Sur la puissance des ensembles analytiques.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

La définition la plus simple des ensembles analytiques et la suivante: *Les ensembles analytiques sont des images continues de l'ensemble de tous les nombres irrationnels* [1]. Toute la théorie des ensembles analytiques pourrait donc être développée en partant de cette définition.

Le but de cette Note est de déduire de cette définition la proposition suivante, due à M. Souslin [2].

Tout ensemble analytique non dénombrable contient un sous-ensemble parfait.

Lemme. *Soit H un ensemble linéaire, $f(x)$ — une fonction définie et continue dans H, et supposons que l'ensemble $f(H)$ est non dénombrable. Il existe alors dans tout ensemble (linéaire) ouvert $G \supset H$ deux intervalles fermés d_0 et d_1, tels que les ensembles $f(d_0 H)$ et $f(d_1 H)$ sont non dénombrables et disjoints.*

Démonstration. Faisons correspondre à chaque point y de l'ensemble $f(H)$ un et un seul point x de H, tel que $f(x)=y$: l'ensemble $f(H)$ étant non dénombrable, l'ensemble X de tous les nombres x ainsi choisis sera non dénombrable. Soient x_0 et x_1 deux

[1] Quant à l'équivalence de cette définition avec d'autres définitions des ensembles analytiques, voir p. e. mes notes dans le *Bull. Acad. Cracovie* 1918, p. 163, et *Fund. Math.* t. V, p. 159, t. X, p. 169 et t. XI, p. 16.

[2] Voir N. Lusin, C. R. t. 164, note du 8 janvier 1917. La démonstration de cette proposition a été donnée par M. Lusin en partant d'autres définitions des ensembles analytiques: voir *Fund. Math.* t. X, p. 25 et *Recueil Math. de Moscou*, t. XXXIII (1926), p. 286.

points distincts de X qui sont des points de condensation de X. Les nombres x_0 et x_1 appartenant à X, on a évidemment (d'après $x_0 \neq x_1$) $f(x_0) \neq f(x_1)$ et, la fonction $f(x)$ étant continue dans H, et x_0 et x_1 appartenant à l'ensemble ouvert G (puisque $X \subset H \subset G$), il existe deux intervalles fermés d_0 et d_1, entourant respectivement x_0 et x_1 et contenus dans G, tels que $f(d_0 H) . f(d_1 H) = 0$ (puisque, pour d_0 suffisamment petit, les nombres de $f(d_0 H)$ sont aussi voisins de $f(x_0)$ que l'on veut, et pareillement pour d_1). Or, x_0 et x_1 étant des points de condensation de X, il résulte tout de suite de la définition de X que les ensembles $f(d_0 H)$ et $f(d_2 H)$ sont non dénombrables.

Notre lemme est ainsi démontré.

Soit maintenant E un ensemble G_δ linéaire, $f(x)$ — une fonction définie et continue dans E, telle que l'ensemble $f(E)$ est non dénombrable.

L'ensemble E, en tant que G_δ, est un produit d'une suite infinie d'ensembles ouverts:

1) $$E = G_1 G_2 G_2, \dots$$

Appliquons notre lemme pour $H=E$ et $G=G_1$ et posons $\delta_0 = d_0$ et $\delta_1 = d_1$.

Soit maintenant n un nombre naturel donné et supposons que nous avons déjà défini tous les intervalles $\delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$, où $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ est une suite quelconque formée des nombres 0 et 1, de sorte qu'ils sont fermés et

(2) $$\delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \subset G_n \delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}}, \quad (\text{pour } n > 1)$$

et que les ensembles $f(\delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} E)$ sont non dénombrables et disjoints (pour deux systèmes différents de n indices $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$).

Désignons par $J(\delta)$ l'intérieur de l'intervalle δ: si l'ensemble $f(\delta E)$ est non dénombrable, l'ensemble $f(J(\delta)E)$ le sera aussi (en tant que différant de $f(\delta E)$ de deux points au plus).

$\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ étant un système donné de n indices 0 et 1, appliquons notre lemme pour $H = J(\delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}) E$ et $G = J(\delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}) G_n$ et posons

$$\delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n 0} = d_0 \quad \text{et} \quad \delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n 1} = d_1 .$$

Les intervalles $\delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$ seront ainsi définis par l'induction pour tout système fini $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ des indices 0 et 1 et, pour n donné, les ensembles $f(\delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} E)$ seront tous non dénombrables et disjoints (pour les systèmes d'indices différents), et nous aurons toujours la formule (2).

Posons

$$P = \sum \delta_{\alpha}\, \delta_{\alpha_1 \alpha_2}\, \delta_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \dots, \tag{3}$$

la sommation s'étendant à toutes les suites infinies $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots,$ formées des nombres 0 et 1. Les intervalles $\delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$ étant fermés, il résulte tout de suite de (2) et (1) que l'ensemble P est fermé et borné et contenu dans E. La fonction $f(x)$ étant continue dans E, l'ensemble $f(P)$ est donc aussi fermé.

Or, de (3) résulte que

$$f(P) = \sum f(\delta_{\alpha_1}\, \delta_{\alpha_1 \alpha_2}\, \delta_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \dots). \tag{4}$$

Je dis que l'ensemble $f(P)$ est non dénombrable. Pour le prouver, il suffira évidemment de démontrer que les termes de la série (4) sont tout non vides et sans éléments communs deux à deux.

Soit donc $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots,$ une suite infinie formée d'indices 0 et 1: d'après (2), $\delta_{\alpha_1}, \delta_{\alpha_1 \alpha_2}, \delta_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}, \dots$ est une suite infinie d'intervalles fermés contenus chacun dans le précédant, et parsuite le produit $\delta_{\alpha_1} \delta_{\alpha_1 \alpha_2} \delta_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \dots$ est non vide, donc aussi l'ensemble $f(\delta_{\alpha_1}\, \delta_{\alpha_1 \alpha_2}\, \delta_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \dots)$.

Or, soit $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$ une suite infinie d'indices 0 et 1, distincte de la suite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ Soit k le plus petit indice, tel que $\beta_k \neq \alpha_k$, p. e. $\alpha_k = 0$, $\beta_k = 1$. D'après (2) et (1) on a

$$\delta_{\alpha_1}\, \delta_{\alpha_1 \alpha_2}\, \delta_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \dots \subset E\, \delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k} = E\, \delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-1} 0}$$

$$\delta_{\beta_1}\, \delta_{\beta_1 \beta_2}\, \delta_{\beta_1 \beta_2 \beta_3} \dots \subset E\, \delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_k} = E\, \delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-1} 1};$$

or, comme nous savons, $f(E\, \delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-1} 0})\, f(E\, \delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{q-1} 1}) = 0$: on a donc

$$f(\delta_{\alpha_1}\, \delta_{\alpha_1 \alpha_2}\, \delta_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \dots) \cdot f(\delta_{\beta_1}\, \delta_{\beta_1 \beta_2}\, \delta_{\beta_1 \beta_2 \beta_3} \dots) = 0,$$

c. q. f. d.

L'ensemble $f(P)$ est donc non dénombrable et, comme fermé, contient un sous-ensemble parfait.

L'ensemble de tous les nombres irrationnels étant un G_δ, le théorème de M. Souslin est démontré.

Sur une généralisation des intégrales de M. J. Radon.

Par

Otton Nikodym (Cracovie).

Le mémoire présent contient une partie de résultats que j'ai présenté dans une communication pendant le *I Congrès des Mathématiciens des Pays Slaves* à Varsovie 1929 (septembre).

M. Fréchet [1]) a généralisé pour les ensembles abstraits la théorie de la mesure et de l'intégration de M. Radon [2]). Il envisage une famille additive $\mathcal{F}$ d'ensembles [3]) et, en considérant comme „mesure" une fonction (fixe mais arbitraire d'ailleurs) additive [4]) $\psi(E)$ d'ensembles de $\mathcal{F}$, il donne l'esquisse d'une théorie d'intégration analogue à celle de M. Lebesgue.

Je préfère de construire la même théorie d'intégration sur la notion du *corps d'ensembles*. J'entend par là toute famille non vide $\mathcal{K}$ de sous-ensembles d'une variété *1* (dont les éléments sont des objets quelconques) jouissant de deux propriétés suivantes [5]):

[1]) *Sur l'intégrale d'une fonctionnelle étendue à un ensemble abstrait. Bull. de la Soc. Math. de France 1915.* t. XLIII.

[2]) J. Radon. *Theorie u. Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen. Sitzber, der Math.-Naturwiss. Klasse der Kais. Akademie der Wiss.* Wien 1913. 112 Bd. Abt II a/2.

[3]) C'est-à-dire: 1° si $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ appartiennent à $\mathcal{F}$, leur somme y appartient aussi, 2° si E_1, E_2 appartiennent à $\mathcal{F}$, il y en est de même pour $E_1 - E_2$. La famille $\mathcal{F}$ est donc „close" par rapport à l'addition dénombrable et par rapport à la soustraction d'ensembles.

[4]) Ça veut dire que, si E_n $(n = 1, 2, \dots)$ sont des ensembles disjoints de $\mathcal{F}$, on a $\psi(E_1 + E_2 + \dots) = \psi(E_1) + \psi(E_2) + \dots$ Je m'exprime: „parfaitement additive".

[5]) De telles familles se trouvent dans le travail de M. Sierpiński. *Un théorème général sur les familles d'ensembles. Fund. Math.* t. XII. 1928, p. 206. Elles se trouvent aussi chez M. Radon l. c.

Le mot „corps d'ensembles" est employé par M. H. Hahn dans sa *„Theorie der reellen Funktionen I Bd."* p. 293 et p. 394, mais dans le sens différent.