curve M is not necessarily a subset of an acyclic curve K lying in M. The following theorem giving conditions under which this is the case shows that the question, like so many questions concerning continuous curves (see *Structure* § 6) reduces to the same question about the subsets of G lying in the maximal cyclic curves of M.

Theorem 3. *In order that the continuous curve M should contain an acyclic continuous curve K containing the set G of all the cut points and the set E of all the end points of M it is necessary and sufficient that for each maximal cyclic curve C of M, $G.C$ is a subset of some acyclic continuous curve in M.*

Proof. The condition is obviously necessary. It is also sufficient. For it follows by hypothesis and by *Structure*, Theorem 30, that for each maximal cyclic curve C_i $(i=1,2,3,\ldots)$ of M, $G.C_i$ is a subset of an acyclic continuous curve K_i lying wholly in C_i. Then if $K=G+E+\Sigma K_i$, it readily follows from the results in *Structure* that K is an acyclic continuous curve.

Sur les images de Baire des ensembles linéaires.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

E étant un ensemble linéaire donné, on définit par l'induction les fonctions de classe $\leqslant \alpha$ sur E. Les fonctions de classe 0 sur E sont des fonctions définies sur E et continues sur E, et les fonctions de classe $\leqslant \alpha$ sur E sont des fonctions qui sont sur E limites des fonctions de classes $<\alpha$ sur E.

E étant un ensemble linéaire donné et f une fonction de classe $\leqslant \alpha$ sur E, nous appellerons l'ensemble $f(E)$ (de valeurs de $f(x)$ pour $x \in E$) *image de classe* $\leqslant \alpha$ de l'ensemble E (obtenue à l'aide de la fonction f). Nous désignerons par $\Gamma_\alpha(E)$ la famille de tous les ensembles linéaires qui sont des images de classe $\leqslant \alpha$ de l'ensemble E.

Le but de cette Note est de démontrer le suivant

Théorème[1]): *Pour tout ensemble linéaire analytique E on a l'égalité*

$$\Gamma_\alpha(E)=\Gamma_1(E),$$

quel que soit le nombre ordinal positif $\alpha<\Omega$.

Démonstration.

Lemme: *Si E est un ensemble au plus dénombrable, toute fonction définie sur E est de classe $\leqslant 1$ sur E.*

Toute fonction définie sur un ensemble fini étant évidemment continue sur cet ensemble, il suffira de traîter le cas, où l'ensemble E est dénombrable.

[1]) J'ai signalé ce théorème, pour $\alpha=2$, dans ma conférence *Sur les images continues des ensembles linéaires*, faite au I *Congrès des Mathématiciens des Pays Slaves* à Varsovie, le 24 septembre 1929.

Soit

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\dots$$

une suite infinie, formée de tous les éléments (distincts) de l'ensemble E. Soit $f(x)$ une fonction donnée quelconque définie sur E.

n étant un nombre naturel donné, soit $a_1, a_2,\dots, a_n$ la suite formée des nombres $x_1, x_2,\dots, x_n$, ordonnés d'après leurs grandeur, et désignons par $f_n(x)$ la fonction d'une variable réelle, définie par les conditions suivantes:

$$f_n(a_k)=f(a_k),\ \text{pour}\ k=1,2,\dots,n;\quad f_n(x)=f(a_1),\ \text{pour}\ x<a_1,$$

$$f_n(x)=f(a_n),\quad \text{pour}\quad x>a_n,$$

et $f(x)$ est linéaire dans chacun des intervalles (fermés) (a_k, a_{k+1}), pour $k=1, 2,\dots, n-1$.

On voit sans peine que $f_n(x)$ $(n=1, 2, 3,\dots)$ sera une suite infinie de fonctions continues dans l'ensemble de tout les nombres réels, et, à plus forte raison, dans E, telle que

$$f_n(x_k)=f(x_k),\quad \text{pour}\quad k=1, 2,\dots, n,$$

donc, k étant donné et n variable:

$$f_n(x_k)=f(x_k),\quad \text{pour}\quad n\geqslant k,$$

d'où résulte tout de suite que

$$\lim_{n=\infty} f_n(x)=f(x),\quad \text{pour}\quad x\in E.$$

Notre lemme est ainsi démontré.

De notre lemme résulte tout de suite que notre théorème est vraie pour les ensembles au plus dénombrables.

Soit maintenant E un ensemble (linéaire) analytique non dénombrable. Je dis que la famille $\Gamma_1(E)$ coïncide avec la famille de tous les ensembles analytiques (linéaires).

L'ensemble E, en tant qu'un ensemble analytique non dénombrable, contient un sous-ensemble parfait [1]), donc aussi un sous-ensemble parfait, borné et non dense, soit P. Soit N l'ensemble de tous les points de P qui sont points limites de P de gauche et de droite: l'ensemble N sera, comme on sait, homéomorphe à l'ensemble de tous les nombres irrationnels, et l'ensemble $D=P-N$ sera dénombrable: soient

(1) $$a_1,\ a_2,\ a_3,\dots$$

tous les points (distincts) de D: ce seront les extémités de tous les intervalles contigus à P (les deux intervalles infinis contigus à P, $(-\infty, a)$ et $(b, +\infty)$, y inclus).

Tout terme de la suite (1) est donc point limite de l'ensemble N: il existe donc pour tout n naturel un point ξ_n de N, tel que

$$|\xi_n-a_n|<\frac{1}{n}.$$

Tout ensemble (linéaire) analytique est, comme on sait, une image continue de l'ensemble de tous les nombres irrationnels, donc aussi de l'ensemble N.

Donc, si H est un ensemble analytique (linéaire) donné, il existe une fonction $f(x)$ définie et continue sur N, telle que $H=f(N)$. Nous définirons maintenant une fonction d'une variable réelle $\varphi(x)$ comme il suit.

Four $x\in N$ posons $\varphi(x)=f(x)$.

Or, posons $\varphi(a_n)=f(\xi_n)$, pour $n=1, 2, 3,\dots$

La fonction $\varphi(x)$ est ainsi définie pour $x\in P$. Soit maintenant x un nombre réel n'appartenant pas à P. Si $x<a$, posons $\varphi(x)=f(a)$, si $x>b$, posons $\varphi(x)=f(b)$. Si $a<x<b$, x est évidemment un point intérieur d'un intervalle (fini) contigu à P, soit (α, β). Posons $\varphi(x)=f(\alpha)$, si $x\leqslant\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, et $\varphi(x)=f(\beta)$, si $x>\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$.

On voit sans peine que les points de discontinuité de la fonction $\varphi(x)$ ne peuvent être que (peut être) les points (1) et les centres des intervalles contigus à P: Leur ensemble est donc au plus dénombrable, et $\varphi(x)$ est une fonction de classe $\leqslant 1$ sur l'ensemble de tous les nombres réels, et, à plus forte raison, sur E. Or (d'après $N\subset E$) il est évident que $\varphi(E)=f(N)=H$.

Tout ensemble analytique (linéaire) est donc une image de classe $\leqslant 1$ de l'ensemble E, d'où résulte que $\Gamma_1(E)$ contient la famille de tous les ensembles analytiques (linéaires).

Soit maintenant α un nombre ordinal positif $<\Omega$. On a évidemment (pour tout ensemble E)

(2) $$\Gamma_\alpha(E)\supset\Gamma_1(E).$$

[1]) Voir p. e. *Fund. Math.* t. X, p. 25.

Or, une image de Baire d'un ensemble analytique est toujours un ensemble analytique. En effet, soit $f(x)$ une fonction de Baire, définie sur l'ensemble analytique, E. D'après un théorème de M. Alexits [1]), il existe une fonction de Baire, $\varphi(x)$, définie pour tous les x réels, telle que $\varphi(x) = f(x)$ pour $x \epsilon E$. L'image géométrique J de la fonction (de Baire) φ (c'est-à-dire l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, tels que $y = \varphi(x)$) est, comme on sait, mesurable B [2]). Or, soit Q l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, tels que $x \epsilon E$: l'ensemble E étant analytique, Q le sera aussi. Donc, l'ensemble JQ est analytique, aussi que sa projection P sur l'axe $0Y$. Or, on voit sans peine que $P = f(E)$, ce qui prouve que $f(E)$ est un ensemble analytique.

Nous avons donc (d'après la propriété démontrée de la famille $\Gamma_1(E)$)

$$\Gamma_\alpha(E) \subset \Gamma_1(E),$$

et la formule (2) donne $\Gamma_\alpha(E) = \Gamma_1(E)$. Notre théorème est ainsi démontré.

Or, le problème se pose: *notre théorème est-il vrai pour les ensembles E linéaires quelconques?* Ce problème me parait difficile à résoudre.

1) *Fund. Math.* t. XV, p. 56 (Satz IV).
2) *Fund. Math.* t. II, p. 78, Th. III.

Sur les opérations de M. Hausdorff.

(Solution de cinq problèmes de M. Tarski).

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

F étant une famille donnée quelconque d'ensembles et N étant un ensemble donné de suites (finies ou infinies) de nombres naturels croissants $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, nous désignerons par $H_N(F)$ et nous appellerons *résultat d'opération de M. Hausdorff caractérisée par l'ensemble N et effectuée sur la famille F d'ensembles*, la famille H de tous les ensembles de la forme

$$(1) \qquad \sum_N E_{n_1} E_{n_2} E_{n_3} \ldots,$$

où E_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ sont des ensembles de la famille F, et où la sommation $\sum\limits_N$ s'étend à toutes les suites $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ constituant l'ensemble N de suites [1]).

La condition que les suites $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ soient croissantes n'est pas essentielle, puisqu'on peut remplacer toute suite infinie de nombres naturels $n_1, n_2, n_3, \ldots$ par une suite (finie ou infinie) croissante formée de tous les nombres naturels qui sont termes de la suite considérée (sans altérer le produit $E_{n_1} E_{n_2} E_{n_3} \ldots$).

Nous pouvons aussi supposer toutes les suites de N infinies, en repetant dans le cas contraire un terme une infinité de fois.

1) Cf. F. Hausdorff, *Mengenlehre*, Berlin und Leipzig 1927, p. 89 et p, 90, et W. Sierpiński, *Sur les fonctions de M. Hausdorff*, Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie XIX (1917), Classe III, p. 463. Les sommes (1) sont appelées par M. Hausdorff *δs-Funktionen*.