Ueber topologisch homogene Kontinua.

Von

D. van Dantzig (Rotterdam).

§ 1. Einleitung.

1. Der Begriff der topologischen Homogenität lässt sich in mannigfacher Weise fassen:

a. Eine Punktmenge M heisse *mikrohomogen*, wenn es zu je zwei ihrer Punkte x und y je eine ihrer Umgebungen $U(x)$ bzw. $U(y)$ gibt, die sich solcherweise topologisch auf einander abbilden lassen, dass sich x und y gegenseitig entsprechen.

b. Eine Punktmenge M heisse (topologisch) *homogen*, wenn es zu je zwei ihrer Punkte x und y eine topologische Transformation von M in sich gibt, die x in y überführt [1]), anders gesagt: wenn die Gruppe aller topologischen Transformationen von M in sich über M *transitiv* ist.

c. Eine Punktmenge M heisse *bihomogen*, wenn es zu je zwei ihrer Punkte x und y eine topologische Transformation von M in sich gibt, die x und y vertauscht [2]).

d. Eine Punktmenge M heisse *involutorisch homogen*, wenn es zu je zwei ihrer Punkte x und y eine involutorische Transformation von M in sich gibt, die x und y vertauscht. Dabei heisst eine topologische Transformation *involutorisch*, falls das Bild des Bildes eines beliebigen Punktes z mit z zusammenfällt [3]).

[1]) Die Definition stammt von W. Sierpiński, *Sur une propriété topologique des ensembles dénombrables denses en soi*, Fund. Math. **1** (1920) 11—16.

[2]) Vgl. C. Kuratowski, *Un problème sur les ensembles homogènes*. Fund. Math. **3** (1922) 14—19.

[3]) Diese Homogenitätsbegriffe lassen sich noch verschiedentlich feiner abstufen. Z. B. kann man eine Punktmenge M „fasthomogen" nennen, wenn zu irgend zwei Punkte x und y einer festen, in M dichten Teilmenge N von M eine topologische Transformation von M in sich existiert, die x in y überführt. Auch lässt sich z. B. die Mikrohomogenität einerseits dadurch verschärfen, dass die sämtlichen Umgebungen $U(x)$ homöomorph mit einer *selben* (homogenen) Punktmenge sein sollen („gleichmässig mikrohomogen"), andererseits dadurch abschwächen, dass man zu je zwei Punkten x und y nur die Existenz von zwei homöomorphen Umgebungen $U(x)$ und $U(y)$ fordert, ohne dass sich x und y bei der Abbildung von $U(x)$ auf $U(y)$ zu entsprechen brauchen („fastmikrohomogen"); drittens kann man sowohl die Abschwächung als die Verschärfung vornehmen („gleichmässig fastmikrohomogen"). Der letzte Fall umfasst eine grosse Klasse von Mengen, zu der z. B. die verschiedenen Universalkurven von Sierpiński und von Menger gehören.

Schliesslich lässt sich z. B. der Homogenitätsbegriff dahin verschärfen, dass man fordert, dass je k beliebige verschiedene Punkte $x_1, \ldots, x_k$ der Reihe nach in je k andere beliebige verschiedene Punkte $y_1, \ldots, y_k$ übergeführt werden können („k-fach homogen"). Diese Eigenschaft kommt der n-adischen Solenoide (Vgl. § 2) nur für $k=1$ zu, der offenen Strecke nur für $k \leqq 2$, dem Kreise nur für $k \leqq 3$, allen Mannigfaltigkeiten deren Dimension $\geqq 2$ ist aber für beliebiges endliches k. Entsprechende Erweiterungen lassen sich für Bihomogenität und involutorische Homogenität, sowie für die metrischen Homogenitätsbegriffe formulieren.

Offenbar schliesst jede dieser Eigenschaften die vorangehenden ein. Die sonstigen logischen Relationen zwischen diesen vier Eigenschaften sind noch nicht vollständig bekannt. Wohl hat Kuratowski [4]) ein Beispiel einer (zwar nicht abgeschlossenen) ebenen Menge gegeben, die homogen, aber nicht bihomogen ist. Weiter ist klar, dass die Vereinigung einer Kugelfläche und einer dazu fremden Torusfläche eine Punktmenge ergibt, die mikrohomogen, aber nicht homogen ist.

2. Eine (zusammenhängende) r-dimensionale Mannigfaltigkeit ${}^rM$ besitzt die drei erstgenannten Eigenschaften [5]). Dies geht unmittelbar daraus hervor, dass sich zu je zwei Punkten x und $y \varepsilon {}^rM$ [6]) eine r-dimensionale Kugel ${}^rK$ angeben lässt, die x und y als innere Punkte enthält, und dass es eine topologische Transformation von ${}^rK$ in sich gibt, die x und y vertauscht und jeden Punkt der Be-

[4]) L. c. [2]).

[5]) Eine „r-dimensionale Mannigfaltigkeit" wird hier immer als simplizial zerlegbar vorausgesetzt. Überdies wird angenommen, dass ${}^rM$ *unberandet* und *zusammenhängend* ist.

[6]) Wir benutzen das Peanosche Symbol ε für den Ausdruck „(ist) Element von", sowie die Bezeichung $\{x\}_{E(x)}$ für „alle Elemente x, die die Eigenschaft $E(x)$ besitzen".

grenzung von ${}^rK$ invariant lässt. Die Frage, ob eine jede Mannigfaltigkeit involutorisch homogen ist oder nicht, ist noch unentschieden [7]).

3. Es lässt sich jetzt die Frage stellen, ob es möglich ist, die Mannigfaltigkeiten durch ihre Homogenitätseigenschaften zu charakterisieren. Dass jedenfalls noch andere Eigenschaften hinzutreten müssen, lässt sich unmittelbar an dem Beispiel der Cantorschen nulldimensionalen Menge erkennen, die involutorisch homogen, aber keine Mannigfaltigkeit ist. Mit der Frage, welche diese additionnellen Eigenschaften sein sollen, wird ein weiter Problemkreis eröffnet, zu dem Anhaltspunkte kaum noch vorliegen. Zwar hat Mazurkiewicz [8]) gezeigt, dass eine homogene beschränkte [9]) im kleinen zusammenhängende [10]) ebene Kurve eine Mannigfaltigkeit (nämlich topologisches Bild des Kreises) ist, aber seine Beweismethode lässt sich ohne weiteres weder auf ebensolche Raumkurven, noch auf beliebige ebene Kurven ausdehnen.

Wir verschärfen daher die Problemstellung und fragen, ob die zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten vielleicht unter den *im kleinen kompakten* [11]) *zusammenhängenden* Räumen durch ihre Homogenitätseigenschaften ausgezeichnet sind.

4. In der vorliegenden Note werde ich zeigen, dass auch diese Frage zu verneinen ist. Zu diesem Zweck werde ich für jede natürliche Zahl n eine (kompakte) Kurve Σ_n konstruieren (§ 2, 7), die ich, ihrer anschaulichen Gestalt wegen, die n-adische *Solenoide* nennen möchte.

Diese Kurve genügt den schärfsten Homogenitätsforderungen, ohne aber eine Mannigfaltigkeit zu sein. Und zwar ist sie involutorisch homogen, nicht nur im oben definierten topologischen, sondern

[7]) Insbesondere ist es mir nicht gelungen, zu entscheiden, ob z. B. die ${}^3R$ nach Weglassung einer Kleeblattschlinge involutorisch homogen bleibt.

[8]) S. Mazurkiewicz, *Sur les continus homogènes*, Fund. Math. 5 (1924) 137—147.

[9]) Diese Einschränkung ist unwesentlich.

[10]) Eine Menge ist bekanntlich *im kleinen zusammenhängend*, falls zu jedem ihrer Punkte beliebig kleine zusammenhängende Umgebungen existieren.

[11]) Eine Menge heisst *im kleinen kompakt*, falls zu jedem ihrer Punkte eine Umgebung existiert, deren abgeschlossene Hülle *kompakt* ist, d. h. zu jeder unendliche Folge von in ihr enthaltenen Punkten mindestens einen Grenzpunkt enthält.

sogar im metrischen Sinne. Letzterer Begriff stützt sich auf die folgende Definition.

5. Eine Punktmenge M heisse *homogen-metrisierbar*, falls sich zu ihren Punktepaaren eine solche, den bekannten Fréchet-Hausdorfschen Bedingungen genügende Entfernungsfunktion definieren lässt, dass zu je zwei ihrer Punkten x und y eine *isometrische*, (d. h. *ein-eindeutige* und *sämtliche Entfernungen invariant lassende*) Transformation von M in sich existiert, die x in y überführt [12]).

Ganz entsprechend definiert man die Begriffe: *mikrohomogen-*, *bihomogen-* und *involutorisch homogen metrisierbar.*

6. Eine homogen-metrisierbare Menge ist offenbar topologisch homogen. Man könnte vielleicht erwarten, dass auch umgekehrt eine topologisch homogene Menge, falls sie überhaupt metrisierbar ist, auch homogen-metrisierbar wäre. Dies ist aber keineswegs der Fall: es gibt sogar schon zweidimensionale *Mannigfaltigkeiten*, die nicht homogen-metrisierbar sind. Von den geschlossenen Flächen sind nämlich nur die Kugel, der Torus und die projektive Ebene homogen-metrisierbar, von den offenen Flächen nur die Euklidische Ebene, die Zylinderfläche (= Kreisring) und das Möbiusband [13]). Um so merkwürdiger ist es, dass die Solenoiden diese Eigenschaft, sogar im schärfsten Sinne, besitzen. (Vgl. § 4, **23**).

7. Obwohl die n-adische Solenoide für $n \geqq 2$ weder eben noch im kleinen zusammenhängend ist, lässt sie sich sowohl geometrisch als analytisch durchaus einfach behandeln, im letzten Fall am besten mit Hilfe der Henselschen n-adischen Zahlen [14]). Ihre Homogenitätseigenschaften beruhen wesentlich auf der Tatsache, dass sie Gruppenbild ist.

Die Frage, ob vielleicht die Solenoiden für $n \geqq 2$ alle untereinander homöomorph sind, wird in § 6 beantwortet, und zwar in verneinendem Sinne: Es gibt abzählbar unendlich viele paarweise verschiedene Solenoiden. Insbesondere reiht sich für $n = 1$ der

[12]) Dieser Begriff kommt schon bei P. Urysohn vor, *Sur un espace métrique universel*, Comptes Rendus, **180** (1925) 803—805.

[13]) Vgl. D. van Dantzig & B. L. van der Waerden, *Ueber metrisch homogene Räume*, Abh. aus dem Math. Seminar Hamburg, 6 (1928) 367—376.

[14]) K. Hensel, *Zahlentheorie*, Berlin & Leipzig, (1913), Kap. 3 und 4.

Kreis als „monadische Solenoide“ dieser Klasse von Kurven ein. Gleichzeitig lässt sich die Gruppe aller topologischen Transformationen von Σ_n in sich, sowie die Gesamtheit aller eindeutigen stetigen und aller topologischen Abbildungen von Σ_n auf Σ_m bestimmen (insofern solche überhaupt existieren). Insbesondere stellt sich dabei heraus, dass die Deformationen von Σ_n in sich von einer speziellen Klasse fastperiodischer Funktionen [15]) abhängen.

8. Die Ergebnisse dieser Arbeit dürften vielleicht wegen der merkwürdigen in ihr klargelegten Beziehungen zwischen topologischen, algebraischen (n-adische Zahlen) und funktionentheoretischen (fastperiodische Funktionen) Verhältnissen von etwas allgemeinerem methodischem Interesse sein als aus ihrem Ausgangspunkt hervorgeht.

§ 2. Definition der n-adischen Solenoide.

9. Von der n-adischen Solenoide liegen für $n = 2$ zwei verschiedene anschauliche Konstruktionen vor, die beide zwecks Untersuchung der Zusammenhangsverhältnisse aufgestellt worden sind, ohne dass bisher die Homöomorphie der beiden Punktmengen, ihr Zusammenhang mit den n-adischen Zahlen oder ihre Homogenitätseigenschaften bemerkt wurden.

10. Es sei T_0 ein Torus, der eine jede Meridianhalbebene E in einem Kreis ${}_EK$ mit Mittelpunkt ${}_EM$ und Radius $= 1$ schneidet. Sodann sei T_1 ein sich im Inneren von T_0 n-mal herumwindender Torusschlauch. Und zwar möge er jede Meridianhalbebene E in genau n Kreisen ${}_EK_0, {}_EK_1, \dots, {}_EK_{n-1}$ schneiden, deren Radien je $= \frac{1}{2n}$ sind, und deren Mittelpunkte ${}_EM_0, {}_EM_1, \dots, {}_EM_{n-1}$ ein regelmässiges, mit ${}_EK$ konzentrisches n-Eck mit Seitenlänge $= \sin\frac{\pi}{n}$ bilden, das während einer vollen Drehung von E eine Drehung um seinen Mittelpunkt über den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ bzgl. eines mit E mitbewegten Koordinatensystems vollführt. Allgemein sei T_ν ein Torusschlauch, der eine jede Halbebene E in n^ν Kreisen ${}_EK_{x_0,\dots,x_{\nu-1}}$ $(x_i = 0, 1, \dots, n-1)$

[15]) Vgl. z. B. H. Bohr, *Fastperiodische Funktionen*, Jahresberichte der D. M. V., 34 (1925) 25—41.

schneidet, die je einen Radius $= (2n)^{-\nu}$ haben und von deren Mittelpunkten ${}_EM_{x_0,\dots,x_{\nu-1}}$ je n (mit denselben $\nu - 1$ ersten Indizes) ein regelmässiges, mit ${}_EK_{x_0,\dots,x_{\nu-1}}$ konzentrisches, n-Eck mit Seitenlänge $= (2n)^{-\nu+1}\sin\frac{\pi}{n}$ bilden, das während einer vollen Drehung von E, abgesehen von der Bewegung von ${}_EK_{x_0,\dots,x_{\nu-1}}$, an der es teilnimmt, eine Relativdrehung um seinen Mittelpunkt über den Winkel $2\pi n^{-\nu}$ vollführt.

Der Durchschnitt aller dieser Mengen T_ν ist die n-adische Solenoide Σ_n. Als Durchschnitt kompakter zusammenhängender Mengen ist sie offenbar selbst auch kompakt und zusammenhängend [16]) [17]).

11. Wir können diese anschauliche Konstruktion folgendermassen der analytischen Behandlung zugänglich machen.

Für die Kennzeichnung eines beliebigen Punktes von Σ_n muss man angeben: erstens eine beliebige Meridianhalbebene E, zweitens eine Folge von Kreisen ${}_EK_{x_0,\dots,x_\nu}$, von denen ein jeder in dem vorangehenden enthalten ist, d. h. mit ihm die Indizes $x_0, \dots, x_{\nu-1}$ gemeinsam hat. Anders gesagt: erstens eine beliebige reelle Zahl ξ zwischen 0 und 1, zweitens eine beliebige Folge $x = x_0\, x_1\, x_2 \dots$ von Zahlen $0, 1, \dots, n-1$. Die Beziehung wird eineindeutig, wenn man den Punkt $(x, 0)$ mit $(x', 1)$ identifiziert, wo

$$x'_\nu = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leqq \nu \leqq k-1, \\ x_k + 1 & \text{für } \nu = k, \\ x_\nu & \text{für } \nu \geqq k+1 \end{cases} \tag{1.α}$$

ist für

$$x_\nu \begin{cases} = n-1 & \text{für } 0 \leqq \nu \leqq k-1, \\ < n-1 & \text{für } \nu = k \end{cases} \tag{2.α}$$

[16]) Aus dieser Konstruktion geht sofort hervor, dass die Solenoide eine eingliedrige Gruppe von „Drehungen“ gestattet. Diese Gruppe ist aber nicht *über die Gruppe transitiv* (d. h. führt einen beliebigen Punkt nicht in jeden anderen über), und reicht folglich für die Homogenität nicht hin. Vgl. auch § 8, 46.

[17]) Man kann auch die Folge der Potenzen n^ν durch irgendeine Folge von Produkten $b_\nu = \prod_{i=1}^{\nu} n_i$ ersetzen (also für T_ν einen Torusschlauch nehmen, der sich n_ν-mal im Inneren von $T_{\nu-1}$ herumwindet), und erhält so eine „b_ν-adische Solenoide“. Die algebraische Behandlung dieser Kurven erfordert aber eine neue Art von „Zahlen“, die eine Erweiterung, sowohl von den Henselschen n-adischen Zahlen, als von den Prüfer- von Neumannschen „idealen Zahlen“ bilden, und wird hier deswegen unterdrückt. Vgl. meine demnachst zu veröffentlichende Arbeit „*Ueber abstrakte* $\mathfrak{b}_\nu$*-adische Ringe*“.

und

(1.β) $$x'_\nu = \begin{cases} x_0 + 1 & \text{für } \nu = 0 \\ x_\nu & \text{für } \nu \geqq 1 \end{cases}$$

für

(2.β) $$x_0 < n - 1.$$

Ein Umgebungssystem für Σ_n kann folgendermassen gegeben werden: eine beliebige positive Zahl ε und eine beliebige natürliche Zahl k bestimmen zu einem beliebigen Punkt (x, ξ) von Σ_n eine Umgebung, die aus allen Punkten (y, η) besteht, die für $0 < \xi < 1$ den Bedingungen

(3.α) $$|\xi - \eta| < \varepsilon, \quad 0 < \eta < 1$$

(3.β) $$y_i = x_i, \quad i = 0, 1, \ldots, k$$

und für $\xi = 1$ entweder den Bedingungen

(4.α) $$1 - \varepsilon < \eta \leqq 1,$$

(4.β) $$y_i = x_i, \quad i = 0, 1, \ldots, k$$

oder den Bedingungen

(4.γ) $$0 \leqq \eta < \varepsilon$$

(4.δ) $$y_i = x'_i, \quad i = 0, 1, \ldots, k$$

genügen.

12. Setzt man

(5) $$x = \sum_{\nu=0}^{\infty} 2 x_\nu (2n-1)^{-\nu-1},$$

so konvergiert die Reihe im rechten Glied für jede Folge x_ν; die Menge aller Folgen x_ν lässt sich also ein-eindeutig, und, weil die Relativumgebungen der Menge der reellen Zahlen (5) durch (3.β) gegeben sind, auch beiderseits stetig, auf eine Menge reeller Zahlen abbilden, die sich für $n \geqq 2$ leicht als die Cantorsche perfekte nirgends dichte lineare Menge herausstellt. Die Solenoide entsteht also für $n \geqq 2$ auch durch die obendefinierte Identifikation (1), (2) als eindeutiges stetiges Bild einer Cantorschen Menge von Strecken von der Länge 1; dies ist aber genau die von Vietoris [18]) für $n = 2$ definierte Menge.

[18]) L. Vietoris, *Ueber den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen*, Math. Ann. **97** (1927) 454–472. Die dort gegebene und meine ursprüngliche Konstruktion (die unabhängig von einander gefunden wurden) stimmen im wesentlichen überein.

13. Die in **11.** eingeführten Umgebungen sind für $n \geqq 2$ und genügend kleines ε homöomorph mit dem topologischen Produkte [19]) der Cantorschen Menge und der offenen Strecke. Daraus geht folgendes hervor:

A. Die Begrenzung einer solchen Umgebung ist die Summe von zwei Cantorschen Mengen, also selbst eine Cantorsche Menge. Die Dimension der Solenoide im Sinne der Menger-Urysohnschen Dimensionstheorie [20]) ist also $\leqq 1$. Weil die Solenoide ein Kontinuum ist, kann ihre Dimension nicht < 1 sein, folglich ist die Solenoide genau eindimensional [21]), also eine Kurve [22]).

B. Die Solenoide ist für $n > 1$ nicht im kleinen zusammenhängend, insbesondere also keine Mannigfaltigkeit.

C. Für $n > 1$ hat jeder Punkt die Ordnung [23]) c des Kontinuums.

D. Die Solenoide ist mikrohomogen. Dies geht unmittelbar aus der Homogenität des topologischen Produktes der offenen Strecke und der Cantorschen Menge hervor, die, auf Grund des in § 5 zu beweisenden Satzes, eine direkte Folge der Homogenität der beiden Faktormengen ist.

Es gilt also der

Satz 1. *Die n-adische Solenoide ist eine mikrohomogene kompakte zusammenhängende eindimensionale Menge, die für $n > 1$ nicht im kleinen zusammenhängend, also keine Mannigfaltigkeit ist.*

§ 3. Topologische Gruppen und n-adische Zahlen.

14. Dem Beweise der weiteren Homogenitätseigenschaften der Solenoide schicken wir einige topologisch-algebraische Bemerkungen allgemeiner Art voraus.

[19]) Vgl. § 6, **31** vom Text.

[20]) Vgl. z. B. P. Urysohn, *Mémoire sur les multiplicités cantoriennes*, Fund. Math. **7** (1925) 29–137, **8** (1926) 225–351; K. Menger, *Bericht über die Dimensionstheorie*, Jahresberichte der D. M. V. **35** (1926) 114–150.

[21]) Auch ihre Dimension im Sinne Alexandroff's ist gleich Eins. Vgl. P. Alexandroff, *Untersuchungen über Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen beliebiger Dimension*, Annals of Math. (2) **30** (1928) 101–187.

[22]) Eine *Kurve* ist eine kompakte, zusammenhängende eindimensionale Punktmenge. Vgl. K. Menger, *Grundzüge einer Theorie der Kurven*, Math. Ann. **95** (1925) 277–306.

[23]) D. h. die Begrenzung einer jeden hinreichend kleinen Umgebung hat die Mächtigkeit des Kontinuums. Vgl. l. c. [22]), S. 298.

Eine *topologische Gruppe* [24]) ist eine Gruppe $\mathfrak{G}$, deren Elementen gewisse, Umgebungen genannte, Teilmengen von $\mathfrak{G}$ zugeordnet sind, die erstens den Hausdorfschen Umgebungsaxiomen genügen, während zweitens x^{-1} und xy stetige Funktionen ihrer Argumente sind:

(6) $$(\lim x_\nu)^{-1} = \lim x_\nu^{-1}$$

$$\lim x_\nu \,.\, \lim y_\nu = \lim x_\nu y_\nu \text{ }^{25}).$$

Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn zu je drei Elementen a, b und c von $\mathfrak{G}$ und zu jeder Umgebung $U(a\,b^{-1}\,c)$ drei solche Umgebungen $U(a)$, $U(b)$ und $U(c)$ existieren, dass $U(a\,b^{-1}\,c)$ in

$$U(a)\,.\,\{U(b)\}^{-1}\,.\,U(c) = \{x\,y^{-1}\,z\}_{x\varepsilon U(a),\; y\varepsilon U(b),\; z\varepsilon U(c)}$$

enthalten ist.

15. Eine *metrische Gruppe* ist eine Gruppe $\mathfrak{G}$, zu deren Elementepaaren eine den bekannten Bedingungen genügende Entfernungsfunktion $\varrho(x, y)$ definiert ist, solchermassen, dass für je drei Elemente $x, y, z \;\varepsilon\, \mathfrak{G}$ die folgenden Beziehungen erfüllt sind:

(7) $$\varrho(xz, yz) = \varrho(zx, zy) = \varrho(x, y).$$

Insbesondere gilt dann auch:

(8) $$\varrho(x^{-1}, y^{-1}) = \varrho(x, y).$$

Setzt man

(9) $$\varphi(x) = \varrho(x, e) = \varrho(e, x),$$

[24]) Der Begriff der topologischen Gruppe stimmt im wesentlichen mit dem von O. Schreier eingeführten Begriff der Limesgruppe überein. Vgl. O. Schreier, *Abstrakte kontinuierliche Gruppen*, Abh. aus dem Math. Seminar Hamburg, **4** (1925) 15—32.

Damit eine Limesgruppe eine topologische Gruppe ist, ist notwendig und hinreichend, dass ihre Limesrelationen den beiden von P. Urysohn, *Sur la classe (L) de M. Fréchet*, l'Enseignement Mathématique, **15** (1926) 77—83, aufgestellten Bedingungen genügen.

[25]) Gleichheitsbeziehungen zwischen limites sind meistens so gemeint, dass die Existenz der limes im rechten Glied behauptet wird, unter Voraussetzung der Existenz der limites im linken Glied.

Mit $\lambda, \mu, \ldots, \varrho, \sigma, \ldots$ sind immer *variable* Indizes gemeint, die fast alle (also alle bis auf endlich viele) natürliche Zahlen durchlaufen. Dagegen bezeichnen $m, n, \ldots, r, s, \ldots$ immer *feste* natürliche Zahlen. Wenn nicht ausdrücklich der Gegenteil gesagt wird, variieren *verschiedene* griechische Indizes immer unabhängig von einander.

wo e das Einheitselement der Gruppe ist, dann genügt $\varphi(x)$ den Bedingungen

(10) $$\begin{cases} \varphi(x^{-1}) = \varphi(x), \\ \varphi(xy) = \varphi(yx), \\ \varphi(e) = 0, \\ \varphi(x) > 0 \text{ für } x \neq e, \\ \varphi(x) + \varphi(y) \geqq \varphi(xy), \end{cases}$$

die anderseits auch hinreichen um mittels der Entfernungen

(11) $$\varrho(x, y) = \varphi(x\,y^{-1})$$

eine Metrisierung der Gruppe zu erzeugen.

16. ***Satz 2.*** ***Eine topologische bzw. metrische Gruppe ist in topologischem bzw. metrischem Sinne bihomogen.***

Beweis. Es seien a und b zwei beliebig gegebene Elemente der Gruppe; die Transformation

$$x \to x' = a\,x^{-1}\,b$$

ist eineindeutig und beiderseits stetig; im metrischen Falle ist wegen (10), (11):

$$\varrho(x', y') = \varrho(a x^{-1} b,\; a y^{-1} b) = \varrho(x, y),$$

und es ist $a' = b$ und $b' = a$.

Korollar. Eine *kommutative* topologische bzw. metrische Gruppe ist in topologischem bzw. metrischem Sinne *involutorisch* homogen. Es ist nämlich

$$(x')' = a(a x^{-1} b)^{-1}\, b = a b^{-1}\, x\, a^{-1}\, b = x,$$

falls die Gruppe kommutativ ist.

17. Eine wichtige Klasse metrischer Gruppen erhalten wir durch Einführung der ganzen rationalen Henselschen *n-adischen Zahlen* [14]), die wir, unserem Zweck ensprechend, am einfachsten auf folgende Weise einführen.

Wir betrachten die Menge der ganzen rationalen Zahlen als kommutative Gruppe, indem wir die Addition als Gruppenoperation wählen, und wollen sie als solche metrisieren. Und zwar wählen wir als metrisierende Funktion nicht die übliche

$$\varphi(x) = |x|,$$

sondern

(12) $$\varphi(x)=\begin{cases}0 & \text{für } x=0,\\ \alpha_k & \text{für } x\equiv 0\ (n^k)\not\equiv 0\quad (n^{k+1}),\end{cases}$$

wo die α_ν irgendeine monoton abnehmende, nach Null konvergente Folge positiver Zahlen mit $\alpha_0\leqq 1$ bilden.

Die k-te Umgebung $U_k(x)$ irgend eines Punktes x ist also die Restklasse von x modulo n^{k+1} und hat sowohl den „Radius" als den „Durchmesser" $=\alpha_k$.

Man verifiziert leicht, dass die Funktion $\varphi(x)$ den („ins Additive übersetzten") Bedingungen (10) genügt. Die so erhaltene metrische Gruppe wollen wir mit $\mathfrak{P}_n$ bezeichnen.

18. Der in solcher Weise erhaltene metrische Raum ist nicht vollständig [26]; nimmt man aber alle Restklassenschachtelungen, d. s. Umgebungsfolgen $U_\nu(c_\nu)$, die der Bedingung

$$U_{\nu+1}(c_{\nu+1})\subset U_\nu(c_\nu),$$

oder, was dasselbe ist,

(13) $$c_{\nu+1}\equiv c_\nu\quad (n^{\nu+1}),$$

genügen, hinzu, so ist die erweiterte Punktmenge vollständig. Weil eine jede solche Restklasse eindeutig eine kleinste nichtnegative Zahl

(14) $$s_\nu\equiv c_\nu\quad (n^{\nu+1}),\quad 0\leqq s_\nu<n^{\nu+1}$$

bestimmt, kann man diese anstatt c_ν wählen. Setzt man dann

(15) $$x_\nu=\frac{s_\nu-s_{\nu-1}}{n^\nu},\quad x_0=s_0,$$

so wird

(16) $$s_\nu=x_0+x_1 n+x_2 n^2+\ldots+x_\nu n^\nu,$$

und die Punkte der erweiterten Menge korrespondieren eineindeutig mit den (ganzen rationalen) n-adischen Zahlen, d. s. die formellen Potenzreihen

[26] Ein metrischer Raum heisst bekanntlich *vollständig*, wenn eine jede Punktfolge x_ν, die dem Konvergenzkriterium Cauchy's

$$\lim \varrho(x_\mu, x_\nu)=0$$

(vgl. den Schluss von Fussnote [25]) genügt, nach einem Punkte des Raumes konvergiert.

(17) $$x=\sum_{\nu=0}^{\infty} x_\nu n^\nu,$$

wo die x_ν irgend eine Folge von Zahlen $0, 1, \ldots, n-1$ bilden [27].

19. Sind $x=\Sigma x_\nu n^\nu$ und $y=\Sigma y_\nu n^\nu$ zwei n-adische Zahlen, s_ν und t_ν die zugehörigen Folgen von Partialsummen, so ist

$$(s_{\nu+1}+t_{\nu+1})-(s_\nu+t_\nu)\equiv 0\quad (n^{\nu+1}),$$

Die Folge $s_\nu+t_\nu$ bestimmt also eindeutig eine n-adische Zahl, die mit $x+y$ bezeichnet wird.

Die Entfernung von x und y ist

(18) $$\varrho(x,y)=\varphi(x-y)=\alpha_i,\quad \text{für}\quad x-y\equiv 0\quad (n^i)\not\equiv 0\quad (n^{i+1})$$

wo also i die kleinste Zahl ist, für die $x_i\neq y_i$ ist. Man verifiziert leicht, dass die n-adischen Zahlen bzgl. dieser Metrik eine metrische Gruppe bilden, die wir die *n-adische Gruppe* nennen und mit $\mathfrak{P}_n$ bezeichnen wollen. Weil die durch (18) definierten Umgebungen für die Zahlenfolgen $x_0\, x_1\, x_2\ldots$ mit (3.β) übereinstimmen, ist nach dem Korollar zu **16.** die n-adische Gruppe *mit der Cantorschen Menge homöomorph*, sodass wir bewiesen haben:

Satz 3. *Die Cantorsche Menge ist involutorisch homogen metrisierbar* [28].

Die solchermassen metrisierte Cantorsche Menge lässt sich nicht isometrisch in einen endlichdimensionalen Euklidischen Raum einbetten.

20. Wir können den Beweis, dass $\mathfrak{P}_n$ mit der Cantorschen Menge homöomorph ist, jetzt auch direkt erbringen: Für jedes k

[27] Die Kenntnis der Erzeugungsweise der n-adischen Zahlen mittels Restklassenfolgen mod n^ν verdanke ich Herrn B. L. van der Waerden, der sie mir 1926 anlässlich meiner Methode zur Komplettierung topologischer Ringe und Körper mitteilte. Vgl. meine demnächst zu veröffentlichende diesbezügliche Abhandlung.

[28] Die Metrisierung der n-adischen Gruppe lässt sich für $n=p$ (prim) aus der bekannten „Bewertung" der p-adischen Zahlen (mit $\varphi(x)$ als Bewertungsfunktion) herleiten. Vgl. J. Kürschák, *Ueber Limesbildung und allgemeine Körpertheorie*, Crelle 142 (1913) 211—253. Die hieraus hervorgehenden Limesrelationen kommen schon bei Hensel vor. Die Homöomorphie mit der Cantorschen Menge wurde mir 1926 brieflich von Herrn B. L. van der Waerden mitgeteilt.

ist $\overline{\mathfrak{P}}_n$ Summe von endlich vielen, nämlich n^k, paarweise fremden k-ten Umgebungen. Folglich ist jede Umgebung sowohl offen als abgeschlossen, d. h. $\overline{\mathfrak{P}}_n$ ist vollständig zusammenhangslos. Weil $\mathfrak{P}_n$ in sich dicht (es ist $x = \lim (x + n^\nu)$) und in $\overline{\mathfrak{P}}_n$ dicht ist, ist auch $\overline{\mathfrak{P}}_n$ in sich dicht. Schliesslich ist $\overline{\mathfrak{P}}_n$ kompakt, weil sie von endlich vielen beliebig kleinen Umgebungen überdeckt wird. Eine dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom genügende, kompakte, in sich dichte, vollständig zusammenhangslose Menge ist aber mit der Cantorschen Menge homöomorph; folglich ist dies mit $\overline{\mathfrak{P}}_n$ der Fall.

§ 4. Die n-adische Solenoide als topologische Gruppe.

21. Die in § 2, **11.** definierte Transformation $x \to x'$ der Cantorschen Menge in sich stellt sich nun einfach als die Operation „$+1$" der n-adischen Gruppe heraus:

$$x' = x + 1. \tag{19}$$

Wir können daher die Bedingung $0 \leqq \xi \leqq 1$ für die zweite „Koordinate" der Punkte der Solenoide fallen lassen, indem wir für den Punkt (x, ξ), $0 \leqq \xi \leqq 1$ auch $(x + k,\ \xi - k)$ schreiben, wo k eine beliebige positive oder negative ganze rationale Zahl ist. Die n-adische Solenoide entsteht also als eindeutiges stetiges Bild aus dem topologischen Produkt der Menge der reellen Zahlen ξ und der Menge der ganzen n-adischen Zahlen x mittels der Zusatzbedingung

$$(x,\ \xi + 1) = (x + 1,\ \xi), \tag{20}$$

wo die erste Addition im Sinne der reellen, die zweite aber im Sinne der n-adischen Zahlen zu verstehen ist. Für $n = 1$ zieht sich die Gruppe der „monadischen" Zahlen auf das Nullelement zusammen. Die *monadische Solenoide* entsteht also aus der Menge aller reellen Zahlen durch die Bedingung $\xi + 1 = \xi$, d. h. sie ist mit dem Kreise identisch, wie auch sofort aus der Konstruktion in **10.** hervorgeht

22. ***Satz 4a.*** *Die n-adische Solenoide ist involutorisch homogen.*

Beweis. Wegen des Korollars zu **16.** genügt es, zu beweisen, dass die Solenoide sich als kommutative topologische Gruppe auffassen lässt. Dazu definieren wir eine als Addition zu schreibende Gruppenoperation:

$$(x, \xi) + (y, \eta) = (x + y,\ \xi + \eta). \tag{21}$$

Offenbar führt diese Operation im Sinne der obigen Bedingung (20) gleiche Elemente in ebensolche über und genügt sie den Bedingungen für die topologische Gruppe.

Die Transformation

$$(x, \xi) \to (x', \xi') = (a + b - x,\ \alpha + \beta - \xi)$$

vertauscht die beliebig gewählten Elemente (a, α) und (b, β) und ist involutorisch.

Die oben definierte kommutative Gruppe, die wir die *n-adische solenoidale Gruppe* nennen wollen, besitzt die *n-adische Gruppe* als Normalteiler; ihre Faktorgruppe ist die Gruppe der Kreisdrehungen (die *monadische solenoidale Gruppe*).

Die Beziehungen (20) und (21) besagen, dass bei Zusammenfassung von x und ξ zu einer einzigen symbolischen „Koordinate"

$$\bar{x} = (x, \xi) = x + \xi = \xi + x \tag{22α}$$

die sämtlichen somit eingeführten „Additionen" unter einander assoziativ sind. Zerlegt man ξ in einen unendlichen n-albruch, so wird $\bar{x}$ eine symbolische Laurentreihe:

$$\bar{x} = \sum_{-\infty}^{+\infty} x_\lambda n^\lambda; \quad \xi = \sum_{1}^{\infty} x_{-\nu} n^{-\nu}. \tag{22β}$$

23. ***Satz 4b.*** *Die n-adische Solenoide ist involutorisch homogen metrisierbar.*

Zum Beweise genügt es, eine metrisierende Funktion $\varphi(x, \xi)$ für die n-adische solenoidale Gruppe zu konstruieren. Dazu setzen wir

$$\varphi(x, \xi) = \sum_{0}^{\infty} \gamma_\nu \left| \sin \frac{(s_\nu + \xi)}{n^\nu} \pi \right|, \tag{23}$$ [28a]

wo die s_ν durch (16) definiert sind und die γ_ν eine fest gegebene Folge positiver Zahlen mit konvergenter Summe bilden. Offenbar ist die Reihe (23) für jeden Punkt (x, ξ) konvergent und stellt sie

[28a]) Erweitert man die Periodizitätsforderung der Sinusfunktion auf ganze *n-adische* Vielfachen von 2π, so kann (23) einfacher in symbolischer Gestalt geschrieben werden:

$$\varphi(x, \xi) = \sum \gamma_\nu \left| \sin \frac{\bar{x}\, \pi}{n^\nu} \right|.$$

eine eindeutige Funktion auf Σ_n dar, die wegen der Beziehung

$$|\sin(\alpha+\beta)| \leqq |\sin\alpha| + |\sin\beta|$$

auf der ganzen Solenoide *gleichmässig stetig ist*. In der Tat ist

$$|\varphi(x+a\,n^r,\ \xi+\delta) - \varphi(x,\xi)| \leqq \sum_0^\infty \gamma_\nu \left|\sin\frac{a\,n^r+\delta}{n^\nu}\pi\right| \leqq$$

$$\leqq |\delta|\,\pi\frac{n}{n-1}\sum_0^\infty \gamma_\nu + \sum_{r+1}^\infty \gamma_\nu,$$

und dies kann unabhängig von a, ξ und x beliebig klein gemacht werden. Man verifiziert leicht, dass die Funktion $\varphi(x,\xi)$ den („ins, Additive übersetzten") Bedingungen (10) genügt.

24. Der Beweis des Satzes **4b.** kann auch nach der Kompletierungsmethode von **18.** geführt werden. Es sind nähmlich diejenigen Punkte (x,ξ) von Σ_n, für die x eine *endliche* n-adische Zahl (also eine gewöhnliche ganze rationale Zahl) ist, nach (20) in der Form $(0, x+\xi)$ darstellbar. Die Menge dieser Punkte, die wir die *Pseudokomponente* [29]) π_n des Nullpunktes $(0, 0)$ von Σ_n nennen wollen und die topologisch charakterisiert werden kann als die Menge aller Punkte, die durch ein echtes Teilkontinuum (i. c. einen Bogen) von Σ_n mit $(0, 0)$ verbunden werden können, ist also eineindeutiges stetiges (aber nicht umkehrbar stetiges) Bild der offenen Gerade. Sie entsteht daraus durch Hinzufügen der Limesbeziehungen

$$\lim(\xi + a_\nu n^\nu) = \xi, \tag{24}$$

wo die a_ν irgendwelche ganze rationale Zahlen sind. Anwendung der metrisierenden Funktion (23) auf die reellen Zahlen und nachträgliche Kompletierung ergibt eine dritte Konstruktion der Solenoide.

Wir können die solenoidale Gruppe auch durch *direkte* Anwendung der Kompletierungsmethode auf die *ganzen rationalen* (anstatt der *reellen*) Zahlen erhalten, weil *in ihr eine unendliche zyklische Gruppe dicht liegt* [29a]). Ist nämlich ϱ eine beliebige irrationale Zahl,

[29]) „Nerve" bei L. E. J. Brouwer, The impossibility of a linear arrangement of the points of an irreducible continuum, Amsterd. Proc. 14, (1911) 144; „composant" bei Z. Janiszewski und C. Kuratowski, Sur les continus indécomposables, Fund. Math. I, (1920) 218.

[29a]) Eine solche Gruppe (die immer kommutativ ist) wollen wir *monothetisch* nennen. Weitere Beispiele sind: die Kreisdrehungsgruppe, die Torusgruppe, die

z. B. π^{-1}, so zeigt man leicht, dass die ganzzahligen Vielfachen von $(0, \varrho)$ in Σ_n dicht liegen. Metrisiert man also die ganzen rationalen Zahlen mittels

$$\varphi(k) = \sum \gamma_\nu \left|\sin\frac{k}{n^\nu}\right|,$$

so ergibt sich die solenoidale Gruppe durch Kompletierung.

§ 5. Homogenitätseigenschaften topologischer Produkte.

25. Das *topologische Produkt* (M_1, M_2) zweier Punktmengen M_1 und M_2 ist die Menge aller Punktepaare $(x_1, x_2)_{x_1 \varepsilon M_1,\, x_2 \varepsilon M_2}$ zu der als Umgebungen die mengentheoretischen Produkte $(U_1, U_2) = \{y_1, y_2\}_{y_1 \varepsilon U_1,\, y_2 \varepsilon U_2}$ je zweier Umgebungen U_1 und U_2 von x_1, bzw. x_2 definiert sind. Man verifiziert leicht, dass (M_1, M_2) den Hausdorfschen Axiomen, einschliesslich der beiden Abzählbarkeitsaxiomen genügt, falls dies mit den beiden Faktormengen M_1 und M_2 der Fall ist.

Sind die beide Faktormengen metrisiert, so lässt sich auch das topologische Produkt in einfacher Weise metrisieren, z. B. mittels der „linearen" oder der „Pythagoreischen" Massbestimmung:

$$\varrho((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \varrho(x_1, y_1) + \varrho(x_2, y_2) \tag{25a}$$

bzw.

$$\varrho((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{\{\varrho(x_1, y_1)\}^2 + \{\varrho(x_2, y_2)\}^2} \tag{25b}$$

oder für irgendein $k > 1$ mittels der allgemeineren Minkowskischen Massbestimmung

$$\varrho((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = [\{\varrho(x_1, y_1)\}^k + \{\varrho(x_2, y_2)\}^k]^{\frac{1}{k}}. \tag{25c}$$

Das topologische Produkt ist eine bis auf Homöomorphie kommutative und assoziative Verknüpfung.

26. *Die Eigenschaften: Kompaktheit, Zusammenhang und Zusammenhang im kleinen bleiben bei topologischer Produktbildung erhalten.*

Beweis. Es sei (M_1, M_2) das topologische Produkt der beiden Punktmengen M_1 und M_2.

A. M_1 und M_2 seien kompakt. Ist $(x_{1\nu}, x_{2\nu})$ eine beliebige Punktfolge aus (M_1, M_2), dann gibt es eine in M_1 konvergente Teilfolge x_{1a_ν} der Folge $x_{1\nu}$ und eine in M_2 konvergente Teilfolge x_{2b_ν} der

n-adische Gruppe, usw. Nicht monothetisch ist z. B. die Gruppe der reellen Zahlen Näheres in meiner demnächst zu veröffentlichende Arbeit „Zur Kompletierungstheorie topologischen Gruppen, Körper und Ringe".

Folge x_{2a_ν}. Es ist dann (x_{1b_ν}, x_{2b_ν}) eine konvergente Teilfolge der beliebig vorgegebenen Folge; folglich ist auch (M_1, M_2) kompakt.

B. Es sei (M_1, M_2) Summe von zwei fremden abgeschlossenen Mengen F' und F'', deren erste den Punkt (a_1, a_2) enthält. Zu beweisen ist, dass ein beliebig gegebener Punkt (b_1, b_2) in F' enthalten ist. Die Durchschnitte H' und H'' von F' bzw. F'' mit der Menge $H = \{(a_1, x_2)\}_{x_2 \varepsilon U_2}$ sind fremd und abgeschlossen und enthalten zusammen H. Aber H ist homöomorph mit M_1, also zusammenhängend; folglich ist H'' leer und $H' = H$; (a_1, b_2) ist also in F' enthalten. Ebenso ist, ihrer Homöomorphie mit M_2 wegen, die Menge $\{(x_1, b_2)\}_{x_1 \varepsilon M_1}$, insbesondere also der Punkt (b_1, b_2) in F' enthalten.

C. Es sei U eine beliebig vorgegebene Umgebung des beliebig vorgegebenen Punktes (x_1, x_2). Zu beweisen ist, dass U eine zusammenhängende Umgebung dieses Punktes enthält. Es gibt in M_1, bzw. M_2 nach Voraussetzung je eine Folge $U_{1\nu}$, bzw. $U_{2\nu}$ von den Punkt x_1, bzw. x_2 definierenden zusammenhängenden Umgebung. Nach B. sind auch die topologischen Produkte $(U_{1\nu}, U_{2\nu})$ sämtlich zusammenhängend. Weil sie aber, der Definition des topologischen Produktes nach, den Punkt (x_1, x_2) definieren, sind sie fast alle in U enthalten, was zu beweisen war.

Weil die Faktormengen je eindeutiges stetiges Bild der Produktmenge sind, gilt auch die Umkehrung:

Ist das topologische Produkt zweier Mengen kompakt, bzw. zusammenhängend, bzw. zusammenhängend im kleinen, so ist das auch mit jeder der Faktormengen der Fall.

27. *Die Eigenschaften: Mikrohomogenität, Homogenität, Bihomogenität und involutorische Homogenität bleiben bei topologischer Produktbildung erhalten.*

B e w e i s. Es seien (a_1, a_2) und (b_1, b_2) zwei beliebig vorgegebene Punkte von (M_1, M_2).

A. Es gibt in M_1 zwei Umgebungen U_1 und U_1' von a_1, bzw. b_1, die durch die Abbildung $x_1 \to x_1'$ solchermassen auf einander abgebildet werden, dass $b_1 = a_1'$ ist. Entsprechendes gilt für M_2. Die Transformation $(x_1, x_2) \to (x_1', x_2')$ bildet dann die Umgebung (U_1, U_2) solchermassen auf (U_1', U_2') ab, dass dabei (a_1, a_2) in (b_1, b_2) übergeht.

B. Es gilt, mit den obigen Bezeichnungen: $U_1 = U_1' = M_1$ und $U_2 = U_2' = M_2$. Dann ist aber auch $(U_1, U_2) = (U_1', U_2') = (M_1, M_2)$.

C. Es ist überdies $b_1' = a_1$ und $b_2' = a_2$. Dann ist aber auch (a_1, a_2) das Bild von (b_1, b_2).

D. Falls allgemein $(x_1')' = x_1$ und $(x_2')' = x_2$ ist, so ist auch das Bild von (x_1', x_2') wieder (x_1, x_2).

Ganz entsprechend beweist man mittels irgendeiner der Metrisierungen (25), dass homogene usw. Metrisierbarkeit bei topologischer Produktbildung erhalten bleibt.

28. ***Satz 5.*** *Das topologische Produkt von k Solenoiden (mit gleichen oder verschiedenen Grundzahlen) ist ein kompakter, involutorisch homogener und als solcher metrisierbarer k-dimensionaler Raum, aber keine Mannigfaltigkeit.*

B e w e i s. Weil die topologische Produktbildung assoziativ ist, kann man das topologische Produkt der k Solenoiden dadurch erhalten, dass man $(k-1)$-mal das Produkt aus dem jeweiligen Resultate und einer Solenoide bildet. Nach **26.** und **27.** bleiben dabei die Kompaktheit und die involutorisch homogene Metrisierbarkeit erhalten. Das Produkt ist k-dimensional, weil die Solenoide einen Bogen, das Produkt also das topologische Bild des k-dimensionalen Parallelotops als Teil enthält. Weil die Solenoide nicht im kleinen zusammenhängend ist, kann das nach **27.** auch nicht mit dem Produkt von zwei, also auch nicht von k Solenoiden der Fall sien. Dieses Produkt kann also sicher keine Mannigfaltigkeit sein.

29. Eine noch ausgedehntere Klasse von bihomogenen Räumen erhält man durch Produktbildung aus irgendeiner endlichen Anzahl von Solenoiden und irgend einer Mannigfaltigkeit im gewöhnlichen Sinne. Wir nennen diese Räume „solenoidale Mannigfaltigkeiten". Höhere Homogenitätseigenschaften besitzen sie, falls dies mit den Faktor-Mannigfaltigkeiten der Fall ist [30]).

[30]) Würde man die Frage nach der Möglichkeit einer Anwendung solenoidaler Mannigfaltigkeiten in der Physik erheben, so wäre eine solche wohl zuerst in einer hypothetischen Welt mit drei „gewöhnlichen" und einer solenoidalen (zeitartigen) Dimension zu suchen, welche letztere dann, um das Vorherrschen einer einzigen natürlichen Zahl zu vermeiden, am besten b_ν-adisch (Vgl. [3])) angenommen würde.

Mag auch der Physiker eine solche Hypothese mit vollstem Rechte ablehnen, so könnten sie dennoch mit ihrem zwanglosen Auftreten natürlicher Zahlen, mit ihrer merkwürdigen Kausalität: dem niemals genau, aber immer genauer sich wiederholenden Weltgeschehen, mit ihrer Pluralität von Welten, die niemals stetig von der „wirklichen" Welt (z. B. der Pseudokomponente des Nullpunktes, vgl. § 4, 24) aus erreichbar sind, und ihr dennoch unendlich benachbart sind, den mystisch veranlagten Menschen zur Extase, ... oder zur Verzweiflung führen.

§ 6. Abbildbarkeit der Solenoiden auf einander.

30. *Satz 6. Ist eine m-adische Solenoide Σ_m eindeutiges und stetiges Bild einer n-adischen Solenoide Σ_n, so ist m in eine Potenz von n teilbar.*

Beweis. Es sei eine eindeutige und stetige Beziehung zwischen Σ_n und Σ_m gegeben, die einem jeden Punkt $(x, \xi)\,\varepsilon\,\Sigma_n$ den Punkt $F(x, \xi)\,\varepsilon\,\Sigma_m$ zuordnet.

Wir setzen der Kürze halber (vgl. (21))

$$f(x, \xi) = F(x, \xi) - F(0, 0). \tag{26}$$

Die Funktion $f(x, \xi)$ bestimmt dann gleichfalls eine eindeutige stetige Abbildung von Σ_n auf Σ_m, die insbesondere die Pseudokomponente π_n des Nullpunktes von Σ_n (Vgl. § 4, **24**) auf die Pseudokomponente π_m des Nullpunktes von Σ_m abbildet.

π_n bzw. π_m ist die Menge aller Punkte (x, ξ) von Σ_n bzw. Σ_m für die x eine *endliche* n-adische bzw. m-adische Zahl ist; diese lassen sich also in der Gestalt $(0, \xi)$ schreiben. π_n sowie π_m ist also eineindeutiges stetiges (nicht aber umkehrbar stetiges) Bild der Menge aller reellen Zahlen. Setzen wir jetzt

$$f(0, \xi) = (0, f(\xi)), \tag{27}$$

so ist $f(\xi)$ also eine für alle reellen Werte von ξ definierte stetige Funktion, die überdies die n-adischen Limesrelationen in die m-adischen überführt.

Wir beweisen zuerst, dass $f(\xi)$ *gleichmässig* stetig ist.

Es seien dazu Σ_n und Σ_m nach § 4, **23**. mittels zweier Nullfolgen positiver Zahlen α_ν bzw. β_ν und der zugehörigen metrisierenden Funktionen φ und ψ homogen metrisiert.

Es gibt dann zu jedem $\varepsilon > 0$ ein solches $\delta_\varepsilon > 0$, dass das Bild einer δ^ε-Umgebung von (x, ξ) in einer ε-Umgebung von $f(x, \xi)$ enthalten ist. Insbesondere gilt dies für $x = 0$. Dabei geht aber die Pseudokomponente des Punktes $(0, \xi)$ bzgl. der δ_ε-Umgebung dieses Punktes (d. h. also die Menge aller Punkte $(0, \eta)$ für die $|\xi - \eta| < \delta_\varepsilon$ ist) in eine Teilmenge der Pseudokomponente des Bildpunktes bzgl. seiner ε-Umgebung über, d. h. es ist $|f(\xi) - f(\eta)| < \varepsilon$. Dies besagt aber die gleichmässige Stetigkeit von $f(\xi)$.

31. Setzt man jetzt

$$\eta - \xi = a n^r + \delta, \quad \varphi(a n^r + \delta) < \delta_\varepsilon; \quad \delta_\varepsilon < \varepsilon < \tfrac{1}{2} \tag{28}$$

(a ganz und rational), so gibt es zu jedem ξ, r, a und δ eine Zerlegung

$$f(\xi + a n^r + \delta) - f(\xi) = b m^s + \varepsilon' \tag{29}$$

(b ganz rational), für die $\psi(b m^s + \varepsilon') < \varepsilon$ ist. Weil die natürliche Zahl s dadurch nach unten beschränkt ist, kann sie unabhängig von ξ, a und δ angenommen werden: $s = s_\varepsilon$. Lässt man jetzt ξ unter Festhaltung von r, a und δ stetig nach 0 abnehmen, so bleibt die Beziehung (29) erfüllt; wegen der Stetigkeit von $f(\xi)$ und der Kleinheit von ε' muss auch b stetig variieren, und folglich konstant bleiben. Dasselbe gilt für stetige Verkleinerung von δ. Die Zahl b hängt also nur noch von a und r ab:

$$f(a n^r) = b m^s + \varepsilon''; \quad b = b(a) = b(a, r). \tag{30}$$

Ersetzt man hierin a durch a', bzw. $a + a'$, so ergibt sich wegen der Kleinheit von ε'', dass b eine additive Funktion von a ist. Folglich ist

$$b(a) = a \,.\, b(1), \tag{31}$$

wo $b(1)$ nur noch von r abhängt.

Es sei jetzt r_s die kleinste natürliche Zahl r, für die (30) für jedes a gilt, und $b(1) = k_s$.

Ersetzt man dann in (30) erstens r durch r_s und a durch 1, zweitens s durch $s - 1$, r durch r_{s-1} und a durch $r_s - r_{s-1}$, so ergibt sich die rekurrente Beziehung

$$k_s = \frac{n^{r_s - r_{s-1}}}{m} k_{s-1},$$

also für jedes ν:

$$k_\nu = \frac{n^{r_\nu - r_0}}{m^\nu} k_0. \tag{32}$$

Wäre nun $k_0 = 0$, also auch $k_\nu = 0$ und $b(a, r) = 0$, so ergäbe (29) bei Substitution von $\xi = 0$, $r = 0$:

$$|f(a + \delta)| < \varepsilon,$$

d. h. die ganze n-adische Solenoide wäre auf ein endliches, den Nullpunkt von Σ_m enthaltendes Intervall abgebildet, entgegen der Voraussetzung dass Σ_m selbst Bild von Σ_n ist. Also ist $k_0 \neq 0$.

Weil dann aber in k_0 höchstens eine endliche Potenz von m teilbar ist, muss m in eine Potenz von n teilbar sein. Das aber ist die Behauptung des Satzes **6**.

32. ***Satz 7.*** *Die Bedingung von Satz 6 ist auch hinreichend.*

Beweis. Es sei

$$n^{\alpha} \equiv 0 \quad (m) \tag{33}$$

Ein beliebiger Punkt von Σ_n sei bestimmt durch eine Folge reeller Zahlen ξ_ν mit

$$\xi_{\nu+1} \equiv \xi_\nu \quad (n^\nu).$$

Nimmt man jetzt

$$f(\xi) = \xi. \tag{34}$$

so ist für jedes $\nu \geqq \mu\alpha$:

$$\xi_{\nu+1} \equiv \xi_\nu \quad (m^\mu),$$

d. h. die Folge ξ_ν bestimmt eindeutig einen Punkt von Σ_m, der, wie sich unschwer ergibt, stetig vom Urbildpunkte abhängt.

33. Eine unmittelbare Folge der Sätze **6** und **7** ist.

Satz 8. *Damit eine n-adische und eine m-adische Solenoide homöomorph sind, ist notwendig und hinreichend, dass n und m aus denselben Primfaktoren zusammengesetzt sind.*

Unter den Solenoiden $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \ldots$ gibt es also abzählbar unendlich viele paarweise topologisch verschiedene.

34. Die Bedingung des Satzes **8** hat ein einfache abgebraische Bedeutung:

Die n-adische und die m-adische Solenoide sind dann und nur dann homöomorph, wenn der Ring der n-adischen Zahlen mit dem Ring der m-adischen Zahlen isomorph ist.

Der Beweis, der sich aus Betrachtungen rein algebraischer Natur ergibt, sei hier unterdrückt [31]).

§ 7. Die Transformationen von Σ_n in sich.

35. Fortführung der Betrachtungen des vorigen Paragraphen gestattet uns, die Gruppe aller topologischen Transformationen von Σ_n in sich zu bestimmen. Führt man nämlich (31) und (32) in (29) ein, so ergibt sich die Beziehung

$$f(\xi + a n^{r_s} + \delta) - f(\xi) = a k_0 n^{r_s - r_0} + \varepsilon', \tag{35}$$

in der die Zahl m nicht mehr auftritt. Die allgemeinste Abbildung von Σ_n auf Σ_m, vorausgesetzt, dass eine solche existiert, erhält man also, wenn man erstens Σ_n mittels einer der Bedingung (35) genügenden Funktion $f(\xi)$ auf sich selbst abbildet, und alsdann Σ_n mittels der identischen Funktion (34) auf Σ_m abbildet.

Setzt man jetzt

$$g(\xi) = \frac{n^{r_0}}{k_0} f(\xi),$$

$$\zeta(\xi) = g(\xi) - \xi, \tag{36}$$

so ergibt sich für $\zeta(\xi)$ die Bedingung

$$|\zeta(\xi + a n^{r_s} + \delta) - \zeta(\xi)| \leqq |\delta| + \frac{n^{r_0}}{|k_0|} |\varepsilon'|$$

Das rechte Glied kann durch Wahl eines genügend grossen s und eines genügend kleinen δ beliebig klein gemacht werden; also gilt:

$$|\zeta(\xi + a n^{r_s} + \delta) - \zeta(\xi)| < \varepsilon \tag{37}$$

für $|\delta| < \delta'_\varepsilon$.

36. Bedenken wir nun, dass eine für alle reelle ξ stetige Funktion $\vartheta(\xi)$ nach H. Bohr [32]) fastperiodisch heisst, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Länge $l = l(\varepsilon)$ derart gibt, dass jedes Intervall von der Länge l mindestens eine zu ε gehörige „Verschiebungszahl“ $\tau = \tau(\varepsilon)$ enthält, die für alle ξ der Ungleichung

$$|\vartheta(\xi + \tau) - \vartheta(\xi)| < \varepsilon \tag{38}$$

genügt, so sehen wir, wenn wir $l = n^{r_s}$ setzen, dass $\zeta(\xi)$ eine fastperiodische Funktion ist. Diese genügt aber noch der weiteren Bedingung:

Alle ganzzahligen Vielfache von n^{r_s} sind für $s \geqq s_\varepsilon$ ε-Verschiebungszahlen.

Diese Bedingung, zusammen mit der gleichmässigen Stetigkeit ist sowohl notwendig als hinreichend.

Auf Grund von bekannten Sätzen ergibt sich leicht, dass $\zeta(\xi)$

[31]) Vgl. D. van Dantzig, *Ueber abstrakte $\mathfrak{h}_\nu$-adische Ringe.*

[32]) Vgl. Fussnote [15]).

beschränkt ist, und sich gleichmässig durch gleichmässig stetige rein periodische Funktionen von den Perioden n^ν approximieren lässt.

Ein Beispiel einer solchen Funktion bietet die Metrisierungsfunktion (23).

37. Setzt man jetzt
$$k_0 = 1, \quad r_0 = 0,$$
also
$$f(\xi) = g(\xi) = \xi + \zeta(\xi),$$
so vermittelt diese Funktion $f(\xi)$ eine eindeutige stetige *Deformation* von Σ_n in sich selbst. In der Tat, ersetzt man $\zeta(\xi)$ durch $\lambda\zeta(\xi)$ und lässt man die reelle Zahl λ stetig von 1 nach 0 abnehmen, so geht die Deformation stetig in die Identität über. Weil $\zeta(\xi)$ beschränkt ist, nimmt $f(\xi)$ jeden reellen Wert tatsächlich an.

Damit die Deformation eineindeutig (und dann auch umkehrbar stetig) sei, ist notwendig und hinreichend, dass die Funktion $f(\xi)$ monoton wächst, der Differenzenquotient von $\zeta(\xi)$ also die untere Schranke -1 hat.

38. Setzt man weiter
$$\zeta(\xi) = 0.$$
so ergibt die Funktion
$$f(\xi) = \frac{k_0}{n^{r_0}}\xi$$
einen (mehrstufig) stetigen *Automorphismus* [33]) der solenoidalen Gruppe.

Ein solcher wird also gegeben durch irgendeinen endlichen n-albruch $\frac{k_0}{n^{r_0}}$; das Produkt zweier Automorphismen durch das Produkt der zugehörigen n-albrüche. Für $k_0 = -n^{r_0}$ erhält man insbesondere die *Spiegelung* an den Nullpunkt der Solenoide.

Ein Automorphismus ist einstufig (eineindeutig), falls seine Umkehrung ebenfalls existiert. Dazu ist notwendig und hinreichend, dass die Reziproke des zugehörigen n-albruchs wieder ein endlicher n-albruch ist, dass also der Zähler ein Potenzteiler von n ist [34]).

[33]) Ein mehrstufiger bzw. einstufiger Automorphismus einer Gruppe ist bekanntlich eine eindeutige bzw. eineindeutige Abbildung der Gruppe auf sich selbst, bei der die Produktrelationen erhalten bleiben ($xy = z \rightarrow x'y' = z'$).

[34]) Ist n prim, so kommen also nur die positiven und negativen ganzzahligen Potenzen von n und ihre Entgegengesetzten in Frage.

Die Deformationen und die Automorphismen können keine Transformation gemeinsam haben ausser des Identität. Denn ist $f(\xi) = \frac{k_0}{n^{r_0}}\xi$ und $k_0 \neq n^{r_0}$, so ist die Funktion
$$f(\xi) - \xi = \left(\frac{k_0}{n^{r_0}} - 1\right)\xi$$
unbeschränkt; sie kann also den Bedingungen für $\zeta(\xi)$ nicht genügen.

39. Betrachten wir schliesslich die Transformationen
$$(x, \xi) \rightarrow (x, \xi) + (a, \alpha)$$
der solenoidalen Gruppe selbst. Wir können diese nach belieben entweder als *Translationen* oder als *Rotationen* auffassen, weil sie im Falle $a = 0$ einerseits die Pseudokomponente des Nullpunktes in sich translatieren, andererseits bei der geometrischen Konstruktion der Solenoide mittels der Torusfolge T_ν aus den Drehungen des Raumes um den Winkel $2\pi\alpha$ hervorgehen [35]). Offenbar sind diese Transformationen immer eineindeutig, und haben sie mit den Deformationen und den Automorphismen nur die Identität gemeinsam.

40. Zusammenfassend ergibt sich:

Satz 9. *Die Gruppe aller topologischen Transformationen der n-adischen Solenoide in sich ist zusammengesetzt aus den folgenden drei Untergruppen.*

1. *Die n-adische solenoidale Gruppe der* T r a n s l a t i o n e n *(Rotationen), gegeben durch je einen Punkt (a, α) der Solenoide;*

2. *Die Gruppe der einstufigen* A u t o m o r p h i s m e n, *gegeben durch je einen endlichen n-albruch $\frac{k_0}{n^{r_0}}$, dessen Zähler in einer Potenz von n aufgeht;*

3. *Die Gruppe der eineindeutigen* D e f o r m a t i o n e n, *gegeben durch je eine gleichmässig stetige fastperiodische Funktion $\zeta(\xi)$, zu der jedes ganzzahlige Vielfache von n^{r_s} $(s \geqq s_\varepsilon)$ eine ε-Verschiebungszahl ist, und deren Differenzenquotient -1 als untere Schranke hat.*

Amsterdam 1926 — Rotterdam 1929.

[35]) Vgl. Fussnote [16]).