^{(2^{k+m})}$ enthalten, so kommt der letztere unter den Komplexen $K_{n_1, \ldots, n_k, i_{k+1}, \ldots, i_{k+m}}$ vor.

Die einzelnen Umgebungen, aus denen der Komplex $K_{n_1, \ldots, n_k}$ gebildet ist, bezeichnen wir (in irgend welcher Reihenfolge) mit:

$$U^i_{n_1, \ldots, n_k} \quad (i = 1, 2, \ldots, 2^k).$$

3. Aus den eben definierten Umgebungskomplexen greifen wir einen bestimmten $K_{n_1, \ldots, n_k}$ heraus und betrachten diejenigen abgeschlossenen Mengen $M \subset R$, welche mit jeder der 2^k *abgeschlossenen* Mengen $\overline{U^i_{n_1, \ldots, n_k}}$ gemeinsame Punkte besitzen:

$$(^0) \qquad M . \overline{U^i_{n_1, \ldots, n_k}} \neq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, 2^k).$$

Die Gesamtheit der abgeschlossenen Mengen mit dieser Eigenschaft sehen wir als eine Teilmenge des Potenzraumes $\mathfrak{R}$ an und bezeichnen sie mit $\mathfrak{F}_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$. $\mathfrak{F}_{n_1, \ldots, n_k}$ ist in $\mathfrak{R}$ *abgeschlossen*; dies ist eine Folgerung aus dem allgemeinen Satz: Bei vorgegebener abgeschlossener Menge $A \subset R$ bilden die abgeschlossenen Mengen M mit der Eigenschaft $A . M \neq 0$ eine in $\mathfrak{R}$ abgeschlossene Menge [15]. Vermöge diese Satzes ist $\mathfrak{F}_{n_1, \ldots, n_k}$ Durchschnitt von 2^k abgeschlossenen Mengen, also abgeschlossen. Ferner gilt allgemein

$$\mathfrak{F}_{n_1, \ldots, n_k, n_{k+1}} \subset \mathfrak{F}_{n_1, \ldots, n_k}.$$

[15]) Ist nämlich $N . A = 0$, dann gibt es bekanntlich eine positive Zahl $r = r(A, N)$, so dass für jeden Punkt x von A und für jeden Punkt y von N $d(x, y) > r$. Für eine Menge M mit $M . A \neq 0$, ist es also möglich einen Punkt $x \varepsilon M$ zu bestimmen (als solcher kann ein beliebiger Punkt von $M . A$ genommen werden), so dass für $y \varepsilon N$ $d(x, y) < r$. Nach der am Anfang von § 1 ausgesprochenen Definition bedeutet dies, dass im Sinne der Metrik von R der Abstand zwischen M und N grösser ist als $r = r(A, N)$. Folglich ist N kein Häufungselement der Menge aller M mit $MA \neq 0$, und diese Menge ist abgeschlossen.

Das System aller Mengen $\mathfrak{F}_{n_1, \ldots, n_k}$ $(k = 1, 2, \ldots;\ n_1, \ldots, n_k = 1, 2, \ldots)$ erzeugt (im Sinne des § 1) in $\mathfrak{R}$ eine *analytische Menge* $\mathfrak{A}$. Wir wollen nun zeigen, dass die Elemente dieser Menge nichts anderes sind, als die *nicht-abzählbaren abgeschlossenen* Mengen von R, womit also die in der Einleitung ausgesprochene Behauptung über den analytischen Charakter der Menge aller nicht-abzählbaren abgeschlossenen Mengen bewiesen wird.

Wir beweisen *erstens*: Wenn die abgeschlossene Menge M nicht abzählbar ist, gilt: $M \varepsilon \mathfrak{A}$. Zu dem Zwecke greifen wir aus dem in R zugrundeliegenden vollständigen System der Umgebungen $\{U\}$ zwei Umgebungen heraus, die mit ihren Begrenzungen zueinander fremd sind und von denen jede eine *nicht-abzählbare Teilmenge von M enthält* (Ein derartiges Umgebungspaar gibt es sicher, weil eine nicht-abzählbare Menge mindestens zwei Kondensationspunkte enthält). Innerhalb jeder dieser Umgebungen wählen wir je zwei denselben Bedingungen unterworfene Umgebungen des Systems $\{U\}$ usw. Auf diese Weise fortfahrend, erhalten wir offenbar eine Folge von Umgebungskomplexen, deren jeder eine Verzweigung des unmittelbar vorangehenden ist, also eine Folge der Gestalt:

$$K_{n_1}, \; K_{n_1, n_2}, \ldots, \; K_{n_1, n_2, \ldots, n_k}, \ldots$$

Dabei hat jedes $U^i_{n_1, \ldots, n_k}$ $(k = 1, 2, \ldots;\ i = 1, 2, \ldots, 2^k)$ gemeinsame Punkte (sogar eine nicht abzählbare Menge von gemeinsamen Punkten) mit M, es sind also a fortiori die Bedingungen $(^0)$ erfüllt und es gilt (nach der Definition von $\mathfrak{F}_{n_1, \ldots, n_k}$):

$$M \varepsilon \mathfrak{F}_{n_1, \ldots, n_k} \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

dies bedeutet aber $M \varepsilon \mathfrak{A}$.

Wir beweisen *zweitens*: Wenn $M \varepsilon \mathfrak{A}$, ist M nicht-abzählbar. Die vorausgesetzte Beziehung ist gleichbedeutend mit der Existenz einer Folge natürlicher Zahlen $\{n_i\}$, für die $M . \overline{U^i_{n_1, \ldots, n_k}} \neq 0$ $(k = 1, 2, \ldots;\ i = 1, \ldots, 2^k)$. Fur jede Folge $\{i_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots,\ i_k \leqq 2^k)$ mit der Eigenschaft:

$$U^{i_{k+1}}_{n_1, \ldots, n_k, n_{k+1}} \subset U^{i_k}_{n_1, \ldots, n_k} \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

ist nach dem Cantorschen Durchschnittssatz:

$$(') \qquad M . \prod_{k=1}^{\infty} \overline{U^{i_k}_{n_1, \ldots, n_k}} \neq 0.$$

Da es aber (mit Rücksicht auf die Definition der Komplexe $K_{n_1,\dots,n_k,n_{k+1}}$ als Verzweigungen der Komplexe $K_{n_1,\dots,n_k}$) offenbar $2^{\aleph_0}$ solcher Folgen gibt, und da (wegen $\overline{U^i_{n_1,\dots,n_k}} \cdot \overline{U^j_{n_1,\dots,n_k}} = 0$ für $i \neq j$) zwei verschiedene Folgen punktfremde Durchschnitte auf der linken Seite von (') ergeben, ist M nicht-abzählbar. Der Beweis unserer Behauptung ist vollendet.

4. Sei $M \subset R$ eine *abzählbare* abgeschlossene Menge. Nach dem Ergebnis des vorigen Paragraphen gehört M, als Element des Potenzraumes $\mathfrak{R}$ betrachtet, der analytischen Menge $\mathfrak{A}$ *nicht* an. Nach § 1 besitzt M in Bezug auf das erzeugende System $\mathfrak{H}_{n_1,\dots,n_k}$ einen *Index* $\lambda = \lambda(M) < \Omega$, zu dessen Bestimmung die Menge $E(M)$ aller Komplexe natürlicher Zahlen $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ mit der Eigenschaft

$$M \,\varepsilon\, \mathfrak{H}_{n_1,\dots,n_k}$$

oder ausführlicher

$$\text{(a)} \qquad M \,.\, \overline{U^i_{n_1,\dots,n_k}} \neq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 2_k)$$

verwendet wird.

Neben $E(M)$ betrachten wir noch die zweite Menge $E^*(M)$, (bestehend aus den Zahlenkomplexen $(n_1, n_2, \dots, n_k)$, die der im Vergleich zu (a) schärferen Bedingung

$$\text{(a*)} \qquad M \,.\, U^i_{n_1,\dots,n_k} \neq 0 \quad (i = 1, \dots, 2_k)$$

genügen. Wir bemerken gleich: Für ein endliches m gilt:

$$('') \qquad [E(M)]_m = 0 \quad (\text{bzw. } [E^*(M)]_m = 0)$$

dann und nur dann, wenn die Menge M *endlich* ist und die Anzahl ihrer Elemente $< 2^m$.

Die Beziehungen ('') besagen nämlich, dass in $E(M)$ bzw. $E^*(M)$) höchstens $(m-1)$-gliedrige Zahlenkomplexe vorkommen. Nun ist es aber klar, dass für eine Menge M, die aus weniger als 2^m Punkten besteht, die 2^k Relationen (a) (bzw. (a*)) für $k \geqq m$ simultan nicht bestehen können. Andererseits lässt sich für eine Menge M, die mindestens 2^m Punkte enthält, sicher ein Umgebungskomplex $K^{(2^m)}$ (also ein $K_{n_1,\dots,n_m}$) angeben, dessen jede Umgebung Punkte aus M besitzt, so dass also der Zahlenkomplex $(n_1, \dots, n_m)$ in $E^*(M)$ und erst recht in $E(M)$ enthalten ist.

Sei jetzt M' die *Ableitung* der Punktmenge M. Wir beweisen die folgende Beziehung zwischen den vier Mengen $E(M)$, $E^*(M)$, $E(M')$, $E^*(M')$:

$$(\dagger) \qquad E^*(M') \subset [E^*(M)]_\omega \subset [E(M)]_\omega \subset E(M').$$

Der mittlere Teil der Formel ist eine unmittelbare Folgerung aus $E^*(M) \subset E(M)$. Wir beweisen den linken Teil von (†): Der Komplex $\pi \equiv (n_1, n_2, \dots, n_k)$ sei ein Element von $E^*(M')$; jedes U^i_π $(i = 1, \dots, 2^k)$ enthält dann wenigstens einen Punkt von M' und daher *unendlich-viele* Punkte von M. Mit Rücksicht darauf können wir für jedes natürliche m ein $K^{(2^{k+m})}$ bilden aus Umgebungen, die sämtlich gemeinsame Punkte mit M haben und zu je 2^m in den einzelnen U^i_π enthalten sind. Dieses $K^{(2^{k+m})}$ ist nach der Schlussbemerkung von § 2 ein Komplex von der Form $K_{\pi, i_{k+1},\dots,i_{k+m}}$ und der zugehörige Zahlenkomplex $(\pi, i_{k+1}, \dots, i_{k+m})$ gehört der Menge $E^*(M)$ an, woraus folgt, dass π ein Element von $[E^*(M)]_m$ für $m = 1, 2, \dots$, also ein Element von $[E^*(M)]_\omega = \prod_{m=1}^{\infty} [E^*(M)]_m$ ist.

Zum Beweise des rechten Teiles von (†) betrachten wir ein Element $\pi \equiv (n_1, n_2, \dots, n_k)$ von $[E(M)]_\omega$. Für $m = 1, 2, \dots$ ist $\pi \,\varepsilon\, [E(M)]_m$, d. h. es gibt m Zahlen $i^{(m)}_{k+1}, \dots, i^{(m)}_{k+m}$, so dass der erweiterte Komplex $\pi^{(m)} = (\pi, i^{(m)}_{k+1}, \dots, i^{(m)}_{k+m})$ gleichfalls zu $E(M)$ gehört. Es gilt somit: $M \,.\, \overline{U^i_{\pi^{(m)}}} \neq 0$ $(i = 1, \dots, 2^{k+m})$, und da in jedem U^i_π 2^m (paarweise fremde) $\overline{U^i_{\pi^{(m)}}}$ liegen, enthält jedes $\overline{U^i_\pi}$ mindestens 2^m Punkte von M. Weil dies für jedes natürliche m gilt, und weil der Raum R nach Annahme kompakt ist, enthält jedes $\overline{U^i_\pi}$ mindestens einen Punkt der Ableitung M', damit gleichbedeutend, gilt: $\pi \,\varepsilon\, E(M')$. Die Formel (†) ist restlos bewiesen.

Wir verallgemeinern sie zu der folgenden für jede Ordinalzahl $\nu < \Omega$ gültigen Formel:

$$(\dagger\dagger) \qquad E^*(M^\nu) \subset [E^*(M)]_{\omega\cdot\nu} \subset [E(M)]_{\omega\cdot\nu} \subset E(M^\nu)$$

(M^ν bedeutet die iterierte Ableitung von M von der Ordnung ν). Für $\nu = 1$ ist dies die obige Formel (†), Wir nehmen (††) für alle Zahlen $< \nu$ als bewiesen an und unterscheiden zwei Fälle:

1) ν ist eine isolierte Zahl; dann ist:

$$M^\nu = (M^{\nu-1})'; \quad [E(M)]_{\omega\cdot\nu} = \{[E(M)]_{\omega\cdot(\nu-1)}\}_\omega;$$
$$[E^*(M)]_{\omega\cdot\nu} = \{[E^*(M)]_{\omega\cdot(\nu-1)}\}_\omega$$

und die Formel (††) folgt ohne weiteres unter Anwendung der Formel (†) aus der für $\nu - 1$ als gültig angenommenen Relation (††).

2) ν ist eine Grenzzahl:

$$\nu = \lim \nu_n \quad (n = 1, 2, \ldots, \ \nu_n < \nu_{n+1}).$$

Dann haben wir:

$$M^\nu = \prod_{n=1}^{\infty} M^{\nu_n}; \quad [E(M)]_{\omega\cdot\nu} = \prod_{n=1}^{\infty} [E(M)]_{\omega\cdot\nu_n};$$

$$[E^*(M)]_{\omega\cdot\nu} = \prod_{n=1}^{\infty} [E^*(M)]_{\omega\cdot\nu_n}.$$

Ist jetzt π ein Element von $E^*(M^\nu)$, so gehört π wegen $M^{\nu_n} \supset M^\nu$ auch der Menge $E^*(M^{\nu_n})$ für $n = 1, 2, \ldots$ an. Nach Annahme ist dann $\pi \,\varepsilon\, [E^*(M)]_{\omega\cdot\nu_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ also $\pi \,\varepsilon\, [E(M)]_{\omega\cdot\nu}$. Sei andererseits $\pi \,\varepsilon\, [E(M)]_{\omega\cdot\nu}$ oder $\pi \,\varepsilon\, [E(M)]_{\omega\cdot\nu_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Nach Induktionsannahme folgt daraus $\pi \,\varepsilon\, E(M^{\nu_n})$, d. h. $M^{\nu_n} \cdot \overline{U}^i_\pi \neq 0$ $(n = 1, 2, \ldots; \ i = 1, \ldots, 2^k)$; der Cantorsche Durchschnittssatz ergibt: weiter $M^\nu \cdot U^i_\pi = U^i_\pi \cdot \prod_{n=1}^{\infty} M^{\nu_n} \supset 0$ $(i = 1, \ldots, 2^k)$, oder $\pi \,\varepsilon\, E(M^\nu)$ Der Beweis von (††) ist erbracht.

Sei nun $\alpha = \alpha(M)$ die Ordnung der Menge M; es ist also $M^\alpha = 0$, aber $M^{\alpha-1} \neq 0$. Die Menge $M^{\alpha-1}$ ist endlich, und nach einer Bemerkung am Anfang dieses Paragraphen gilt für ein bestimmtes endliches m:

$$[E(M^{\alpha-1})]_m = 0.$$

Nach (††) ist aber:

$$[E(M)]_{\omega\cdot(\alpha-1)} \subset E(M^{\alpha-1}),$$

und die beiden letzten Formeln zusammen ergeben:

$$\{[E(M)]_{\omega\cdot(\alpha-1)}\}_m = [E(M)]_{\omega\cdot(\alpha-1)+m} = 0,$$

Für den Index $\lambda = \lambda(M)$ bekommen wir daraus:

$$\text{(V)} \qquad \lambda < \omega \,.\, \alpha.$$

Anderseits ist

$$\text{(VV)} \qquad \lambda \geqq \omega \,.\, (\alpha - 1),$$

denn sonst hätten wir:

$$\lambda = \omega \,.\, \lambda + n \quad (\lambda < \alpha - 1; \quad n < \omega)$$

und mithin

$$\{[E(M)]_{\omega\cdot\nu}\}_n = [E(M)]_{\omega\nu+n} = 0$$

Nach (††) ist aber:

$$E^*(M^\nu) \subset [E(M)]_{\omega\cdot\nu}.$$

Aus den letzten beiden Beziehungen folgt:

$$[E^*(M^\nu)]_n = 0.$$

Dies bedeutet, wie wir oben sahen, dass M^ν endlich ist und folglich $M^{\nu+1} = 0$, was mit Rücksicht auf $\nu < \alpha - 1$ und $M^{\alpha-1} \neq 0$ unmöglich ist.

Die Formeln (V) und (VV) liefern zusammen die folgende *Beziehung zwischen der Ordnung der Menge M und ihrem Index* in Bezug auf das erzeugende System $\mathfrak{F}_{n_1,\ldots,n_k}$ des Potenzraumes

$$\text{(X)} \qquad \underline{\lambda = \omega \,.\, (\alpha - 1) + m,}$$

wo m eine endlich Zahl bedeutet. Diese Formel zeigt insbesondere, dass α durch λ eindeutig bestimmt ist.

5. Wenn der kompakte Raum R *nicht abzählbar* ist, enthält er abzählbare abgeschlossene Mengen von beliebig hohen Ordnungen). Nach der Fundamentalformel (X) ist also auch der Index $\lambda(M)$ beliebig hoher Werte fähig. Nach dem im § 1 angeführten Ergebnis folgt hieraus, dass die zur analytischen Menge $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{R}$ komplementäre Menge, d. h. *die Menge aller abzählbaren abgeschlossenen Mengen nicht analytisch ist* dass m. a. W. $\mathfrak{R} - \mathfrak{A}$ keine Borelsche Menge ist. Das in der Einleitung ausgesprochene Hauptergebnis ist bewiesen. Zugleich ergibt sich bei Rückblick auf die Entwicklungen des § 1 noch das folgende (gleichfalls oben bereits formulierte) Resultat: Eine Menge $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{R} - \mathfrak{A}$ ist sicher nicht analytisch, wenn unter ihren Elemente Punktmengen von beliebig hohen Ordnungen vorkommen, oder in anderer Ausdrucksweise: Unter den Elementen einer analytischen Menge $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{R} - \mathfrak{A}$ können höchstens abzählbarviele topologische Typen vertreten sein.

Wir betrachten jetzt eine eindeutige stetige Abbildung des Raumes R auf einen kompakten Raum R^*, bei der jedem Punkt x von R der Punkt $f(x)$ von R zugeordnet wird und jeder Menge $M \subset R$ die Punktmenge $f(M) = \sum_{x \varepsilon M} f(x)$. Unter $f^{-1}(y)$ $(y \,\varepsilon\, R^*)$ verstehen wir die Originalmenge von y, d. h. die Menge aller Punkte x von R

mit $f(y) = y$, die $f^{-1}(y)$ sind abgeschlossene Mengen (können also als Elemente des Potenzraumes $\mathfrak{R}$ angesehen werden). Wir fragen nach der Menge $A = A(f)$ der Punkte y mit *nicht-abzählbaren* Originalmengen $f^{-1}(y)$. Zu dem Zwecke setzen wir an die Konstruktion des 2 anknüpfend, für jeden der in R definierten Umgebunskomplexe $K_{n_1,\dots,n_k}$:

$$F_{n_1,\dots,n_k} = \prod_{i=1}^{2^k} f(\overline{U^i_{n_1,\dots,n_k}})$$

da (infolge der Kompaktheit von R) die abgeschlossenen Mengen von R abgeschlossene Bildmengen in R^* ergeben, sind die $F_{n_1,\dots,n_k}$ abgeschlossen und definieren somit in R^* eine analytische Menge A^*, von der wir nunmehr zeigen wollen, dass sie mit der eben genannten Menge A übereinstimmt. Aus der Definition der Menge $F_{n_1,\dots,n_k}$ und der Mengen $\mathfrak{F}_{n_1,\dots,n_k}$ des Potenzraumes $\mathfrak{R}$ folgt leicht, dass die Beziehungen:

$$(^0) \qquad y \,\varepsilon\, F_{n_1,\dots,n_k}$$

und

$$(^{00}) \qquad f^{-1}(y) \,\varepsilon\, \mathfrak{F}_{n_1,\dots,n_k}$$

gleichbedeutend sind. Folglich sind auch die Beziehungen: $y \,\varepsilon\, A$ und $f^{-1}(y) \,\varepsilon\, \mathfrak{A}$ äquivalent, oder anders ausgedrückt: $A = A^*$. Wir haben den Mazurkiewicz-Sierpińskischen Satz wiedergefungen (siehe Einleitung), wonach die Menge $A = A(f)$ *bei jeder stetigen Abbildung analytisch ist.*

Aus der Äquivalenz der Beziehungen (^{0}) und (^{00}) ergibt sich weiter, dass für einen Punkt y von $R - A$ (also einen Punkt mit *abzählbarem* $f^{-1}(y)$) der *Index* $\lambda(y)$ in Bezug auf das System $\{F_{n_1,\dots,n_k}\}$ mit dem Index der Menge $f^{-1}(y)$ in Bezug auf das System $\{\mathfrak{F}_{n_1,\dots,n_k}\}$ übereinstimmt, und die Formel (X) von § 4 zeigt, dass eine obere Schranke $\mu < \Omega$ für die Ordinalzahlen $\lambda(y)$ dann und nur dann existiert, wenn es eine *obere Schranke für die Ordnungen der Originalmengen* $f^{-1}(y)$ $(y \,\varepsilon\, R - A)$ *gibt*; nach § 1 ist das letztere eine *notwendige und hinreichende Bedingung, dafür dass die Menge A Borelsche Menge sei.* Alle in der Einleitung ausgesprochenen Behauptungen sind somit bewiesen.

Ein wichtiger Spezialfall dieser Behauptung besagt: *Wen alle Mengen $f^{-1}(y)$ abzählbar sind*, d. h., wenn $A = 0$, *verbleiben die Ordnungen dieser Mengen unterhalb einer Schranke $\mu < \Omega$.*

6. Die vorstehenden Ergebnisse fürhen zu einen sehr einfachen Beispiel einer linearen nicht-Borelschen Menge. Sei I_0 das Einheitsintervall $(0 < x < 1)$ der reellen Zahlengeraden. Die offenen Teilintervalle von I_0 mit rationalen Endpunkten ordnen wir in eine Folge: $\{I_m\}$ $(m = 1, 2, \dots)$ an. Für eine irrationale Zahl $0 < x < 1$ mit der Kettenbruchentwicklung:

$$x = \cfrac{1}{n_1^{(x)} + \cfrac{1}{n_2^{(x)} + \cfrac{1}{n_3^{(x)} + \dots}}}$$

setzen wir:

$$B(x) = I - \sum_{k=1}^{\infty} I_{n_k^{(x)}}.$$

Wir behaupten jetzt: Die Menge aller irrationalen Zahlen x, für die $B(x)$ nicht-abzählbar ausfällt, ist eine analytische, aber ***keine Borelsche*** Menge. Zum Beweise bemerken wir znerst: Da jede offene Teilmenge von I_0 als Summe von Intervallen I_n dargestellt werden kann, kommen unter den $B(x)$ *alle abgeschlossenen* Teilmengen von I_0 vor, welche die beiden Endpunkte $x = 0$ und $x = 1$ enthalten. Wir betrachten nun in der Cartesischen Zahlenebene die Menge N aller Punkte (x, y), wo $0 < x < 1$, x irrational und $y \,\varepsilon\, A(x)$ [16]). Ist $\overline{N}$ die abgeschlossene Hülle von N, so zeigt man leicht, dass die Menge $\overline{N} - N$ ausschliesslich aus Punkten mit rationalen Abszissen x besteht. Bei der durch die orthogonale Projektion der abgeschlossenen Menge N auf das Einheitsintervall: $y = 0$; $0 < x < 1$ vermittelten steigen Abbildung stimmt für irrationales x die Orginalmenge von x mit $B(x)$ überein, es kommen also unter den Orginalmengen alle die Endpunkte $x = 0$ und $x = 1$ enthaltenden abgeschlossenen Mengen und somit auch abzählbare Mengen mit beliebig hohen Ordnungen. Nach dem oben bewiesenen ist daher die Menge A aller Punkte mit nicht-abzählbaren Originalmengen keine Borelsche Menge. Da aber diese Menge $= M +$ eine Menge von rationalen Zahlen ist, sich also von M nur um eine abzählbare Menge unterscheidet, ist auch M keine Borelsche Menge (wohl aber eine analytische Menge).

[16]) Es wird hier teilweise von einer Sierpiński'schen konstruktion Gebrauch gemach Vgl. Fund. Math. 7, S. 198.

[17]) Vgl. Sierpiński, a, a. O. S. 200.