Sur un problème de M. Banach.

Par

Edward Szpilrajn (Varsovie).

M. Banach a posé récemment le problème suivant: *Existe-t-il sur tout ensemble (linéaire) non dénombrable une fonction de Baire de classe quelconque?* [1])

M. Sierpiński a prouvé que la solution affirmative du problème de M. Banach serait incompatible avec l'hypothèse du continu.

En désignant notamment par L un ensemble non dénombrable (de M. Lusin) qui a en commun avec tout ensemble parfait non dense un ensemble au plus dénombrable de points [2]), M. Sierpiński a démontré que toute fonction de Baire définie sur L est une fonction de classe ≤ 2 (sur L) [3]).

Dans le même ordre d'idées je prouverai que *si* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, *il existe un ensemble (linéaire) non dénombrable M, tel que toute fonction de Baire définie sur M est une fonction de classe* ≤ 1 (*sur* M).

Nous allons démontrer qu'un certain ensemble M, construit à l'aide de l'hypothèse du continu par M. Sierpiński, satisfait

[1]) Comme on voit sans peine, toute fonction définie sur un ensemble (linéaire) dénombrable est une fonction de Baire de classe ≤ 1: voir p. e. W. Sierpiński *Fund. Math.* t. XV, p. 195.

[2]) On démontre à l'aide de l'hypothèse du continu qu'un tel ensemble existe. Voir p. e. M. Lavrentieff, *Fund. Math.* t. VI, p. 154—155.

[3]) Ce résultat de M. Sierpiński n'était pas publié. Sa démonstration s'appuit sur la propriété de L que tout ensemble borelien a en commun avec L un ensemble de points qui est une somme d'un ensemble G_δ et d'un ensemble au plus dénombrable.

à cette condition. C'est un ensemble non dénombrable qui a en commun avec tout ensemble de mesure nulle un ensemble au plus dénombrable de points [1]).

Lemme. Tout ensemble B qui est un ensemble borelien (ou, plus généralement, analytique) relativement à M est à la fois un ensemble F_σ relativement à M et un G_δ relativement à M.

Démonstration. L'ensemble B étant un ensemble borelien par rapport à M, il existe un ensemble borelien (absolu) B_1, tel que

$$B = MB_1. \tag{1}$$

L'ensemble B_1 étant *a fortiori* mesurable (L), il existe une décomposition

$$B_1 = K + N,$$

où K est un ensemble F_σ et N un ensemble de mesure nulle. Nous avons donc, en vertu de (1),

$$B = KM + NM.$$

Or, il résulte de la définition de l'ensemble M que l'ensemble NM est au plus dénombrable. L'ensemble B est par conséquent un ensemble F_σ par rapport à M.

Observons enfin que l'ensemble $M - B$ étant un ensemble borelien relativement à M, est aussi un F_σ par rapport à M, d'où il résulte tout de suite que B est un G_δ relativement à M.

Notre lemme est donc établi.

La proposition énoncée au debut résulte immédiatement de notre lemme et de théorèmes bien connus, concernant les relations entre la classe d'une fonction $f(x)$ et celles des ensembles

$$\underset{x}{\mathrm{E}}\,[f(x) > a] \quad \text{et} \quad \underset{x}{\mathrm{E}}\,[f(x) < a]\ ^{2)}.$$

Or, il est à remarquer qu'il existe sur M (et plus généralement sur tout ensemble de puissance du continu) des fonctions qui ne sont pas des fonctions de Baire. En effet, l'ensemble de toutes les

[1]) *Fund. Math.* t. V, p. 184.

[2]) Voir p. e. H. Hahn: *Theorie der reellen Funktionen*, Berlin 1921, p. 349 (Satz I) et p. 351 (Satz IV).

fonctions de Baire (sur M) est de puissance $2^{\aleph_0}$, tandis que l'ensemble de toutes les fonctions définies sur M est évidemment de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$ (car il existe $2^{2^{\aleph_0}}$ de sous-ensembles de M, et par conséquent autant de fonctions caractéristiques).

On peut démontrer de même que sur tout ensemble contenant un sous-ensemble parfait (donc, en particulier, sur tout ensemble borelien non dénombrable) il existe des fonctions de Baire de classe quelconque.

Sur l'existence des demi-tangentes à une courbe de Jordan.

Par

Georges Bouligand (Poitiers).

Dans tout cet article, nous raisonnerons en géométrie euclidienne à n dimensions, et nous ne considérerons que des ensembles fermés de points. Nous allons d'abord rappeler, en la précisant, une notion déjà utilisée [1]).

1. *Ensemble des demi-tangentes en un point d'accumulation.* Soit 0 un point d'accumulation de l'ensemble fermé E. Soit Δ_ε l'ensemble des demi-droites, ou rayons, joignant 0 aux points de E distincts de 0 et dont la distance à 0 ne dépasse pas ε. Soit $\overline{\Delta}_\varepsilon$ la fermeture de Δ_ε. Considérons l'ensemble $\overline{\Delta}_\varepsilon - \Delta_\varepsilon$. Pour l'obtenir, nous prenons un rayon r d'accumulation de rayons ϱ de Δ_ε; si les ϱ résultent de la jonction au point 0 de points de E (distants de 0 de moins de ε) ayant un point d'accumulation distinct de 0, ce point d'accumulation fait partie de E, donc son rayon de jonction r fait partie de Δ_ε et s'élimine de la différence $\overline{\Delta}_\varepsilon - \Delta_\varepsilon$: pour cette raison, l'ensemble $\overline{\Delta}_\varepsilon - \Delta_\varepsilon$ est indépendant de ε; les rayons qui le composent sont limites de rayons de jonction provenant de toutes les suites possibles de points de E tendant vers le point 0, à l'exclusion des rayons contenant une infinité de points de E admettant 0 pour point d'accumulation; ces rayons s'éliminent aussi de $\overline{\Delta}_\varepsilon - \Delta_\varepsilon$. En les ajoutant à $\overline{\Delta}_\varepsilon - \Delta_\varepsilon$, nous obtiendrons un ensemble Δ que nous appellerons justement *l'ensemble des demi-tangentes au point* 0. Chaque rayon

[1]) G. Bouligand: Sur quelques points de topologie restreinte du premier ordre. Bulletin de la Société Mathématique de France, t. 56 (année 1928) page 29. — Problèmes connexes de la notion d'enveloppe de M. Georges Durand (C. R. Ac. Sc. Paris, t. 189, année 1929, page 447, section II).