Sur une propriété des continus Péaniens plans.

Par

Casimir Kuratowski (Lwów).

Je me propose de donner une simple démonstration du théorème suivant:

($\mathfrak{T}$) *C étant un continu Péanien* [1], *situé sur le plan, et R une région-composante de son complémentaire, la frontière de R est un continu Péanien* [2].

La partie essentielle de la démonstration consistera à prouver un théorème général concernant les espaces Péaniens (à un nombre de dimensions arbitraire) qui contiennent des sous-continus non-Péaniens. J'en déduirai le théorème $\mathfrak{T}$ par une simple application du théorème de Jordan.

1. Appelons courbe θ une courbe composée de trois arcs $(ab)_1$, $(ab)_2$, $(ab)_3$, n'ayant deux-à-deux que les points a et b en commun. Nous établirons le lemme suivant:

Lemme. A, B, C_1, C_2, C_3 étant des continus Péaniens tels que

$$AB = 0 = C_1 C_2 = C_1 C_3 = C_2 C_3, \quad AC_i \neq 0 \neq BC_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

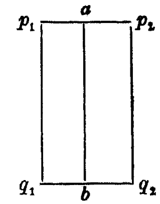
[1]) Un continu ou, plus généralement, un espace métrique est dit *Péanien* s'il est une image continue d'un intervalle.

[2]) Ce théorème fut démontré par Mlle M. Torhorst à l'aide des „Primende" de M. Carathéodory et des théorèmes de Schönflies. Voir Math. Zeitschr. IX (1921), pp. 44—65. Cf. aussi la démonstration de M. B. v. Kerékjártó (Abh. Math. Seminar Hamburg, IV, 1925, pp. 167—171), basée sur les approximations par polygones et sur la notion de „allseitige Erreichbarkeit" de Schönflies.

Une fois ce théorème démontré, on peut rendre son énoncé plus précis en prouvant que la frontière de R est une courbe *régulière* au sens de Menger (comme je l'ai fait dans une communication présentée à la Soc. Pol. de Math. Section de Lwów, le 15. VI. 1926 et M. G. T. Whyburn — indépendamment — dans Fund. Math. XII, p. 267).

il existe une courbe $\theta = (ab)_1 + (ab)_2 + (ab)_3$ telle que

$$(1) \qquad (ab)_i \subset A + C_i + B, \quad a \varepsilon A, \quad b \varepsilon B.$$



Démonstration. C_i $(i = 1, 2)$ comme continu Péanien, contient un arc simple unissant A à B; extrayons en un arc $p_i q_i$ dont seules les extrémités appartiennent à A et B respectivement. Soit $p_1 p_2$ un arc $\subset A$ et $q_1 q_2$ un arc $\subset B$. La courbe

$$K = p_1 p_2 + p_2 q_2 + q_2 q_1 + q_1 p_1$$

est évidemment une courbe simple fermée.

Unissons les arcs $p_1 p_2$ et $q_1 q_2$ dans le continu $A + C_3 + B$ par un arc, appelons le $(ab)_3$, dont seules les extrémités appartiennent à $p_1 p_2$ et à $q_1 q_2$ (resp.). La courbe $K + (ab)_3$ est bien la courbe θ demandée.

2. Théorème. *K étant un sous-continu non-Péanien d'un espace Péanien, il existe, dans cet espace, une courbe $\theta = (ab)_1 + (ab)_2 + (ab)_3$ telle que, pour $i = 1, 2, 3$, l'arc $(ab)_i$ se laisse unir à K par un continu disjoint de $(ab)_{i+1} + (ab)_{i+2}$* [1]).

Démonstration. En vertu d'une propriété fondamentale [2]) des continus non-Péaniens, il existe dans K une suite de continus disjoints K_n et deux suites convergentes de points p_n et q_n, extraits de K_n, telles que $\lim p_n \neq \lim q_n$. D'autre part, d'après une propriété des espaces Péaniens, chaque couple de points suffisamment rapprochés l'un de l'autre est situé sur un continu Péanien (même sur un arc simple) aussi petit que l'on veut.

Rien n'empêche donc de supposer que les points p_1, p_2, p_3 sont situés sur un continu Péanien A, les points q_1, q_2, q_3 sur un continu Péanien B et que

$$(2) \qquad AB = 0.$$

Remarquons, en même temps, que:

$$(3) \qquad 0 = K_1 K_2 = K_1 K_3 = K_2 K_3, \quad AK_i \neq 0 \neq BK_i \ (i = 1, 2, 3).$$

L'espace étant Péanien, il est une image uniformément continue de l'intervalle; on peut donc le décomposer en un nombre

[1]) les indices 4 et 5 sont réduits modulo 3.

[2]) Voir par ex. S. Mazurkiewicz, Fund. Math. I, p. 176, ou ma note de Fund. Math. III, p. 60.

fini de continus Péaniens aussi petits que l'on veut. En particulier, on peut admettre — en désignant respectivement par C_i, A^*, B^* la somme de ceux parmi ces „petits" continus qui ont des points communs avec K_i, A, B, — que

(4) $$A^* B^* = 0$$

(5) $$0 = C_1 C_2 = C_1 C_3 = C_2 C_3$$

(conformément aux égalités (2) et (3)).

Evidemment:

(6) $$A \subset A^*,\ B \subset B^*,\ K_i \subset C_i.$$

Considérons la courbe θ du lemme (dont les hypothèses sont réalisées en vertu de (2), (5), de l'inégalité (3) et de la dernière inclusion (6)). On a, en raison de (1) et (6): $A^*.(ab)_i \neq 0 \neq B^*.(ab)_i$. On en conclut, en tenant compte de (4), que l'arc $(ab)_i$ n'est pas contenu dans $A^* + B^*$ (car, autrement, il se décomposerait en deux ensembles fermés disjoints et non-vides) et, comme il est contenu dans $C_i + A^* + B^*$ (en vertu de (1) et (6)), il contient donc un point de l'ensemble $C_i - (A^* + B^*)$. Ce point appartient, par définition de C_i, à un „petit" continu Q tel que

(7) $$QK_i \neq 0, \quad Q \subset C_i$$

et, comme ce point n'appartient ni à A^* ni à B^*, on a (par définition de ces ensembles):

(8) $$QA = 0 = QB.$$

Nous avons construit ainsi un continu Q qui unit l'arc $(ab)_i$ au continu K (selon l'inégalité (7)). Il reste à prouver que

(9) $$Q.(ab)_{i+1} = 0 = Q.(ab)_{i+2}.$$

Or, l'inclusion (7) entraîne, en vertu de (5), l'égalité:

$$QC_{i+1} = 0 = QC_{i+2}$$

qui rapprochée de (8) et de l'inclusion (1), donne la formule (9).

3. *Démonstration du théor.* $\mathfrak{T}$.

Soient C un continu Péanien situé sur le plan, R une région-composante de son complémentaire et K la frontière de R. Supposons, par impossible, que K soit un continu non-Péanien (K est, en tout cas, un c o n t i n u, selon un théorème de M. B r o u w e r).

Considérons la courbe θ du théorème précédent. En vertu du théor. de Jordan, elle coupe le plan en 3 régions S_1, S_2, S_3; la frontière de S_i est $(ab)_i + (ab)_{i+1}$. La région R, étant disjointe de C, est située dans l'une de ces trois régions, soit dans S_1. Par conséquent

$$K \subset \overline{R} \subset \overline{S_1} = S_1 + (ab)_1 + (ab)_2.$$

On en conclut aussitôt que tout continu qui unit un point de K à un point situé en dehors de S_1, passe par $(ab)_1 + (ab)_2$. Or, l'arc $(ab)_3$ étant en dehors de S_1, on parvient à une contradiction avec le théorème précédent.

4. Remarques. I. Le théorème $\mathfrak{T}$ n'est pas valable dans l'espace à 3 dimensions.

Considérons, en effet, la surface donnée par l'équation

$$y^2 + (z - \sin \pi/x)^2 = x^2, \qquad 0 < x < 1,$$

augmentée du segment $-1, 1$ de l'axe Z et du disque $y^2 + z^2 \leqslant 1$, $x = 1$.

Le continu K, ainsi obtenu, est non-Péanien et constitue la frontière d'une région bornée R. En ajoutant à K une infinité d'arcs de longueur tendant vers 0 et situés en dehors de R, il est facile d'en obtenir un continu Péanien C; la région R est une composante du complémentaire de C, bien que sa frontière soit non-Péanienne.

II. Dans le vol. XIII de ce Journal j'ai prouvé que la surface de la sphère peut être, parmi les espaces Péaniens (ne se réduisant pas à un seul point), caractérisée par les deux propriétés suivantes: 1° aucun point n'est une coupure, 2° (théor. de J a n i s z e w s k i) si le produit de deux continus n'est pas un continu, leur somme est une coupure [1]).

La démonstration fut réduite à prouver que ces propriétés entraînent la suivante: dans tout entourage E d'un point arbitraire p il existe une région R qui contient p et dont la frontière est une courbe simple fermée.

Or, il est à remarquer que cette réduction peut être aussi effectuée par l'intermédiaire du théor. $\mathfrak{T}$ (qui lui-même fut déduit en réalité des conditions 1° et 2°, puisque le théor. de Jordan, qui y intervient est une simple conséquence [2]) de ces conditions).

En effet, on peut sans restreindre la généralité supposer que $1 - E$ (le complémentaire de E) est un continu [3]); il existe donc un continu Péanien qui est

[1]) *Une caractérisation topologique de la surface de la sphère*, p. 313.

[2]) ibid.

[3]) ibid p. 315.

une coupure entre p et $1-E$[1]). Or, en s'appuyant sur le théor. $\mathfrak{C}$ et le théor. de Janiszewski, on prouve facilement[2]) que tout continu Péanien qui est une coupure entre deux points contient une courbe simple fermée qui est aussi une coupure entre ces points. Il existe donc une courbe simple fermée S qui est une coupure entre p et $1-E$. La région-composante R de $1-S$ qui contient p est bien la région demandée, car $R(1-E)=0$, donc $R \subset E$ et selon le théor. de Jordan, S constitue la frontière de R.

[1]) ibid. p. 309, proposition A_2'.
[2]) cf. ma note de Fund. Math. VI, p. 140.

On the set of all cut points of a continuous curve.

By

G. T. Whyburn (Austin, U. S. A.).

In this paper it will be shown that as a consequence principally of the author's results on the structure of a continuous curve relative to its cyclic elements it follows that the set of all cut points of any continuous curve in a metric space is homeomorphic with a certain kind of subset of an acyclic continuous curve. It is also shown, conversely, that a subset of this kind of any acyclic continuous curve is always identically the set of all cut points of some continuous curve. Thus we obtain a complete characterization of a point set which is topologically equivalent to (i. e., homeomorphic with) the set of all cut points of a continuous curve. Incidentally, the results in this paper answer, indeed more than answer, a question raised by C. Zarankiewicz in the *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres*, 1926, p. 362.

The customary notation and terminology of point set theory will be used; $S(P, r)$ will denote the set of all points of the space whose distance from the point P is less than the number r, $\delta(M)$ denotes the diameter of the set M, $\varrho(X, Y)$ is the minimum distance between the sets X and Y, a continuous curve is a compact connected im kleinen continuum, etc. For definitions of the terms used in connection with the cyclic elements of a continuous curve the reader is referred to my paper *Concerning the structure of a continuous curve*, (American Journal of Mathematics, vol. 50, April, 1928, pp. 167—194). This paper will be referred to simply as „*Structure*".

Let W denote the universal acyclic continuous curve of Ważew-