Sur l'hypothèse qu'il n'existe aucun nombre cardinal intermédiaire entre $2^{\aleph_0}$ et $2^{2^{\aleph_0}}$.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Le but de cette Note est de démontrer que *les trois propositions suivantes sont équivalentes*:

(P_1) *Il n'existe aucun nombre cardinal intermédiaire entre* $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ *et* $2^{\mathfrak{c}}$.

(P_2) *Il existe une famille* $\mathcal{F}$ *d'ensembles linéaires, telle que* 1°: *de deux ensembles de la famille* $\mathcal{F}$ *un au moins est toujours une image continue de l'autre, et* 2°: *tout ensemble linéaire est une image continue d'un (au moins) ensemble de la famille* $\mathcal{F}$.

(P_3) *Il existe une famille* $\mathcal{F}$ *formée de* $2^{\mathfrak{c}}$ *ensembles linéaires distincts, telle que de deux ensembles de la famille* $\mathcal{F}$ *toujours au moins un est une image continue de l'autre.*

Démonstration. Supposons que la proposition (P_1) est vraie. Soit

$$(1) \qquad E_1, E_2, \ldots, E_\omega, E_{\omega+1}, \ldots, E_\xi, \ldots \qquad (\xi < \varphi)$$

une suite transfinie du plus petit type ordinal possible formée de tous les ensembles linéaires. On voit sans peine que l'inégalité $\xi < \varphi$ entraîne (pour les nombres ordinaux ξ) l'inégalité $\overline{\overline{\xi}} < 2^{\mathfrak{c}}$ (où $\overline{\overline{\xi}}$ désigne la puissance correspondant au nombre ordinal ξ), donc, vu notre hypothèse (P_1), l'inégalité $\overline{\overline{\xi}} \leqslant \mathfrak{c}$.

J'ai démontré [1]) que pour toute famille Φ de puissance $\leqslant \mathfrak{c}$ formée d'ensembles linéaires il existe un ensemble linéaire $\lambda(\Phi)$,

[1]) *Fund. Math.*, t. XIV, p. 234.

tel que tout ensemble de Φ est une image continue de l'ensemble $\lambda(\Phi)$.

Nous définirons maintenant par l'induction transfinie une suite transfinie du type φ d'ensembles

$$(2) \qquad H_1, H_2, H_3, \ldots, H_\omega, H_{\omega+1}, \ldots, H_\xi, \ldots \qquad (\xi < \varphi)$$

comme il suit.

Posons $H_1 = E_1$. Soit maintenant α un nombre ordinal donné $< \varphi$ et supposons que nous avons déjà défini tous les ensembles H_ξ pour $\xi < \alpha$. Soit Φ_α la famille formée de tous les ensembles E_ξ et H_ξ, où $\xi < \alpha$. D'après $\alpha < \varphi$, nous avons $\alpha \leqslant \mathfrak{c}$, ce qui donne sans peine $\overline{\overline{\Phi}}_\alpha \leqslant \mathfrak{c}$, et nous pouvons poser $H_\alpha = \lambda(\Phi_\alpha)$.

La famille $\mathcal{F}$ de tous les ensembles (2) ainsi définis satisfait évidemment à la proposition (P_2).

Nous avons ainsi démontré que la proposition (P_1) entraîne la proposition (P_2).

Soit maintenant $\mathcal{F}$ une famille d'ensembles linèaires satisfaisant à la condition 2° de la proposition (P_2): je dis que $\overline{\overline{\mathcal{F}}} = 2^{\mathfrak{c}}$.

En effet, posons $\overline{\overline{\mathcal{F}}} = \mathfrak{m}$. D'une part, on a évidemment $\mathfrak{m} \leqslant 2^{\mathfrak{c}}$. Or, tout ensemble linéaire a, comme on sait, $\mathfrak{c}$ images continues: la famille de tous les ensembles linéaires qui sont des images continues d'un au moins des ensembles de la famille $\mathcal{F}$ a donc une puissance $\leqslant \mathfrak{c}\,.\,\mathfrak{m}$, et la condition 2° donne tout de suite $2^{\mathfrak{c}} \leqslant \mathfrak{c}\,.\,\mathfrak{m}$, ce qui donne $\mathfrak{m} \geqslant 2^{\mathfrak{c}}$. On a donc $\mathfrak{m} = 2^{\mathfrak{c}}$, c. q. f. d.

Nous avons ainsi démontré que toute famille $\mathcal{F}$ d'ensembles vérifiant la proposition (P_2) est de puissance $2^{\mathfrak{c}}$, et il en résulte tout de suite que la proposition (P_2) entraîne la proposition (P_3).

Supposons maintenant que la proposition (P_3) et vraie, et admettons qu'il existe un nombre cardinal $\mathfrak{m}$, tel que

$$(3) \qquad \mathfrak{c} < \mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{c}}.$$

Soit $\mathcal{F}$ une famille vérifiant la proposition (P_3), et désignons par $\mathcal{F}_1$ une partie de $\mathcal{F}$ composée de $\mathfrak{m}$ ensembles. La famille Γ_1 de toutes les images continues des ensembles de la famille $\mathcal{F}_1$ aura la puissance $\leqslant \mathfrak{c}\,.\,\mathfrak{m}$. Or, d'après (3), on trouve sans peine $\mathfrak{c}\,.\,\mathfrak{m} = \mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{c}}$, et parsuite il existe un ensemble de la famille $\mathcal{F}$, soit E, qui n'appartient pas à Γ_1. Or, soit H un ensemble quelconque de la famille $\mathcal{F}_1$: l'ensemble E n'appartenant pas à Γ_1 il s'en suit de la définition de la famille Γ_1 que E n'est pas une image continue de H. Les ensembles E et H appartenant à la famille $\mathcal{F}$, il en résulte (la famille $\mathcal{F}$ vèrifiant la proposition (P_3)) que H est une image continue de E. Donc tout ensemble de la famille $\mathcal{F}_1$ est une image continue de E: or, la famille $\mathcal{F}_1$ étant formée de $\mathfrak{m} > \mathfrak{c}$ ensembles distincts, cela est impossible.

Donc, si la proposition (P_3) est vraie, il n'existe aucun nombre cardinal $\mathfrak{m}$ satisfaisant aux inégalités (3). Nous avons ainsi démontré que la proposition (P_3) entraîne la proposition (P_1).

Il est ainsi établi que $(P_1) \to (P_2) \to (P_3) \to (P_1)$, ce qui prouve que les propositions (P_1), (P_2) et (P_3) sont équivalentes. Notre assertion est ainsi démontrée complètement.

Remarque. M. Kuratowski a posé le problème si dans toute suite infinie d'ensembles linéaires existe un ensemble qui serait une image continue d'un autre ensemble de cette suite [1]). On pourrait démontrer que si la réponse au problème de M. Kuratowski est positive, les propositions (P_1), (P_2) et (P_3) sont vraies.

[1]) Voir: *Fund. Math.* t. XIV, p. 235.