Or, une image de Baire d'un ensemble analytique est toujours un ensemble analytique. En effet, soit $f(x)$ une fonction de Baire, définie sur l'ensemble analytique, E. D'après un théorème de M. Alexits [1]), il existe une fonction de Baire, $\varphi(x)$, définie pour tous les x réels, telle que $\varphi(x)=f(x)$ pour $x \epsilon E$. L'image géométrique J de la fonction (de Baire) φ (c'est-à-dire l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, tels que $y=\varphi(x)$) est, comme on sait, mesurable B [2]). Or, soit Q l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, tels que $x \epsilon E$: l'ensemble E étant analytique, Q le sera aussi. Donc, l'ensemble JQ est analytique, aussi que sa projection P sur l'axe $0Y$. Or, on voit sans peine que $P=f(E)$, ce qui prouve que $f(E)$ est un ensemble analytique.

Nous avons donc (d'après la propriété démontrée de la famille $\Gamma_1(E)$)

$$\Gamma_\alpha(E) \subset \Gamma_1(E),$$

et la formule (2) donne $\Gamma_\alpha(E)=\Gamma_1(E)$. Notre théorème est ainsi démontré.

Or, le problème se pose: *notre théorème est-il vrai pour les ensembles E linéaires quelconques?* Ce problème me parait difficile à résoudre.

1) *Fund. Math.* t. XV, p. 56 (Satz IV).
2) *Fund. Math.* t. II, p. 78, Th. III.

Sur les opérations de M. Hausdorff.

(Solution de cinq problèmes de M. Tarski).

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

F étant une famille donnée quelconque d'ensembles et N étant un ensemble donné de suites (finies ou infinies) de nombres naturels croissants $n_1<n_2<n_3<\ldots$, nous désignerons par $H_N(F)$ et nous appellerons *résultat d'opération de M. Hausdorff caractérisée par l'ensemble N et effectuée sur la famille F d'ensembles*, la famille H de tous les ensembles de la forme

$$\sum_N E_{n_1} E_{n_2} E_{n_3} \ldots, \tag{1}$$

où E_n $(n=1, 2, 3, \ldots)$ sont des ensembles de la famille F, et où la sommation $\sum\limits_N$ s'étend à toutes les suites $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ constituant l'ensemble N de suites [1]).

La condition que les suites $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ soient croissantes n'est pas essentielle, puisqu'on peut remplacer toute suite infinie de nombres naturels $n_1, n_2, n_3, \ldots$ par une suite (finie ou infinie) croissante formée de tous les nombres naturels qui sont termes de la suite considérée (sans altérer le produit $E_{n_1} E_{n_2} E_{n_3} \ldots$).

Nous pouvons aussi supposer toutes les suites de N infinies, en repetant dans le cas contraire un terme une infinité de fois.

1) Cf. F. Hausdorff, *Mengenlehre*, Berlin und Leipzig 1927, p. 89 et p, 90, et W. Sierpiński, *Sur les fonctions de M. Hausdorff*, Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie XIX (1917), Classe III, p. 463. Les sommes (1) sont appelées par M. Hausdorff *δs-Funktionen*.

L'ensemble N de suites étant donné, on peut considérer $H_N(F)$ comme une opération sur les familles F quelconques d'ensembles: nous l'appellerons *opération de M. Hausdorff*, ou plus simplement *opération* H (caractérisée par l'ensemble N de suites).

Le but de ce Mémoire est la solution de cinq problèmes concernant les fonctions de M. Hausdorff qui m'ont été posés par M. Tarski.

1. Le premier problème de M. Tarski concerne l'existence d'une opération H universelle. M. Tarski demande notamment *s'il existe pour toute famille donnée F d'ensembles une opération H, soit $H_U(F)$, telle qu'on ait*

$$H_U(F) \supset H_N(F),$$

pour toute opération H, $H_N(F)$. Nous démontrerons que *la réponse à ce problème est négative.*

Ce problème peut être encore énoncé d'une autre façon. F étant une famille donnée d'ensembles, désignons par $X(F)$ la famille-somme de toutes les familles d'ensembles qui sont résultats d'une opération quelconque (variable) de M. Hausdorff, effectuée sur la famille F. M. Tarski demande s'il existe toujours une opération H (dépendant de F), soit $H_U(F)$, telle qu'on ait

$$H_U(F) = X(F). \tag{2}$$

Nous prouverons que la solution de ce problème est negative.

Soit, en effet, F la famille de tous les intervalles aux extrémités rationnelles que nous pouvons imaginer rangées en une suite infinie

$$\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3, \dots$$

Il existe, comme on sait, pour tout nombre réel x une infinité de suites infinies d'indices $n_1, n_2, n_3, \dots$ telles que

$$(x) = \delta_{n_1}\delta_{n_2}\delta_{n_3}\dots$$

(où (x) désigne l'ensemble formé d'un seul point, x).

E étant un ensemble donné quelconque de nombres réels, désignons par $N(E)$ l'ensemble de toutes les suites $n_1, n_2, n_3, \dots,$ telles que

$$\delta_1\delta_2\delta_3\dots \subset E.$$

On aura évidemment

$$E = \sum_{N(E)} \prod_{k=1}^{\infty} \delta_{n_k}$$

et il s'en suit, d'après la définition de la famille $H_{N(E)}(F)$, que

$$E \in H_{N(E)}(F).$$

Donc $X(F)$ est la famille de tous les ensembles de nombres réels, donc une famille de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$.

Or, on voit sans peine que, quelle que soit l'opération H de M. Hausdorff, $H_N(F)$ est toujours une famille de puissance $\leqslant 2^{\aleph_0}$, et parsuite ne peut pas coïncider avec $X(F)$.

Or, il est à remarquer qu'il existe des familles F admettant une fonction H universelle: telle est p. e. la famille F de tous les sous-ensembles d'un ensemble donné quelconque.

2. $H_M(F)$ et $H_N(F)$ étant deux opérations H données, M. Tarski demande: *Existe-t-il toujours une opération H, soit H_P, telle qu'on ait*

$$H_P(F) = H_M(H_N(F)) \tag{2}$$

pour toute famille F d'ensembles? [1]).

Nous prouverons que *la réponse à ce problème est affirmative.*

Soient H_M et H_N deux opérations H données, M et N — les ensembles de suites correspondants: Nous définirons une nouvelle opération H, H_P de la façon suivante.

k étant un nombre naturel donné, il existe, comme on sait, toujours un tel un seul système de deux nombres naturels m et n, tels que

$$k = 2^{m-1}(2n-1): \tag{3}$$

nous les désignerons par

$$m = \varphi(k) \quad \text{et} \quad n = \psi(k); \tag{4}$$

les formules (3) et (4) sont donc équivalentes (pour m et n naturels).

[1]) Ce mémoire était déjà écrit quand j'ai appri, grace, à une lettre de M. Gr. Fichtenholz (du 6 novembre 1929) qu'un problème très voisin a été traité et résolu par MM. L. Kantorovitch et E. Livenson (V. leur Note „Sur les δs-fonctions de M. Hausdorff" qui paraîtra prochainement dans les C. R.

Désignons par P l'ensemble de toutes les suites infinies de nombres naturels $p_1, p_2, p_3, \ldots$ dont chacune satisfait aux conditions suivantes:

Il existe une suite $m_1, m_2, m_3, \ldots$ de M et une suite infinie de suites $n_1^{(k)}, n_2^{(k)}, n_3^{(k)}, \ldots$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ de N, telles que

$$(5) \qquad p_i = 2^{m_{\varphi(i)}-1}(2n_{\psi(i)}^{(\varphi(i))} - 1), \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, \ldots$$

Désignons par H_P l'opération H caractérisée par l'ensemble P de suites. Je dis que nous aurons la formule (2), pour toute famille F d'ensembles.

En effet, soit E un ensemble de la famille $H_M(H_N(F))$. Il résulte de la définition des opérations H_M et H_N qu'il existe une suite double E_n^m d'ensembles de la famille F, une suite infinie $m_1, m_2, m_3, \ldots$ de M et, pour tout k naturel, une suite infinie $n_1^{(k)}, n_2^{(k)}, n_3^{(k)}, \ldots$ de N, telles que

$$(6) \qquad E = \sum_M \prod_{k=1}^{\infty} \sum_N \prod_{l=1}^{\infty} E_{n_l^{(k)}}^{m_k}.$$

Posons

$$(7) \qquad E_0 = \sum_P \prod_{i=1}^{\infty} E_{p_i},$$

où

$$(8) \qquad E_p = E_{\psi(p)}^{\varphi(p)}, \quad \text{pour } p = 1, 2, 3, \ldots;$$

E_0 sera évidemment un ensemble de la famille $H_P(F)$. Je dis que $E = E_0$.

En effet, soit x un élément de l'ensemble E. D'après (6) il existe donc une suite $m_1, m_2, m_3, \ldots$ de M et, pour tout k naturel une suite $n_1^{(k)}, n_2^{(k)}, \ldots$ de N, telles que

$$(9) \qquad x \in E_{n_l^{(k)}}^{m_k}, \quad \text{pour } k = 1, 2, 3, \ldots \text{ et } l = 1, 2, 3, \ldots$$

Définissons la suite $p_1, p_2, p_3, \ldots$ par la formule (5): d'après la définition de P elle appartiendra évidemment à P. Or, d'après (5) (et la définition des fonctions φ et ψ) nous aurons

$$(10) \quad \varphi(p_i) = m_{\varphi(i)} \quad \text{et} \quad \psi(p_i) = n_{\psi(i)}^{(\varphi(i))}, \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, \ldots$$

et la formule (9) donne (pour $k = \varphi(i)$, $l = \psi(i)$, $i = 1, 2, 3, \ldots$):

$$(11) \qquad x \in E_{n_{\psi(i)}^{(\varphi(i))}}^{m_{\varphi(i)}}, \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, \ldots,$$

c'est-à-dire, d'après (10) et (8):

$$(12) \qquad x \in E_{p_i}, \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, \ldots,$$

d'où il résulte, d'après (7), que $x \in E_0$.

Or, soit x un élement de l'ensemble E_0. D'après (7) il existe une suite $p_1, p_2, p_3, \ldots$, de P, telle qu'on a la formule (12). D'autre part, $p_1, p_2, p_3, \ldots$ étant une suite de P, il existe (d'après la définition de P) une suite $m_1, m_2, m_3, \ldots$ de M et, pour tout k naturel une suite $n_1^{(k)}, n_2^{(k)}, n_3^{(k)}, \ldots$ de N, telles qu'on a la formule (5), c'est-à-dire les formules (10) qui donnent, d'après (8) et (12), la formule (11). Soient maintenant k et l deux nombres naturels quelconques et posons

$$i = 2^{k-1}(2l - 1):$$

nous avons

$$\varphi(i) = k \quad \text{et} \quad \psi(i) = l,$$

ce qui donne, d'après (11):

$$(13) \qquad x \in E_{n_l^{(k)}}^{m_k}.$$

La formule (13) étant établie pour tous les nombres k et l, nous trouvons, d'après (6), $x \in E$.

La formule $E = E_0$ est ainsi établie. E_0 étant un ensemble de la famille $H_P(F)$, nous avons ainsi démontré que $E \in H_P(F)$. Il est donc démontré que

$$H_M(H_N(F)) \subset H_P(F).$$

Soit maintenant E_0 un ensemble de la famille $H_P(F)$. D'après la définition de cette famille, il existe une suite infinie $E_1, E_2, E_3, \ldots$ d'ensembles de la famille F, telle qu'on a la formule (7). Posons pour m et n naturels:

$$(14) \qquad E_n^m = E_{2^{m-1}(2n-1)}$$

et définissons l'ensemble E par la formule (6): ce sera évidemment un ensemble de la famille $H_M(H_N(F))$. Je dis que $E_0 = E$.

En effet, soit x un élément de E_0. D'après (7) il existe donc une suite $p_1, p_2, p_3, \ldots$ de P, telle qu'on a les formules (12). Or, $p_1, p_2, p_3, \ldots$ étant une suite de P, il existe une suite $m_1, m_2, m_3, \ldots$ de M et pour tout k naturel une suite $n_1^{(k)}, n_2^{(k)}, \ldots$ de N, telles qu'on a la formule (5). Les formules (12), (5) et (14) donnent la formule

(11) qui, comme nous savons, donne la formule (13) pour $k=1,2,3,\dots$ et $l=1,2,3,\dots$, d'où résulte, d'après (6), que $x \in E$.

Or, soit x un élément de E. D'après (6) il existe donc une suite $m_1, m_2, m_3, \dots$ de M et pour tout k naturel une suite $n_1^{(k)}, n_2^{(k)}, n_3^{(k)}, \dots$ de N, telles qu'on a la formule (9). Définissons la suite $p_1, p_2, p_3, \dots$ par la formule (5): nous aurons les formules (10) et, d'après (9) la formule (11), c'est-à-dire, d'après (14) et (5), la formule (12) qui prouve, d'après (7), que $x \in E_0$.

La formule $E_0 = E$ est ainsi établie, d'où résulte que E_0 est un ensemble de la famille $H_M(H_N(F))$.

Il est donc démontré que

$$H_P(F) \subset H_M(H_N(F)).$$

La formule (2) est ainsi démontrée complètement, et le second problème de M. Tarski est résolu par l'affirmative.

3. F étant une famille donnée d'ensembles et $H_M(F)$ et $H_N(F)$ étant deux opérations H données, M. Tarski demande: *Existe-t-il toujours une opération H, soit H_S, telle qu'on ait*

$$H_S(F) = H_M(F) + H_N(F)? \tag{15}$$

Nous prouverons que *la réponse y est négative.*

Soit $p, q, r, a_1, a_2, a_3, \dots$ une suite infinie d'éléments distincts et posons

$$P = (p, a_1, a_3, a_5, \dots), \quad Q = (q, a_1, a_3, a_5, \dots) \tag{16}$$

$$R_n = (r, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots), \quad \text{pour } n = 1, 2, 3, \dots \tag{17}$$

Soit F la famille formée des ensembles $P, Q, R_1, R_2, R_3, \dots$, et soient M l'ensemble composé d'une seule suite $(1, 2, 3, \dots)$ et N l'ensemble composé de deux suites: $(1, 1, 1, \dots)$ et $(2, 2, 2, \dots)$. Ceci posé, je dis qu'il n'existe aucun ensemble S de suites pour lequel on aurait l'égalité (15).

En effet, admettons qu'un tel ensemble S de suites existe. Soit $(s_1, s_2, s_3, \dots)$ une suite donnée quelconque de S. Je dis qu'elle contient une infinité de termes distincts. En effet, si ce n'était pas le cas, il existerait un nombre naturel k, tel qu'on aurait pour toute suite infinie $E_1, E_2, E_3, \dots$ d'ensembles l'identité

$$E_{s_1} E_{s_2} E_{s_3} \dots = E_{s_1} E_{s_2} \dots E_{s_k}. \tag{18}$$

Or, d'après la définition de M, quelle que soit la suite $E_1, E_2, E_3, \dots$ d'ensembles de F, l'ensemble $E_1 E_2 E_3 \dots$ appartient à $H_M(F)$, donc, en particulier, en posant $E_n = R_n$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$, nous concluons (d'après (17)) que l'ensemble (r) (formé d'un seul élément, r) appartient à $H_M(F)$, donc aussi, d'après (15), à $H_S(F)$. Par conséquent, il existe une suite infinie $E_1, E_2, E_3, \dots$ d'ensembles de F, telle que

$$(r) = \sum_S E_{n_1} E_{n_2} E_{n_3} \dots \tag{19}$$

Il est évident que les termes de la série (19) ne peuvent contenir plus qu'un élément: donc, en particulier, l'ensemble (18) contient au plus un élément: or, c'est impossible, puisqu'il résulte sans peine de (16) et (17) que le produit de toute suite finie d'ensembles de la famille F contient une infinité d'éléments.

De la définition de N résulte tout de suite que si E_1 et E_2 sont des ensembles de la famille F, leur somme $E_1 + E_2$ appartient à $H_N(F)$, donc, d'après (15), aussi à $H_S(F)$: Donc, en particulier, l'ensemble $P + Q$ appartient à $H_S(F)$ et il existe une suite infinie $E_1, E_2, E_3, \dots$ d'ensembles de F, telle que

$$P + Q = \sum_S E_{n_1} E_{n_2} E_{n_3} \dots \tag{20}$$

L'élément p de P appartient donc à (au moins) un terme de la série (20), soit au terme $E_{\alpha_1} E_{\alpha_2} E_{\alpha_3} \dots$ Pareillement le terme q de Q appartient à un terme $E_{\beta_1} E_{\beta_2} E_{\beta_3} \dots$ de la série (20). Je dis que les suites $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$ et $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots)$ (de S) ne contiennent aucun terme commun.

En effet, admettons que $\alpha_k = \beta_l$. De $(p) \in E_{\alpha_1} E_{\alpha_2} E_{\alpha_3} \dots$ et de la définition de la famille F résulte tout de suite qu'on a $E_{\alpha_i} = P$, pour $i = 1, 2, 3, \dots$ (puisque aucun ensemble de F autre que P ne contient pas l'élément p). Pareillement, de $(q) \in E_{\beta_1} E_{\beta_2} E_{\beta_3} \dots$ résulte que $E_{\beta_i} = Q$, pour $i = 1, 2, 3, \dots$ De $\alpha_k = \beta_l$ il résulterait donc que $P = Q$, contrairement à (16).

Définissons maintenant une suite infinie $G_1, G_2, G_3, \dots$ d'ensembles de la famille F comme il suit.

Posons

$$G_{\alpha_i} = R_i, \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, 3, \dots, \tag{21}$$

et

$$G_n = P, \quad \text{pour} \quad n \neq \alpha_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots). \tag{22}$$

La suite $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ ne contenant aucun terme de la suite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, nous aurons, d'après (22):

$$G_{\beta_1} G_{\beta_2} G_{\beta_3} \ldots = P. \tag{23}$$

Je dis que

$$(r) + P = \sum_S G_{n_1} G_{n_2} G_{n_3} \ldots \tag{24}$$

En effet $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots)$ et $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots)$ étant des suites de S, les ensembles $G_{\alpha_1} G_{\alpha_2} G_{\alpha_3} \ldots$ et $G_{\beta_1} G_{\beta_2} G_{\beta_3} \ldots$, c'est-à-dire, d'après (21), (17) et (23), les ensembles (r) et P, sont termes de la série (24). Or, soit $G_{s_1} G_{s_2} G_{s_3} \ldots$ un terme de la série (24). D'après la propriété démontrée de suites de S, la suite $(s_1, s_2, s_3, \ldots)$ contient une infinité de nombres distincts. S'ils appartiennent tous à la suite $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots)$, on a évidemment (d'après (21) et (17)) $G_{s_1} G_{s_2} G_{s_3} = (r)$; sinon, un au moins des facteurs du produit $G_{s_1} G_{s_2} G_{s_3} \ldots$ est égal à P (d'après (22)). On a donc toujours $G_{s_1} G_{s_2} G_{s_3} \ldots \subset (r) + P$, et la formule (24) est établie.

De (24) résulte que l'ensemble $(r) + P$ appartient à la famille $H_S(F)$. Or, cela contredit à la formule (15), puisque l'ensemble $P + (r)$ n'appartient pas ni à $H_M(F)$, ni à $H_N(F)$, la première de ces familles ne contenant que les produits (finis ou infinis) d'ensembles de F, et la seconde ne contenant que les sommes de deux ensembles de F, et l'ensemble $(r) + P$ n'étant pas, comme on le vérifie sans peine, ni l'un, ni l'autre.

La formule (15) est donc impossible et le troisième problème de M. Tarski est résolu négativement.

4. Le quatrième problème de M. Tarski est le suivant:

$$H_{N_1}(F), \quad H_{N_2}(F), \quad H_{N_3}(F), \ldots,$$

étant une suite infinie donnée quelconque d'opérations H, existe-t-il toujours une opération H, $H_N(F)$, telle qu'on ait

$$H_N(F) \supset H_{N_1}(F) + H_{N_2}(F) + H_{N_3}(F) + \ldots, \tag{25}$$

quelle que soit la famille F d'ensembles?

Nous prouverons que *la réponse à ce problème est positive.*

Soit

$$(p_1, q_1, r_1), \ (p_2, q_2, r_2), \ (p_3, q_3, r_3), \ldots \tag{26}$$

une suite infinie formée de tous les systèmes distincts de trois nombres naturels.

Désignons par N l'ensemble de toutes les suites infinies $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ telles que

$$r_{n_i} = i, \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, 3, \ldots, \tag{27}$$

$$q_{n_i} = q_{n_1}, \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, 3, \ldots, \tag{28}$$

et qu'il existe pour tout nombre naturel i au moins une suite de $N_{q_{n_i}}$, dont le i-ième terme est égal à p_{n_i}. Je dis que, qu'elle que soit la famille F d'ensembles, on aura la formule (25).

En effet, soit F une famille donnée d'ensembles, k — un nombre naturel donnée, E — un ensemble donné, appartenant à $H_{N_k}(F)$. Il existe donc une suite infinie $G_1, G_2, G_3, \ldots$, d'ensembles de F, telle que

$$E = \sum_{N_k} G_{n_1} G_{n_2} G_{n_3} \ldots \tag{29}$$

Soit $(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots)$ une suite donnée (fixe) de N_k.

Posons

$$E_n = G_{p_n}, \quad \text{si} \quad q_n = k, \tag{30}$$

et

$$E_n = G_{\nu_{r_n}}, \quad \text{si} \quad q_n \neq k. \tag{31}$$

Les ensembles E_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ appartiendront évidemment à la famille F. Je dis que

$$E = \sum_N E_{n_1} E_{n_2} E_{n_3} \ldots \tag{32}$$

En effet, désignons par P l'ensemble de toutes les suites $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ de N, telles que $q_{n_1} = k$, et posons $Q = N - P$: nous aurons évidemment

$$\sum_N E_{n_1} E_{n_2} E_{n_3} \ldots = \sum_P E_{n_1} E_{n_2} E_{n_3} \ldots + \sum_Q E_{n_1} E_{n_2} E_{n_3} \ldots \tag{33}$$

Si $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ est une suite de P, on a, d'après la définition des ensembles P et N et d'après $P \subset N$:

$$r_{n_i} = i \quad \text{et} \quad q_{n_i} = q_{n_1} = k, \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, 3, \ldots, \tag{34}$$

et il existe pour tout nombre i naturel une suite de $N_{q_{n_i}} = N_k$, soit $(m_1, m_2, m_3, \ldots)$, telle que $m_i = p_{n_i}$: d'après (30) et (34) on a donc:

$$E_{n_i} = G_{p_{n_i}} = G_{m_i}, \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, 3, \ldots, \tag{35}$$

d'où résulte que

$$E_{n_1} E_{n_2} E_{n_3} \ldots = G_{m_1} G_{m_2} G_{m_3} \ldots \tag{36}$$

D'autre part, soit $(m_1, m_2, m_3, \ldots)$ une suite de N_k. La suite (26) contenant tout les systèmes de trois nombres naturels, il existe pour tout tel système (a, b, c) un indice $\lambda(a, b, c)$, tel que

$$p_{\lambda(a,b,c)} = a, \quad q_{\lambda(a,b,c)} = b, \quad r_{\lambda(a,b,c)} = c. \tag{37}$$

Posons:

$$n_i = \lambda(m_i, k, i), \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, 3, \ldots \tag{38}$$

D'après (37) et (38) nous aurons

$$p_{n_i} = m_i, \quad q_{n_i} = k \quad \text{et} \quad r_{n_i} = i, \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, 3, \ldots, \tag{39}$$

ce qui prouve (vu la définition des ensembles N et P) que $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ est une suite de P.

Or, d'après (39) et (30), on a les formules (35) qui donnent la formule (36).

Nous avons ainsi démontré que

$$\sum_P E_{n_1} E_{n_2} E_{n_3} \ldots = \sum_{N_k} G_{n_1} G_{n_2} G_{n_3} \ldots,$$

donc, d'après (29), que

$$\sum_P E_{n_1} E_{n_2} E_{n_3} \ldots = E. \tag{40}$$

Or, soit $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ une suite de Q: d'après la définition de Q on a donc $q_{n_k} \neq k$, donc, d'après la propriété des suites de N (formule (28)) (et d'après $Q \subset N$): $q_{n_i} \neq k$, pour $i = 1, 2, 3, \ldots$ et parsuite, d'après (31):

$$E_{n_i} = G_{\nu_{r_n}}, \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, 3, \ldots,$$

c'est-à-dire, d'après (27):

$$E_{n_i} = G_{\nu_i}, \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, 3, \ldots,$$

ce qui donne, d'après (29), $(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots)$ étant une suite de N_k:

$$E_{n_1} E_{n_2} E_{n_3} \ldots = G_{\nu_1} G_{\nu_2} G_{\nu_3} \ldots \subset E.$$

On a donc

$$\sum_Q E_{n_1} E_{n_2} E_{n_3} \ldots \subset E,$$

et les égalités (33) et (40) donnent la formule (32) qui prouve que $E \epsilon H_N(F)$.

Nous avons ainsi démontré que $H_{N_k}(F) \subset H_N(F)$ pour $k = 1, 2, 3, \ldots$, d'où résulte la formule (25), c. q. f. d.

5. F étant une famille donnée d'ensembles et N étant un ensemble donné de suites, nous désignerons par $K_N(F)$ la famille de tous les ensembles de la forme

$$\prod_N (E_{n_1} + E_{n_2} + E_{n_3} + \ldots), \tag{41}$$

où E_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ sont des ensembles de la famille F, et où le produit Π s'étend à toutes les suites $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ formant l'ensemble N[1]).

M. Tarski demande: *Existe-t-il pour toute opération $K_N(F)$ une opération $H_M(F)$, telle qu'on ait la formule*

$$K_N(F) = H_M(F) \tag{42}$$

quelle que soit la famille F d'ensembles?

Nous prouverons que *la réponse à ce problème est affirmative.*

Noit N un ensemble donné de suites. Désignons par M l'ensemble de toutes les suites infinies $(m_1, m_2, m_3, \ldots)$ satisfaisant à deux conditions suivantes:

1) Chacun des termes m_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ est un terme d'une (au moins) de suites qui appartiennent à N.

[1]) Les produits (41) sont appelés par M. Hausdorff $\sigma\delta$-Funktionen (l. c., p. 89).

2) Quelle que soit la suite $(n_1, n_2, n_3, \dots)$ de N, au moins un des termes de la suite $(m_1, m_2, m_3, \dots)$ est un terme de la suite $(n_1, n_2, n_3, \dots)$.

Je dis qu'on aura la formule (42), quelle que soit la famille F d'ensembles.

Soit F une famille donnée d'ensembles, et soit E un ensemble de la famille $K_N(F)$.

D'après la définition de l'opération K_N, il existe donc une suite infinie E_n $(n = 1, 2, 3, \dots)$ d'ensembles de la famille F, telle que

$$E = \prod_N (E_{n_1} + E_{n_2} + E_{n_3} + \dots) \tag{43}$$

Or, je dis qu'on a l'identité

$$\prod_N (E_{n_1} + E_{n_2} + E_{n_3} + \dots) = \sum_M E_{m_1} E_{m_2} E_{m_3} \dots \tag{44}$$

En effet, soit p un point du côté gauche de (44).

Quelle que soit la suite $\sigma(n_1, n_2, n_3, \dots)$ de N, on a donc $p \in E_{n_1} + E_{n_2} + E_{n_3} + \dots$, et parsuite il existe un indice $k(\sigma)$, tel que

$$p \in E_{n_{k(\sigma)}} \qquad \text{(pour } \sigma \in N) \tag{45}$$

Désignons par $m_1, m_2, m_3, \dots$ la suite infinie formée de tous les nombres naturels s, pour lesquels il existe au moins une suite σ de N, telle que $s = n_{k(\sigma)}$. (Si la suite $m_1, m_2, \dots$ était finie, on pourrait la rendre infinie, en repetant une infinité de fois le même terme). On voit sans peine que la suite $(m_1, m_2, m_3, \dots)$ ainsi définie satisfait aux conditions 1) et 2), et parsuite appartient à M. Or, on a, d'après (45) et d'après la définition de la suite $(m_1, m_1, m_3, \dots)$: $p \in E_{m_k}$, pour $k = 1, 2, 3, \dots$, donc

$$p \in E_{m_1} E_{m_2} E_{m_3} \dots, \tag{46}$$

ce qui prouve que p appartient au côté droit de la formule (44).

D'autre part, soit p un point du côté droit de (46). Il existe donc une suite $(m_1, m_2, m_3, \dots)$ de M, telle qu'on a la formule (46). Or, soit $\sigma(n_1, n_2, n_3, \dots)$ une suite quelconque de N: d'après la propriété 2) de la suite $(m_1, m_2, m_3, \dots)$, il existe un de ses termes, soit $m_{k(\sigma)}$, qui est un terme de la suite σ, d'où résulte que

$$E_{m_1} E_{m_2} E_{m_3} \dots \subset E_{m_{k(\sigma)}} \subset E_{n_1} + E_{n_2} + E_{n_3} + \dots \tag{47}$$

L'inclusion (47) subsistant quelle que soit la suite $\sigma(n_1, n_2, n_3, \dots)$ de N, nous concluons, d'après (46), que p est un point du côté gauche de la formule (44).

La formule (44) est ainsi établie.

De (43) et (44) résulte tout de suite que $E \in H_M(F)$.

E étant un ensemble quelconque de la famille $K_N(F)$ nous avons démontré que

$$K_N(F) \subset H_M(F). \tag{48}$$

Or, soit E un ensemble de la famille $H_M(F)$.

Il existe donc une suite infinie $E_1, E_2, E_3, \dots$ d'ensembles de la famille F, telle que

$$E = \sum_M E_{m_1} E_{m_2} E_{m_3} \dots,$$

ce qui donne, d'après (44), la formule (43) qui prouve que $E \in K_N(F)$.

E pouvant être un ensemble quelconque de la famille $H_M(F)$, nous avons ainsi démontré que

$$H_M(F) \subset K_N(F). \tag{49}$$

Les formules (48) et (49) donnent l'égalité (42), c. q. f. d.

Nous avons ainsi démontré que *les fonctions σd de M. Hausdorff se réduisent aux fonctions $\delta\sigma$* (et inversement).

Voici maintenant un cas particulier important de la formule (42). Soit F la famille de tous les ensembles fermés. Il existe, comme on sait [1]), un ensemble de suites N, tel que la famille $H_N(F)$ coïncide avec la famille de tous les ensembles analytiques. Moyennant l'identité

$$C \prod_N (E_{n_1} + E_{n_2} + E_{n_3} + \dots) = \sum_N CE_{n_1} . CE_{n_2} . CE_{n_3} \dots,$$

on voit sans peine que la famille $K_N(F)$ coïncide avec la famille de tous les complémentaires analytiques. De la formule (42) résulte donc qu'*il existe une opération H qui, effectuée sur la famille de tous les ensembles fermés, donne la famille de tous les complémentaires analytiques.*

1) Voir: F. Hausdorff, l. c., p. 93.