Q_1 est l'ensemble qu'on obtient en adjoignant à P_1 le point 2.

Q_2 est formé des nombres $0, 2, \frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}$ et $4+\frac{1}{n}$ $(n=1, 2, \ldots)$ [1]).

La démonstration que les cinq ensembles ainsi définis satisfont aux conditions imposées n'offre pas de difficultés.

[1]) M. Sierpiński désigne Q_1 par H_1, P_2 par H_2 et P_3 par H_3 et écrit (l. c., p. 123) que les types dH_1 et dH_2 sont des précédents pour le type dH_3: au lieu de dH_1 doit y être évidemment dQ_2.

Über additive Massfunktionen in abstrakten Mengen.

Von

Stefan Banach (Lwów).

In einer vor kurzem gemeinsam mit Herrn Kuratowski veröffentlichten Note [1]) haben wir, unter Voraussetzung der Richtigkeit der Kontinuumhypothese $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, die folgende Verallgemeinerung eines bekannten Resultats von Herrn Vitali bewiesen:

Es gibt keine total additive nicht identisch verschwindende Mengenfunktion $m(X)$, *welche jeder Teilmenge* X *der Strecke* $(0, 1)$ *eine reelle Zahl zuordnet und für alle aus nur einem Punkte bestehenden Mengen den Wert Null annimmt.*

In diesem Satze kann die Strecke $(0, 1)$ durch eine beliebige Menge von der Mächtigkeit des Kontinuums ersetzt werden. Die Funktion $m(X)$, welche wir wegen ihrer geometrischen Bedeutung eine Massfunktion, oder auch ein Mass von X nennen, darf auch negative Werte annehmen.

In der vorliegenden Note beweisen wir einen allgemeineren, für Mengen von beliebiger Mächtigkeit gültigen Satz, *wobei wir die Richtigkeit der sog. Hypothese der Alephs, d. h. das Bestehen der Gleichung*

$$2^{\aleph_\xi} = \aleph_{\xi+1}$$

für beliebige Ordnungszahlen ξ *voraussetzen.* Um diesen Satz aussprechen zu können, müssen wir zunächst den Begriff der Massfunktion allgemein definieren.

Wir sagen, dass in einer Menge E eine additive Massfunktion

[1]) S. Banach et C. Kuratowski *Sur une généralisation du problème de la mesure* Fund. Math. XIV (1929), pp. 127—131.

definiert ist, falls jeder Teilmenge G von E eine Zahl $|G|$ zugeordnet ist, welche folgende Bedingungen erfüllt:

1. $|G|$ ist nicht identisch null für alle G.
2. Es ist $|G_1+G_2|=|G_1|+|G_2|$, falls $G_1 \cdot G_2=0$.
3. Besteht G aus einem einzigen Element von E, so ist $|G|=0$.

Eine Massfunktion ist „additiv mit der Mächtigkeit $\aleph_\xi$", wenn für disjunkte Mengen G_η stets

$$\left|\sum G_\eta\right|=\sum|G_\eta|. \qquad (0<\eta<\omega_\xi)$$

Eine Massfunktion ist vom Typus $\aleph_\xi$, falls sie mit jeder Mächtigkeit kleiner als $\aleph_\xi$, nicht aber mit der Mächtigkeit $\aleph_\xi$ additiv ist.

Bemerkung 1. Wenn eine Massfunktion mit einer Mächtigkeit $\aleph_\xi \geqslant \aleph_0$ additiv ist, so ist jede Klasse disjunkter Teilmengen von E, deren jede eine Teilmenge mit von Null verschiedenem Masse enthält, höchstens abzählbar.

Bemerkung 2. Wenn die Menge E von der Mächtigkeit $\aleph_\xi$ ist, so ist jede in E erklärte Massfunktion höchstens vom Typus $\aleph_\xi$. Anderenfalls wäre nämlich das Mass einer beliebigen Teilmenge von E gleich der Summe der Masse ihrer Elemente, d. h. gleich Null.

Wir formulieren nunmehr unseren Satz:

Wenn in einer Menge E eine Massfunktion vom Typus $\aleph_\xi$ sich definieren lässt, so ist $\aleph_\xi$ eine unerreichbare Kardinalzahl [1]).

Zum Beweise setzen wir zunächst voraus, dass die Menge E die Mächtigkeit $\aleph_\xi$ besitzt.

Nach der Bemerkung 2. kommt jeder Teilmenge von E deren Mächtigkeit kleiner als $\aleph_\xi$ ist, das Mass Null zu. Daher enthält E eine Teilmenge von der Mächtigkeit $\aleph_\xi$ deren Mass von Null verschieden ist. Da es hier nur auf die Mächtigkeit ankommt, dürfen wir annehmen, dass die Menge E selbst ein von Null verschiedenes Mass besitzt. Wir führen den Beweis indirekt, nehmen also an, dass $\aleph_\xi$ erreichbar ist. Dann sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $\aleph_\xi$ eine Grenzzahl ist oder nicht.

[1]) Eine Kardinalzahl $\aleph_\alpha$ nennen wir unerreichbar, falls sie eine Grenzzahl ist und sich nicht, als Summe von Mengen, welche von Mächtigkeit $<\aleph_\alpha$ sind und deren Anzahl $<\aleph_\alpha$ ist, darstellen lässt; d. h. die Anfangszahl ω_α ist regulär und α ist eine Limeszahl.

Die kleinste unerreichbare Kardinalzahl ist $\aleph_0$. Es ist nicht bekannt, ob es noch andere gibt.

Es sei $\aleph_\xi$ eine (erreichbare) Grenzzahl. Die Menge E lässt sich als Summe disjunkter Mengen $\{G_\eta\}$ in der Anzahl $<\aleph_\xi$, welche alle von kleinerer Mächtigkeit als $\aleph_\xi$ sind, darstellen. Da jede dieser Mengen als Summe ihrer Elemente betrachtet werden kann und unsere Massfunktion dem Typus $\aleph_\xi$ angehört, haben alle diese Mengen das Mass Null, also auch die Menge E, gegen die Voraussetzung.

Es sei jetzt $\aleph_\xi$ $(\xi>1)$ [1]) keine Grenzzahl. Wir bezeichnen mit A die Klasse aller Folgen

$$\{\alpha_\eta\} \quad (0<\eta<\omega_{\xi-1})$$

wo die α_η Ordinalzahlen kleiner als ω_1 sind. Sind $\{\alpha_\eta\}$ und $\{\beta_\eta\}$ zwei Folgen aus A, so schreiben wir

$$\{\alpha_\eta\}<\{\beta_\eta\}$$

wenn für alle η, $\alpha_\eta<\beta_\eta$ ist. Die Mächtigkeit von A ist offenbar

$$\aleph_1^{\aleph_{\xi-1}}=\aleph_\xi.$$

Wir nehmen an, dass die Menge A nach dem Typus ω_ξ wohlgeordnet ist. Wir entfernen nun jedes Element $\{\alpha_\eta\}$, für welches ein in A früher vorkommendes Element $\{\beta_\eta\}$ existiert, derart, dass $\{\alpha_\eta\}<\{\beta_\eta\}$ und bezeichnen mit $\overline{E}$ die Menge der übrigen Elemente von A. Diese Menge $\overline{E}$ besitzt folgende zwei Eigenschaften:

1. Sie ist von der Mächtigkeit $\aleph_\xi$.
2. Ist $\{\alpha_\eta\}$ ein Element aus A, so ist die Menge derjenigen Elemente von $\overline{E}$, welche kleiner als $\{\alpha_\eta\}$ sind, von einer kleineren Mächtigkeit als $\aleph_\xi$.

Unter der Annahme, dass die Mächtigkeit von $\overline{E}$ kleiner als $\aleph_\xi$ ist, kann $\overline{E}$ als eine wohlgeordnete Menge von Folgen $\{\beta_\eta^\vartheta\}$, $0<\vartheta<\omega_{\xi-1}$ dargestellt werden. Sei $\alpha_\eta=\beta_\eta^\eta+1$; alsdann existiert keine Folge $\{\beta_\eta\}$ aus $\overline{E}$ für welche $\{\alpha_\eta\}\leqslant\{\beta_\eta\}$ ist, — im Widerspruch mit der Definition der Menge $\overline{E}$.

Ist ferner $\{\beta_\eta\}<\{\alpha_\eta\}$ und $\{\beta_\eta\}\subset\overline{E}$, so kommt $\{\beta_\eta\}$ früher in A vor als $\{\alpha_\eta\}$. Die Menge derjenigen Elemente, welche in A früher als $\{\alpha_\eta\}$ vorkommen, ist aber von einer kleineren Mächtigkeit als $\aleph_\xi$.

[1]) Für den Beweis im Falle $\xi=1$ verweisen wir auf die zitierte Note.

Es sei $\alpha < \omega_1$. Wir bezeichnen mit $\overline{E}_\alpha^\eta$ die Menge derjenigen Folgen $\{\beta_\eta\}$ von $\overline{E}$, für welche $\beta_\eta = \alpha$.

Es ist klar, dass

$$\overline{E} = \sum_{0<\alpha<\omega_1} \overline{E}_\alpha^\eta .$$

Da nach 1. die Mengen E und $\overline{E}$ von gleicher Mächtigkeit sind, so lässt sich in $\overline{E}$ eine Massfunktion vom Typus $\aleph_\xi$ erklären derart, dass $|\overline{E}| \neq 0$ ist. Die Menge aller α besitzt die Mächtigkeit $\aleph_1$. Daher gibt es nach der Bemerkung 1. eine Ordnungszahl $\alpha_\eta < \omega_1$ derart, dass für jedes η

1. $|\overline{E}_\alpha^\eta| = 0$ für $\alpha \geqslant \alpha_\eta$,
2. $|G| = 0$ für jede Teilmenge G eines $\overline{E}_\alpha^\eta$ $(\alpha \geqslant \alpha_\eta)$.

Wir setzen

$$\overline{E}' = \sum_{0<\eta<\omega_{\xi-1}} \sum_{\alpha \geqslant \alpha_\eta} \overline{E}_\alpha^\eta .$$

Da die Teilmengen von $\overline{E}_\alpha^\eta$ vom Mass Null sind und die obige Summe aus Mengen von der Mächtigkeit $\aleph_{\xi-1}$ besteht, so ist $|\overline{E}'| = 0$.

Die Menge $\overline{E} - \overline{E}'$ enthält nur diejenigen Folgen von $\overline{E}$, welche kleiner als $\{\alpha_\eta\}$ sind. Die Anzahl dieser Folgen ist, nach der zweiten Eigenschaft der Menge $\overline{E}$, höchstens $\aleph_{\xi-1}$. Daher ist $|\overline{E} - \overline{E}'| = 0$, also

$$|\overline{E}| = |\overline{E}'| + |\overline{E} - \overline{E}'| = 0$$

— gegen die Voraussetzung.

Damit ist der Beweis unseres Satzes für den Fall, dass die Menge E die Mächtigkeit $\aleph_\xi$ besitzt, erledigt. Um daraus den Beweis für den allgemeinen Fall abzuleiten, bemerken wir, dass aus der Voraussetzung unseres Satzes leicht die Existenz einer Klasse disjunkter Teilmengen E_η $(0 < \eta < \omega_\xi)$ von E folgt, für welche:

$$\Big|\sum_{0<\eta<\omega_\xi} E_\eta\Big| \neq \sum_{0<\eta<\omega_\xi} |E_\eta| .$$

Nach der Bemerkung 1. haben nur abzählbar viele Mengen E_η ein von Null verschiedenes Mass. Wir bezeichnen die übrigen mit G_η.

Es ist klar, dass

$$|G_\eta| = 0$$

und

$$\Big|\sum G_\eta\Big| \neq \sum |G_\eta| = 0$$

ist.

Wir bezeichnen mit W die Menge aller Ordnungszahlen, welche kleiner als ω_ξ sind. In dieser Menge, deren Mächtigkeit $\aleph_\xi$ beträgt, definieren wir eine Massfunktion vom Typus $\aleph_\xi$ folgendermassen:

Ist M eine Teilmenge von W, so setzen wir

$$|M| = \Big|\sum G_\eta\Big|$$

wobei die Summe über alle Ordnungszahlen von M erstreckt ist. Da nach der vorletzten Relation $|W| \neq 0$ ist, so folgt aus unserem früheren Ergebnis, dass $\aleph_\xi$ eine unerreichbare Kardinalzahl ist, w. z. b. w.

Auf Grund dieses Satzes beweist man leicht mit Hilfe der Bemerkung 2. folgendes Korollar:

Es sei $\overline{\aleph}$ die kleinste unerreichbare Kardinalzahl, welche grösser als $\aleph_0$ ist. Wenn E eine Menge von einer kleineren Mächtigkeit als $\overline{\aleph}$ ist und wenn in E eine Massfunktion erklärt ist, so ist diese Massfunktion vom Typus $\aleph_0$, d. h. es ist nicht immer

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty} E_n\Big| = \sum_{n=1}^{\infty} |E_n|$$

für disjunkte Mengen E_n.