# Sur une hypothèse de M. Borel.

Par

Edward Szpilrajn (Varsovie).

Nous considérons dans cette Note des ensembles linéaires qui satisfont à la condition ($C$) suivante:

($C$) Quel que soit la suite infinie $\{a_n\}$ de nombres positifs, il existe une suite infinie $\{\delta_n\}$ d'intervalles recouvrant l'ensemble donné et telle que la longueur de l'intervalle $\delta_n$ est $a_n$ pour $n = 1, 2 \ldots$

Ce sont les mêmes ensembles que M. Borel dans son Mémoire *Sur la classification des ensembles de mesure nulle* [1]) appelle „ensembles qui ont une mesure asymptotique inférieure à toute série donnée à l'avance". M. Borel y écrit comme il suit:

„Un ensemble énumérable a une mesure asymptotique inférieure à toute série donnée à l'avance — la reciproque me paraît exacte, mais je n'en possède pas de démonstration entièrement satisfaisante" [2]).

Le but de cette Note est de démontrer que *l'hypothèse de M. Borel est vraie pour les ensembles mesurables* ($B$) et, plus généralement, pour les ensembles analytiques.

Nous prouverons que *tout ensemble satisfaisant à la condition* ($C$) *est totalement imparfait* (c'est-à-dire ne contient aucun sous-ensemble parfait). Tout ensemble analytique totalement imparfait étant au plus dénombrable [3]), il en résultera tout de suite notre proposition.

[1]) *Bulletin de la Société mathématique de France* t. XLVII, 1919, p. 1. Ce Mémoire se trouve aussi dans le livre de M. Borel: *Méthodes et problèmes de Théorie des Fonctions*, Paris 1922, p. 38.

[2]) *Méthodes et problèmes*, p. 64.

[3]) Voir p. e. N. Lusin, *Fund. Math.* t. X, p. 25.



**Lemme.** La propriété ($C$) est un invariant des transformations par des fonctions continues sur la droite.

Démonstration. Soit $E$ un ensemble situé dans un intervalle borné $I$. Soit $f(x)$ une fonction réelle continue sur la droite et $\{a_n\}$ une suite infinie arbitraire de nombres positifs. La fonction $f(x)$ étant *uniformément* continue sur $I$, il existe une suite $\{b_n\}$ de nombres positifs telle que l'inégalité

$$|x_1 - x_2| < b_n$$

entraîne (pour tous les points $x_1$ et $x_2$ situés dans $I$)

$$|f(x_1) - f(x_2)| < a_n. \tag{1}$$

L'ensemble $E$ satisfaisant par l'hypothèse à la condition ($C$), il existe une suite $\{\delta_n\}$ d'intervalles recouvrant $E$, située dans $I$ et telle que la longueur de $\delta_n$ est $b_n$ ($n = 1, 2, \ldots$). Par conséquent on peut recouvrir $f(E)$ [1]) — en vertu de (1) — par une suite $\{\Delta_n\}$ d'intervalles de longueurs $\{a_n\}$. L'ensemble $f(E)$ satisfait donc à la condition ($C$).

L'extension de notre démonstration aux ensembles non bornés ne présente aucune difficulté, car la somme d'une suite infinie d'ensembles qui satisfont à la condition ($C$) — lui satisfait aussi. Notre lemme est donc établi.

Soit à présent $Z$ un ensemble linéaire contenant un sous-ensemble parfait $P$. Il existe, comme on sait, une fonction $\varphi(x)$ continue sur la droite et telle que l'ensemble $\varphi(P)$ est de mesure positive et par conséquent l'ensemble $\varphi(Z) \supset \varphi(P)$ ne satisfait pas à la condition ($C$). Il résulte donc de notre lemme que l'ensemble $Z$ ne lui satisfait non plus.

Notre assertion est ainsi démontrée.

Le problème si l'hypothèse de M. Borel est vraie pour les ensembles quelconques reste ouvert. Or, M. Sierpiński a démontré en 1928 [2]) que l'hypothèse de M. Borel est incompatible avec l'hypothèse de Cantor (que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$).

[1]) Nous désignons par $f(E)$ l'ensemble de tous les points $f(p)$ tels que $p \in E$.

[2]) *Fund. Math.* t. XI, p. 304.