FUNDAMENTA
MATHEMATICAE
148 (1995)

Les hyperespaces des rétractes absolus et des rétractes absolus de voisinage du plan

par

Robert Cauty (Paris), **Tadeusz Dobrowolski** (Pittsburg, Kan.), **Helma Gladdines** (Amsterdam) et **Jan van Mill** (Amsterdam)

Abstract. We determine the topological structure of the subsets of the hyperspace $2^{\mathbb{R}^2}$ consisting of absolute retracts and of absolute neighborhood retracts respectively.

1. Introduction. Tous les espaces considérés dans cet article sont supposés métrisables et séparables. Pour un espace X, nous notons 2^X l'hyperespace de ses compacts non vides, $C(X)$ le sous-espace de 2^X formé des continus, 2^X_L celui des compacts localement connexes, $L(X)$ celui des continus péaniens, $\mathrm{ANR}(X)$ celui des rétractes absolus de voisinage (pas nécessairement connexes), $\mathrm{AR}(X)$ celui des rétractes absolus, et $a(X)$ celui des arcs. Si X est une variété, nous notons $\mathrm{c.e.}(X)$ l'hyperespace des continus cellulaires de X.

Nous notons I l'intervalle $[0,1]$, $Q = I^\infty$ le cube de Hilbert, $P = \,]0,1[^\infty$ son pseudo-intérieur et $B = Q \setminus P$ son pseudo-bord. Il est connu que B est homéomorphe au sous-ensemble Σ de $\mathbb{R}^\infty$ formé des suites bornées ([1], chapitre 8, §3).

Si $n \geq 2$, $2^{\mathbb{R}^n}$ et $C(\mathbb{R}^n)$ sont homéomorphes à $Q \setminus \{\text{point}\}$ (c'est un cas particulier de résultats de Curtis [13]). Gladdines et van Mill [23] ont démontré que $L(\mathbb{R}^n)$ est homéomorphe à Σ^∞ pour $n \geq 3$ et Cauty [5] a prouvé que $a(\mathbb{R}^2)$ est aussi homéomorphe à Σ^∞. Les deux résultats principaux de cet article sont les suivants.

(I) $(2^{\mathbb{R}^2}, 2^{\mathbb{R}^2}_L, \mathrm{ANR}(\mathbb{R}^2))$ est homéomorphe à $(Q^\infty \times Q^\infty, B^\infty \times Q^\infty, B^\infty \times (Q^\infty \setminus B^\infty)) \setminus \{\text{point}\}$ (le type topologique de ce triplet ne dépend pas du point enlevé).

(II) $(\mathrm{c.e.}(\mathbb{R}^2), \mathrm{AR}(\mathbb{R}^2), \mathrm{AR}(\mathbb{R}^2) \setminus a(\mathbb{R}^2))$ est homéomorphe à $(\mathbb{R}^\infty \times (\mathbb{R}^\infty)^\infty, \mathbb{R}^\infty \times \Sigma^\infty, \Sigma \times \Sigma^\infty)$.

1991 *Mathematics Subject Classification*: Primary 57N20.

En particulier, les espaces $\mathrm{AR}(\mathbb{R}^2)$ et $\mathrm{ANR}(\mathbb{R}^2)$ ne sont pas homéomorphes, car le premier est un $F_{\sigma\delta}$ absolu, tandis que le deuxième n'en est pas un, étant, comme nous le verrons, un ensemble absorbant pour les espaces qui sont différence de deux $F_{\sigma\delta}$ absolus.

Les résultats (I) et (II) sont particuliers à la dimension deux. En effet, Dobrowolski et Rubin ont prouvé [19] que, pour $n \geq 3$, $\mathrm{AR}(\mathbb{R}^n)$ et $\mathrm{ANR}(\mathbb{R}^n)$ sont des boréliens absolus de classe exactement $G_{\delta\sigma\delta}$, donc ne peuvent être homéomorphes ni à $\mathrm{AR}(\mathbb{R}^2)$, ni à $\mathrm{ANR}(\mathbb{R}^2)$. En outre, en utilisant un exemple récent de Dranishnikov [20] et un argument de Dranishnikov et Shchepin ([21], démonstration du théorème 5, p. 69), on peut constater que $\mathrm{c.e.}(\mathbb{R}^n)$ n'est pas un rétracte absolu de voisinage si n est assez grand. Le même argument implique aussi que $\mathrm{AR}(\mathbb{R}^\infty)$ et $\mathrm{AR}(Q)$ ne sont pas des rétractes absolus de voisinage. En effet, suivant la démonstration du théorème 5, p. 69, de [21], il suffit, pour voir cela, de construire une surjection continue ouverte $f : X \to Y$ entre espaces compacts qui n'est pas une équivalence de forme héréditaire, mais est telle que, pour tout $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ soit un rétracte absolu. Pour cela, partons d'une application $g : T \to Y$ où T est de dimension finie, Y de dimension infinie et, pour tout $y \in Y$, $g^{-1}(y)$ est de forme triviale (voir [20]). La construction du théorème 2.1 de [24] nous fournit alors la fonction $f : X \to Y$ dont nous avons besoin. Comme, d'après un résultat de Dydak et Walsh [22], T peut être pris de dimension deux, la condition (3) du théorème 2.1 de [24] entraîne que, pour $5 \leq n \leq \infty$, le sous-espace de $\mathrm{AR}(\mathbb{R}^\infty)$ ou de $\mathrm{AR}(Q)$ formé des rétractes absolus de dimension $\leq n$ n'est pas un rétracte absolu de voisinage. Le problème de savoir si $\mathrm{AR}(\mathbb{R}^n)$ et $a(\mathbb{R}^n)$ sont des rétractes absolus de voisinage pour $2 < n < \infty$ semble encore ouvert.

Enfin, nous montrerons dans la dernière section que, bien que $C(\mathbb{R}^2)$ soit homéomorphe à $Q \setminus \{\text{point}\}$ et $\mathrm{c.e.}(\mathbb{R}^2)$ homéomorphe à P, le couple $(C(\mathbb{R}^2), \mathrm{c.e.}(\mathbb{R}^2))$ n'est pas homéomorphe à $(Q, P) \setminus \{\text{point}\}$.

2. Préliminaires. Nous noterons d la distance sur un espace métrique X, et ϱ la distance de Hausdorff associée sur 2^X. Si A et B sont des sous-espaces de X, nous poserons $d(A, B) = \inf_{a\in A,\, b\in B} d(a, b)$; si $A = \{x\}$, nous écrivons $d(x, B)$ au lieu de $d(\{x\}, B)$.

Si f et g sont deux fonctions de Y dans un espace X et si $\mathcal{U}$ est un recouvrement ouvert de X, nous dirons que f est *$\mathcal{U}$-proche* de g si, pour tout y dans Y, il y a un élément de $\mathcal{U}$ contenant à la fois $f(y)$ et $g(y)$. Un sous-ensemble A d'un rétracte absolu de voisinage X est appelé un *Z-ensemble* dans X s'il est fermé et si, pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X, il existe une fonction continue f de X dans X, $\mathcal{U}$-proche de l'identité et telle que $f(X) \subset X \setminus A$; si, de plus, il est toujours possible de choisir la fonction f de façon que $\overline{f(X)} \cap A = \emptyset$, alors A est appelé un *Z-ensemble* *au sens fort* dans X. Il est connu que tout Z-ensemble dans Q ou dans l'espace de Hilbert ℓ^2 est un Z-ensemble au sens fort. Un sous-espace A d'un espace X est dit *localement homotopiquement négligeable* dans X si, pour tout ouvert U de X, l'inclusion de $U \setminus A$ dans U est une équivalence homotopique faible. Si X est un rétracte absolu de voisinage, cela équivaut à l'existence d'une homotopie $\varphi : X \times I \to X$ telle que $\varphi_0 = \mathrm{id}$ et que $\varphi(X \times]0,1]) \subset X \setminus A$ (voir [29]). En outre, un fermé A d'un rétracte absolu de voisinage X est un Z-ensemble si, et seulement si, il est localement homotopiquement négligeable dans X; par suite, si $A \supset B$ sont des fermés de X tels que B soit un Z-ensemble et $A \setminus B$ localement homotopiquement négligeable dans X, alors A est un Z-ensemble. Une fonction $f : Y \to Z$ est appelée un *Z-plongement* si c'est un plongement et si $f(Y)$ est un Z-ensemble dans Z.

Par un *k-tuplet* $(X_1, \ldots, X_k)$, nous entendons un espace X_1 et des sous-espaces $X_2 \supset \ldots \supset X_k$; si $k = 2$ (resp. 3), nous parlerons de *couple* (resp. *triplet*). Une classe $\mathcal{C}$ de k-tuplets est dite *topologique* si tout k-tuplet homéomorphe à un k-tuplet appartenant à $\mathcal{C}$ appartient à $\mathcal{C}$. Elle est dite *additive* si lorsque $(X_1, \ldots, X_k)$ est un k-tuplet avec $X_1 = X_1^0 \cup X_1^1$, où X_1^0 et X_1^1 sont des fermés tels que les k-tuplets $(X_1^j, X_1^j \cap X_2, \ldots, X_1^j \cap X_k)$ appartiennent à $\mathcal{C}$ pour $j = 0, 1$, alors $(X_1, \ldots, X_k)$ appartient à $\mathcal{C}$. Elle est *héréditaire pour les fermés* (resp. *ouverts*) si, pour tout k-tuplet $(X_1, \ldots, X_k)$ appartenant à $\mathcal{C}$ et pour tout fermé (resp. ouvert) F de X_1, $(F, F \cap X_2, \ldots, F \cap X_k)$ appartient à $\mathcal{C}$. Pour tout ordinal dénombrable α, nous noterons $\mathcal{M}_\alpha$ la classe des espaces qui sont absolument des boréliens de classe multiplicative α. $\mathcal{K}$ désignera la classe des compacts. Si $\mathcal{C}$ est une classe topologique de k-tuplets, nous noterons $(\mathcal{M}_1, \mathcal{C})$ (resp. $(\mathcal{K}, \mathcal{C})$) la classe des $(k+1)$-tuplets $(X_0, X_1, \ldots, X_k)$, où $X_0 \in \mathcal{M}_1$ (resp. $\mathcal{K}$) et $(X_1, \ldots, X_k)$ appartient à $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_k$ sont des classes d'espaces, nous noterons $(\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_k)$ la classe des k-tuplets $(C_1, \ldots, C_k)$ tels que C_i appartienne à $\mathcal{C}_i$ pour $i = 1, \ldots, k$. Si $(X_1, \ldots, X_k)$ est un k-tuplet, nous noterons $\mathcal{F}_0(X_1, \ldots, X_k)$ la classe des k-tuplets homéomorphes à un k-tuplet de la forme $(F, F \cap X_2, \ldots, F \cap X_k)$, où F est un fermé de X_1.

Si $(K_1, \ldots, K_k)$ est un k-tuplet, un k-tuplet $(X_1, \ldots, X_k)$ où X_1 est un rétracte absolu de voisinage est *$(K_1, \ldots, K_k)$-universel* si, pour toute fonction continue f de K_1 dans X_1 et tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X_1, il existe un Z-plongement g de K_1 dans X_1 qui est $\mathcal{U}$-proche de f et vérifie $g^{-1}(X_i) = K_i$ pour $i = 1, \ldots, k$. $(X_1, \ldots, X_k)$ est *fortement* $(K_1, \ldots, K_k)$-*universel* si, pour tout fermé D de K_1, toute fonction continue f de K_1 dans X_1 dont la restriction à D est un Z-plongement vérifiant $(f|D)^{-1}(X_i) = K_i \cap D$ pour $i = 1, \ldots, k$, et tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X_1, il existe un Z-plongement g de K_1 dans X_1 qui est $\mathcal{U}$-proche de f et vérifie $g|D =$

$f|D$ et $g^{-1}(X_i) = K_i$ pour $i = 1, \ldots, k$. Si $\mathcal{C}$ est une classe de k-tuplets, $(X_1, \ldots, X_k)$ est (*fortement*) $\mathcal{C}$-*universel* s'il est (fortement) $(K_1, \ldots, K_k)$-universel pour tout $(K_1, \ldots, K_k) \in \mathcal{C}$.

2.1. Proposition. *Soit $\mathcal{C}$ une classe de k-tuplets topologique et héréditaire pour les fermés, et soit $(X_1, \ldots, X_k)$ un k-tuplet où X_1 est un rétracte absolu de voisinage. Si $(X_1, \ldots, X_k)$ est fortement $\mathcal{C}$-universel, alors, pour tout ouvert U de X_1, $(U, U \cap X_2, \ldots, U \cap X_k)$ est fortement $\mathcal{C}$-universel.*

2.2. Proposition. *Soit $\mathcal{C}$ une classe de k-tuplets topologique et héréditaire pour les fermés et les ouverts, et soit $(X_1, \ldots, X_k)$ un k-tuplet où X_1 est un rétracte absolu de voisinage. Si tout Z-ensemble dans X_1 est un Z-ensemble au sens fort et si, pour tout ouvert U de X_1, $(U, U \cap X_2, \ldots, U \cap X_k)$ est $\mathcal{C}$-universel, alors $(X_1, \ldots, X_k)$ est fortement $\mathcal{C}$-universel.*

Ces deux propositions sont les généralisations immédiates aux k-tuplets des propositions 2.1 et 2.2 de [2], et les arguments de [2] s'appliquent encore à leur vérification.

2.3. Proposition. *Soit $\mathcal{C}$ une classe de k-tuplets topologique et héréditaire pour les fermés et les ouverts. Soient $X_1 \supset \ldots \supset X_k$ des sous-ensembles de ℓ^2 tels que $\ell^2 \setminus X_1$ soit localement homotopiquement négligeable dans ℓ^2. Si $(\ell^2, X_1, \ldots, X_k)$ est fortement $(\mathcal{M}_1, \mathcal{C})$-universel, alors $(X_1, \ldots, X_k)$ est fortement $\mathcal{C}$-universel.*

Démonstration. Il résulte de la proposition 1.7 de [2] que tout Z-ensemble dans X_1 est un Z-ensemble au sens fort, donc, d'après la proposition 2.2, il suffit de vérifier que, pour tout ouvert U de X_1, $(U, U \cap X_2, \ldots, U \cap X_k)$ est $\mathcal{C}$-universel. Soient $(K_1, \ldots, K_k) \in \mathcal{C}$, f une fonction continue de K_1 dans U et $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un recouvrement ouvert de U. Pour tout $\alpha \in A$, soit U'_α un ouvert de ℓ^2 tel que $U'_\alpha \cap X_1 = U_\alpha$, et soient $\mathcal{U}' = \{U'_\alpha\}_{\alpha \in A}$ et $U' = \bigcup_{\alpha \in A} U'_\alpha$; alors $U' \cap X_1 = U$. Le théorème de Lavrentieff nous permet de trouver un espace topologiquement complet K contenant K_1 et une fonction continue $\widehat{f}$ de K dans U' prolongeant f. D'après la proposition 2.1, $(U', U, U \cap X_2, \ldots, U \cap X_k)$ est fortement $(\mathcal{M}_1, \mathcal{C})$-universel, donc nous pouvons trouver un Z-plongement $\widehat{g} : K \to U'$ qui est $\mathcal{U}'$-proche de $\widehat{f}$ et vérifie $\widehat{g}^{-1}(U \cap X_i) = K_i$ pour $i = 1, \ldots, k$. Alors, $g = \widehat{g}|K_1$ est $\mathcal{U}$-proche de f et le lemme 2.6 de [7] garantit que $g(K_1) = \widehat{g}(K) \cap U$ est un Z-ensemble dans X_1. La proposition en résulte.

La notion d'universalité forte fournit un cadre systématique pour la classification de certains k-tuplets fréquemment rencontrés dans la nature. Soit $\mathcal{C}$ une classe de k-tuplets topologique, additive et héréditaire pour les fermés. Un k-tuplet $(X_1, \ldots, X_k)$ de sous-ensembles de ℓ^2 est dit $\mathcal{C}$-*absorbant* dans ℓ^2 s'il vérifie les conditions suivantes :

(a) $\ell^2 \setminus X_1$ est localement homotopiquement négligeable dans ℓ^2,

(b) $X_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$ où, pour tout n, Z_n est un Z-ensemble dans X_1 et $(Z_n, Z_n \cap X_2, \dots, Z_n \cap X_k)$ appartient à $\mathcal{C}$,

(c) $(X_1, \dots, X_k)$ est fortement $\mathcal{C}$-universel.

Cette définition est une généralisation immédiate de la notion d'ensemble $\mathcal{C}$-absorbant introduite dans [2] par Bestvina et Mogilski. Ici encore, nous avons un résultat d'unicité :

2.4. THÉORÈME. *Si $(X_1, \dots, X_k)$ et $(X'_1, \dots, X'_k)$ sont deux k-tuplets $\mathcal{C}$-absorbants dans ℓ^2, alors $(X_1, \dots, X_k)$ et $(X'_1, \dots, X'_k)$ sont homéomorphes.*

Ce théorème généralise le théorème 3.1 de [2] et il suffit de quelques adaptations de détails à la démonstration de ce dernier pour l'obtenir. Ces modifications sont indiquées dans [8] pour un cas particulier, mais tout ce qui est dit dans [8] s'applique aussi ici. Comme il est aussi remarqué dans [8], il est possible de modifier la démonstration du théorème 5.3 de [2] pour obtenir une caractérisation topologique des k-tuplets absorbants indépendante de tout plongement dans l'espace de Hilbert.

Bien que deux sous-ensembles $\mathcal{C}$-absorbants X et X' de ℓ^2 soient toujours homéomorphes, il n'existe pas nécessairement d'homéomorphisme de ℓ^2 sur lui-même envoyant X sur X'. Le premier exemple de ce type a été donné dans [9], et un autre exemple se trouve dans [11] et [16]. Ces deux exemples n'ont rien de pathologique ni d'artificiel; ce sont des espaces classiques de l'analyse fonctionnelle, et le théorème suivant leur est applicable.

2.5. THÉORÈME. *Pour $i = 1, 2$, soient $(X^i_1, \dots, X^i_k)$ deux k-tuplets de sous-ensembles de $X = \ell^2$ ou Q vérifiant*

(i) *X^i_1 est contenu dans une réunion dénombrable de Z-ensembles de X,*

(ii) *$(X, X^i_1, \dots, X^i_k)$ est fortement $\mathcal{F}_0(X, X^i_1, \dots, X^i_k)$-universel.*

Alors, si $\mathcal{F}_0(X, X^1_1, \dots, X^1_k) = \mathcal{F}_0(X, X^2_1, \dots, X^2_k)$, les $(k+1)$-tuplets $(X, X^1_1, \dots, X^1_k)$ et $(X, X^2_1, \dots, X^2_k)$ sont homéomorphes.

La démonstration de ce théorème est la même pour $X = \ell^2$ ou Q. Pour $X = \ell^2$, elle est donnée en détails dans un cas particulier au théorème 2.1 de [10]; l'argument s'applique au cas général. Pour $X = Q$, l'argument est semblable à celui de la démonstration du théorème 2.1 de [17]. Remarquons que si y_i est un point quelconque de X^i_k, il est même possible de trouver un homéomorphisme h de $(X, X^1_1, \dots, X^1_k)$ sur $(X, X^2_1, \dots, X^2_k)$ tel que $h(y_1) = y_2$ (car l'homogénéité de X permet de supposer que $y_1 = y_2$, et il suffit alors, dans la démonstration du théorème 2.1 de [10], de prendre $X_1 = \{y_1\}$ et $f_1 = \text{identité}$).

La notion d'ensemble absorbant au sens de [2], que nous utilisons ici, diffère des ensembles absorbants qui ont été utilisés dans quelques articles ultérieurs ([16], [17] et [23]). Ces derniers vivent dans Q ou ℓ^2 et, pour les classes $\mathcal{C}$ usuelles, ce sont des copies X d'un ensemble $\mathcal{C}$-absorbant dans Q (resp. ℓ^2) telles que (Q, X) (resp. (ℓ^2, X)) soit fortement $(\mathcal{K}, \mathcal{C})$ (resp. $(\mathcal{M}_1, \mathcal{C})$)-universel, c'est-à-dire un cas particulier des couples (Q, X) ou (ℓ^2, X) auxquels le théorème 2.5 est applicable. La plus grande généralité fournie par les théorèmes 2.4, 2.5 et par le théorème 5.3 de [2] semble nécessaire pour les applications car, bien que tous les espaces concrets X aient des complétions naturelles $\widetilde{X}$ homéomorphes à Q ou à ℓ^2, la structure topologique de ces couples concrets $(\widetilde{X}, X)$ ne dépend pas seulement de X et $\widetilde{X}$ et peut même, comme l'illustrera la section 5, être très pathologique.

Nous aurons besoin d'une caractérisation topologique du triplet $(\mathbb{R}^\infty \times (\mathbb{R}^\infty)^\infty, \mathbb{R}^\infty \times \Sigma^\infty, \Sigma \times \Sigma^\infty)$. Compte-tenu du théorème 2.5, elle nous sera fournie par la proposition suivante. Nous noterons $(\mathcal{M}_2, \mathcal{F}_\sigma)$ la classe des couples (A, B) tels que $A \in \mathcal{M}_2$ et que B soit un F_σ dans A. Pour simplifier, nous écrirons $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{F}_\sigma)$ au lieu de $(\mathcal{M}_1, (\mathcal{M}_2, \mathcal{F}_\sigma))$.

2.6. Proposition. $(\mathbb{R}^\infty, \Sigma) \times \Sigma^\infty$ *est* $(\mathcal{M}_2, \mathcal{F}_\sigma)$*-absorbant dans* $\mathbb{R}^\infty \times (\mathbb{R}^\infty)^\infty$ *et le triplet* $(\mathbb{R}^\infty \times (\mathbb{R}^\infty)^\infty, \mathbb{R}^\infty \times \Sigma^\infty, \Sigma \times \Sigma^\infty)$ *est fortement* $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{F}_\sigma)$*-universel.*

Démonstration. La seule condition de la définition d'un couple absorbant nécessitant une vérification est l'universalité forte. D'après la proposition 2.3, il suffit de vérifier la $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{F}_\sigma)$-universalité forte du triplet $T = (\mathbb{R}^\infty \times (\mathbb{R}^\infty)^\infty, \mathbb{R}^\infty \times \Sigma^\infty, \Sigma \times \Sigma^\infty)$. Comme $((\mathbb{R}^\infty)^\infty, \Sigma^\infty)$ est homéomorphe à $((\mathbb{R}^\infty)^\infty, \Sigma^\infty) \times \mathbb{R}^\infty$, T est homéomorphe à $T \times \mathbb{R}^\infty$, et le théorème 3.1 et la remarque 3.7 de [12] entraînent que T est fortement $\mathcal{F}_0(T)$-universel. Il suffit donc de montrer que $\mathcal{F}_0(T) = (\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{F}_\sigma)$. Puisque T appartient à $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{F}_\sigma)$, cette classe contient $\mathcal{F}_0(T)$. Inversement, soit $(A, B, C) \in (\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{F}_\sigma)$. Soient A' une compactification de A et C' un sous-ensemble σ-compact de A' tel que $C' \cap B = C$. Il existe une fonction continue $f : A' \to \mathbb{R}^\infty$ telle que $f^{-1}(\Sigma) = C'$. Puisque $((\mathbb{R}^\infty)^\infty, \Sigma^\infty)$ est fortement $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$-universel ([11], proposition 4.1), il y a un plongement fermé g de A dans $(\mathbb{R}^\infty)^\infty$ tel que $g^{-1}(\Sigma^\infty) = B$. Alors, $h = (f|A, g)$ est un plongement fermé de A dans $\mathbb{R}^\infty \times (\mathbb{R}^\infty)^\infty$ tel que $h^{-1}(\mathbb{R}^\infty \times \Sigma^\infty) = B$ et $h^{-1}(\Sigma \times \Sigma^\infty) = C$. L'inclusion $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{F}_\sigma) \subset \mathcal{F}_0(T)$ en résulte.

Nous rencontrerons dans cet article deux couples dont les deux membres sont homéomorphes à Σ^∞ : le couple $(\mathbb{R}^\infty, \Sigma) \times \Sigma^\infty$ de la proposition précédente et le couple $((\mathbb{R}^\infty)^\infty, \Sigma^\infty) \times \Sigma^\infty$, qui est absorbant pour la classe $(\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_2)$. Alors que $(\mathbb{R}^\infty \setminus \Sigma) \times \Sigma^\infty$ est encore homéomorphe à Σ^∞, il n'en est pas de même de $((\mathbb{R}^\infty)^\infty \setminus \Sigma^\infty) \times \Sigma^\infty$, qui est un ensemble absorbant pour la petite classe borélienne $\mathcal{F}_2^2$ des ensembles qui sont différence de deux $F_{\sigma\delta}$. En fait, toutes les petites classes boréliennes $\mathcal{F}_\alpha^\beta$ avec $\alpha \geq 2$ admettent des ensembles absorbants et nous en esquisserons maintenant la construction car, aux notations près, elle n'est pas plus compliquée que la seule vérification du cas particulier dont nous avons besoin.

Rappelons que, si $\alpha' = \alpha + 1$ est un ordinal dénombrable non limite ≥ 2, les ensembles ambigus de classe α' se répartissent en petites classes $\mathcal{F}_\alpha^\beta$, où β est un ordinal dénombrable (voir [26], §33, IV). Un espace X appartient à $\mathcal{F}_\alpha^\beta$ si, quand il est plongé dans un espace complet, il est représantable par une série alternée de type β

$$X = (X_0 \setminus X_1) \cup (X_2 \setminus X_3) \cup \ldots \cup (X_\omega \setminus X_{\omega+1}) \cup \ldots,$$

où $\{X_\gamma : 0 \leq \gamma < \beta\}$ est une famille décroissante d'ensembles appartenant à $\mathcal{M}_\alpha$.

Fixons les ordinaux dénombrables α, β avec $\alpha \geq 2$. Soit Ω_α un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^\infty$ qui est $\mathcal{M}_\alpha$-absorbant dans $\mathbb{R}^\infty$ et tel que $(\mathbb{R}^\infty, \Omega_\alpha)$ soit fortement $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_\alpha)$-universel (des exemples concrets de tels espaces se trouvent dans [12]). Pour $0 \leq \gamma < \beta$, soit (R_γ, F_γ) une copie de $(\mathbb{R}^\infty, \Omega_\alpha)$; notant $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, soit $(\overline{R}_\gamma, F_\gamma)$ la copie correspondante de $(\overline{\mathbb{R}}^\infty, \Omega_\alpha)$. Soient $R = \prod_{0\leq\gamma<\beta} R_\gamma$ et $\overline{R} = \prod_{0\leq\gamma<\beta} \overline{R}_\gamma$. Pour $0 \leq \gamma < \beta$, posons $Y_\gamma = F_0 \times \ldots \times F_\gamma \times R_{\gamma+1} \times \ldots$; alors Y_γ appartient à $\mathcal{M}_\alpha$, donc

$$\Gamma_\alpha^\beta = (Y_0 \setminus Y_1) \cup (Y_2 \setminus Y_3) \cup \ldots$$

appartient à $\mathcal{F}_\alpha^\beta$.

2.7. Proposition. (a) *Γ_α^β est $\mathcal{F}_\alpha^\beta$-absorbant dans R.*

(b) *(R, Γ_α^β) est fortement $(\mathcal{M}_1, \mathcal{F}_\alpha^\beta)$-universel.*

(c) *$(\overline{R}, \Gamma_\alpha^\beta)$ est fortement $(\mathcal{K}, \mathcal{F}_\alpha^\beta)$-universel.*

Démonstration. (a) Ici encore, seule l'universalité forte nécessite vérification. D'après la proposition 2.3, elle résulte de (b).

(b) Remarquons d'abord que, (R_0, F_0) étant homéomorphe à $(R_0, F_0) \times \mathbb{R}^\infty$, il y a un homéomorphisme de R sur $R \times \mathbb{R}^\infty$ envoyant Y_γ sur $Y_\gamma \times \mathbb{R}^\infty$ pour $0 \leq \gamma < \beta$. Alors, la démonstration du théorème 3.1 et la remarque 3.7 de [12], appliquées à $E = R$ et $E_0 = \prod_{0\leq\gamma<\beta} F_\gamma$, montrent que si $C \supset D$ sont des fermés de R et $f : C \to R$ une fonction continue dont la restriction à D est un Z-plongement vérifiant $(f|D)^{-1}(Y_\gamma) = D \cap Y_\gamma$ pour $0 \leq \gamma < \beta$, alors f peut être approximée par des Z-plongements g tels que $g|D = f|D$ et $g^{-1}(Y_\gamma) = C \cap Y_\gamma$ pour $0 \leq \gamma < \beta$.

Soient maintenant $(G, X) \in (\mathcal{M}_1, \mathcal{F}_\alpha^\beta)$, H un fermé de G et f une fonction continue de G dans R telle que $f|H$ soit un Z-plongement vérifiant $(f|H)^{-1}(\Gamma_\alpha^\beta) = H \cap X$. Soit $X = (X_0 \setminus X_1) \cup (X_2 \setminus X_3) \cup \ldots$, où $\{X_\gamma : 0 \leq \gamma < \beta\}$ est une famille décroissante de sous-ensembles de G appartenant à $\mathcal{M}_\alpha$. Posant, pour $0 \leq \gamma < \beta$, $X'_\gamma = (X_\gamma \setminus H) \cup (f|H)^{-1}(Y_\gamma)$, nous obtenons une nouvelle famille décroissante d'ensembles appartenant à $\mathcal{M}_\alpha$ vérifiant encore $X = (X'_0 \setminus X'_1) \cup (X'_2 \setminus X'_3) \cup \ldots$, mais en outre $X'_\gamma \cap H = (f|H)^{-1}(Y_\gamma)$

pour $0 \leq \gamma < \beta$. La remarque du début de la démonstration montre alors que, pour prouver la possibilité d'approximer f par des Z-plongements g vérifiant $g|H = f|H$ et $g^{-1}(\Gamma_\alpha^\beta) = X$, il suffit de montrer qu'il y a un plongement fermé φ de G dans R tel que $\varphi^{-1}(Y_\gamma) = X'_\gamma$ pour $0 \leq \gamma < \beta$. Puisque (R_γ, F_γ) est $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_\alpha)$-universel, il y a, pour tout γ, un plongement fermé φ_γ de G dans R_γ tel que $\varphi_\gamma^{-1}(F_\gamma) = X'_\gamma$; alors $\varphi = \prod_{0\leq\gamma<\beta} \varphi_\gamma$ convient.

(c) résulte de (b) par un argument général : soient $(C, X) \in (\mathcal{K}, \mathcal{F}_\alpha^\beta)$, D un fermé de C et f une fonction continue de C dans $\overline{R}$ telle que $f|D$ soit un Z-plongement vérifiant $(f|D)^{-1}(\Gamma_\alpha^\beta) = X \cap D$. Pour approximer f par un Z-plongement g vérifiant $g|D = f|D$ et $g^{-1}(\Gamma_\alpha^\beta) = X$, on procède en deux étapes. Utilisant le fait que $f(D)$ est un Z-ensemble et $\overline{R} \setminus R$ localement homotopiquement négligeable dans $\overline{R}$, on approxime d'abord f par une fonction continue h telle que $h|D = f|D$ et $h(C \setminus D) \subset R \setminus f(D)$. Utilisant le fait que $(R \setminus f(D), \Gamma_\alpha^\beta \setminus f(D))$ est fortement $(\mathcal{M}_1, \mathcal{F}_\alpha^\beta)$-universel ((b) et proposition 2.1), on approxime ensuite $h|C \setminus D$ par un Z-plongement g' de $C \setminus D$ dans $R \setminus f(D)$ tel que $g'^{-1}(\Gamma_\alpha^\beta) = X \setminus D$. Si l'approximation est suffisamment bonne (par exemple $d(g'(x), h(x)) < d(h(x), f(D))$), alors g s'obtient en posant $g|C \setminus D = g'$ et $g|D = f|D$.

2.8. Remarque. Soit $\alpha = \beta = 2$. Nous pouvons alors prendre $((\mathbb{R}^\infty)^\infty, \Sigma^\infty)$ pour $(\mathbb{R}^\infty, \Omega_2)$. La démonstration précédente montre que $(\overline{R}, Y_0, Y_1)$ est fortement $(\mathcal{K}, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_2)$-universel. Le même argument s'applique aussi pour montrer que, si $Y'_0 = \Sigma^\infty \times (\overline{\mathbb{R}}^\infty)^\infty$, alors $(\overline{R}, Y'_0, Y_1)$ est aussi fortement $(\mathcal{K}, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_2)$-universel, et les triplets $(\overline{R}, Y_0, Y_1)$ et $(\overline{R}, Y'_0, Y_1)$ sont homéomorphes d'après le théorème 2.5. Puisque $(\overline{\mathbb{R}}^\infty, \Sigma)$ est homéomorphe à (Q, B), $(\overline{R}, Y'_0, Y_1)$ est homéomorphe à $(Q^\infty \times Q^\infty, B^\infty \times Q^\infty, B^\infty \times B^\infty)$, et Γ_2^2 est homéomorphe à $B^\infty \times (Q^\infty \setminus B^\infty)$.

L'ensemble $\Gamma = \Gamma_2^2$ a fait sa première apparition dans [8] sous la forme $\mathcal{R} \setminus \mathcal{C}$, où $\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{C}$) est le sous-espace de $\mathcal{L}^1([0,1])$ formé des éléments ayant un représentant intégrable au sens de Riemann (resp. continu). Il est depuis apparu implicitement sous divers déguisements. Pour $0 < p < q$, soit $\widetilde{\ell}^p = \bigcap_{p<p'} \ell^{p'}$, avec la topologie induite par ℓ^q; il est prouvé dans [11] et [16] que $\widetilde{\ell}^p$ est homéomorphe à Σ^∞, et les arguments de ces articles s'adaptent pour montrer que $\widetilde{\ell}^{p_1} \setminus \widetilde{\ell}^{p_2}$ est homéomorphe à Γ si $p_2 < p_1 < q$. Le théorème 1.2 de [17] montre que, si $\overline{\mathrm{Dim}}_{\geq k}$ est le sous-ensemble de 2^Q formé des compacts uniformément de dimension $\geq k$, alors $\overline{\mathrm{Dim}}_{\geq k} \setminus \overline{\mathrm{Dim}}_{\geq k+1}$ est homéomorphe à Γ pour $k \geq 1$; un résultat analogue pour la dimension cohomologique résulte du théorème 6.1 de [18].

Pour la proposition suivante, soit $T_0 = (Q^\infty \times Q^\infty, B^\infty \times Q^\infty, B^\infty \times B^\infty) \setminus \{y_0\}$, où y_0 est un point fixé de $B^\infty \times B^\infty$.

2.9. Proposition. (a) *Pour tout* $y \in Q^\infty \times Q^\infty$, $(Q^\infty \times Q^\infty, B^\infty \times Q^\infty, B^\infty \times B^\infty) \setminus \{y\}$ *est homéomorphe à* T_0.

(b) *Un triplet* (X, Y, Z) *est homéomorphe à* T_0 *si*, *et seulement si*, *il vérifie les conditions suivantes* :

(i) X *est homéomorphe à* $Q \setminus \{point\}$,
(ii) (Y, Z) *appartient à* $(\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_2)$,
(iii) Y *est contenu dans une réunion dénombrable de* Z*-ensembles de* X,
(iv) (X, Y, Z) *est fortement* $(\mathcal{K}, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_2)$*-universel.*

Démonstration. Compte-tenu de la remarque 2.8, il est facile de voir que T_0 vérifie les conditions (i)–(iv). Inversement, supposons que (X, Y, Z) vérifie ces conditions. Soit $\widetilde{X} = X \cup \{\infty\}$ le compactifié d'Alexandroff de X, qui est homéomorphe à Q, et soient $\widetilde{Y} = Y \cup \{\infty\}$ et $\widetilde{Z} = Z \cup \{\infty\}$. Il est facile de voir que $(\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{Z}) \in (\mathcal{K}, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_2)$, que $\widetilde{Y}$ est contenu dans une réunion dénombrable de Z-ensembles de $\widetilde{X}$ et que $(\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{Z})$ est fortement $(\mathcal{K}, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_2)$-universel. D'après le théorème 2.5, il y a un homéomorphisme h de $(\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{Z})$ sur $(Q^\infty \times Q^\infty, B^\infty \times Q^\infty, B^\infty \times B^\infty)$ et, comme il est remarqué après ce théorème, h peut être choisi de façon que $h(\infty) = y_0$, ce qui entraîne (b).

Pour prouver (a), il suffit alors de montrer que $(Q^\infty \times Q^\infty, B^\infty \times Q^\infty, B^\infty \times B^\infty) \setminus \{y\}$ vérifie les conditions (i)–(iv), ce qui est facile et laissé au lecteur.

3. Le triplet $(2^{\mathbb{R}^2}, 2_L^{\mathbb{R}^2}, \mathrm{ANR}(\mathbb{R}^2))$**.** Dans cette section, nous appliquons la proposition 2.9 au triplet $(2^{\mathbb{R}^2}, 2_L^{\mathbb{R}^2}, 2_L^{\mathbb{R}^2} \setminus \mathrm{ANR}(\mathbb{R}^2))$ pour prouver le résultat suivant :

3.1. Théorème. $(2^{\mathbb{R}^2}, 2_L^{\mathbb{R}^2}, \mathrm{ANR}(\mathbb{R}^2))$ *est homéomorphe à* $(Q^\infty \times Q^\infty, B^\infty \times Q^\infty, B^\infty \times (Q^\infty \setminus B^\infty)) \setminus \{point\}$.

D'après Curtis [13], $2^{\mathbb{R}^2}$ est homéomorphe à $Q \setminus \{\text{point}\}$. Les conditions (ii)–(iv) de 2.9 résulterons de 3.2, 3.4, 3.5 et 3.9 ci-dessous. Nous utiliserons de façon répétée le fait qu'un compact de $\mathbb{R}^2$ est un rétracte absolu de voisinage si, et seulement si, il est localement connexe et son complémentaire n'a qu'un nombre fini de composantes [3, chap. V, théorème (14.1)].

Il est prouvé dans [25] (voir aussi [23]) que $L(X)$ est un $F_{\sigma\delta}$ dans $C(X)$. Comme la démonstration utilise uniquement le fait qu'un continu est localement connexe si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il est réunion d'un nombre fini de continus de diamètre inférieur à ε et que, en l'absence de connexité globale, cette même propriété caractérise les compacts localement connexes, le même argument s'applique pour prouver le lemme suivant :

3.2. Lemme. $2_L^{\mathbb{R}^2}$ *est un* $F_{\sigma\delta}$ *dans* $2^{\mathbb{R}^2}$.

Pour $n \geq 1$, soit $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des compacts de $\mathbb{R}^2$ dont le complémentaire a au plus n composantes. Soit $\mathcal{E} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_n$.

3.3. LEMME. *$\mathcal{E}$ est un $G_{\delta\sigma}$ dans $2^{\mathbb{R}^2}$.*

Démonstration. Notons que, pour un compact A de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2 \setminus A$ a au plus n composantes si, et seulement si, pour tout sous-ensemble $F \subset \mathbb{R}^2 \setminus A$ de cardinal $n+1$, deux au moins des points de F sont reliés par un arc disjoint de A. Fixons $n \geq 1$. Soit E un sous-ensemble dénombrable partout dense de $\mathbb{R}^2$, et soit $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$ une énumération des sous-ensembles de E de cardinal $n+1$. Pour tout k, soit

$$\mathcal{P}_k = \{A \in 2^{\mathbb{R}^2} : A \cap F_k \neq \emptyset\} \cup \{A \in 2^{\mathbb{R}^2} : \exists x \neq y \text{ dans } F_k \text{ et un chemin disjoint de } A \text{ reliant } x \text{ à } y\}.$$

Alors, $\mathcal{P}_k$ est la réunion d'un fermé et d'un ouvert, donc est un G_δ. Par suite, $\mathcal{E}_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}_k$ est aussi un G_δ, et $\mathcal{E}$ est un $G_{\delta\sigma}$.

Puisque $\mathrm{ANR}(\mathbb{R}^2) = 2_L^{\mathbb{R}^2} \cap \mathcal{E}$, les deux lemmes précédents entraînent

3.4. COROLLAIRE. $\mathrm{ANR}(\mathbb{R}^2)$ *est la différence de deux $F_{\sigma\delta}$ de $2^{\mathbb{R}^2}$, et $2_L^{\mathbb{R}^2} \setminus \mathrm{ANR}(\mathbb{R}^2)$ est un $F_{\sigma\delta}$ dans $2^{\mathbb{R}^2}$.*

3.5. LEMME. *$2_L^{\mathbb{R}^2}$ est contenu dans une réunion dénombrable de Z-ensembles de $2^{\mathbb{R}^2}$.*

Démonstration. Un compact localement connexe est soit fini, soit de dimension ≥ 1. L'ensemble des sous-ensembles finis de $\mathbb{R}^2$ est réunion dénombrable de Z-ensembles, et son complémentaire est localement homotopiquement négligeable dans $2^{\mathbb{R}^2}$ (voir [14]); comme l'ensemble des compacts de dimension ≥ 1 est un F_σ [27, §40, IV] contenu dans ce complémentaire, le lemme en résulte.

Les trois lemmes suivants contiennent des constructions auxiliaires nécessaires à la vérification de l'universalité forte.

Soit $\widetilde{c}_0 = \{x \in Q : \lim x_n = 0\}$.

3.6. LEMME. *Si F est un sous-ensemble de type $F_{\sigma\delta}$ d'un compact K, alors il existe une fonction continue $\varphi = (\varphi_n) : K \to Q$ vérifiant*

(i) $\varphi^{-1}(\widetilde{c}_0) = F$,

(ii) *si x, x' sont deux points distincts de K, il y a une infinité d'indices n tels que $\varphi_n(x) \neq \varphi_n(x')$.*

Démonstration. Soit $s_0 = \{x \in \mathbb{R}^\infty : \lim x_n = 0\}$. D'après le lemme 4.5 de [6], il y a une fonction continue $\psi = (\psi_n) : K \to \mathbb{R}^\infty$ telle que $\psi^{-1}(s_0) = F$. Soit $\alpha = (\alpha_n)$ un plongement de K dans Q tel que si x et x'

sont deux points distincts de K, il y ait une infinité d'indices n pour lesquels $\alpha_n(x) \neq \alpha_n(x')$. Alors, la fonction φ définie par

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{2n} &= \frac{|\psi_n|}{1+|\psi_n|}, \\ \varphi_{2n-1} &= \frac{1}{n}\alpha_n, \end{aligned}\right\} \quad n \geq 1,$$

a les propriétés souhaitées.

3.7. Lemme. *Il existe un plongement* $S : Q \to \mathrm{c.e.}(\mathbb{R}^2)$ *tel que* $S^{-1}(L(\mathbb{R}^2)) = S^{-1}(\mathrm{AR}(\mathbb{R}^2)) = \widetilde{c}_0$.

Démonstration. La construction est une variante de celle du théorème 3.1 de [23]. Il suffit de poser, pour $x = (x_n) \in Q$,

$$S(x) = ([0,1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [-1,0]) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{1/n\} \times [-x_n, 0].$$

3.8. Lemme. *Soit A un sous-ensemble de type $F_{\sigma\delta}$ d'un compact K. Il existe une fonction continue $T : K \to L(\mathbb{R}^2)$ telle que $T^{-1}(\mathrm{ANR}(\mathbb{R}^2)) = K \setminus A$.*

Démonstration. Supposons la distance d de K bornée par 1. Soit $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, où les A_n sont des F_σ tels que $A_n \supset A_{n+1}$ pour tout n. Pour $n \geq 1$, soit $A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_n^m$, où les A_n^m sont des compacts tels que $A_n^m \subset A_n^{m+1}$ pour tout m. Définissons des fonctions $\alpha_n^m : K \to I$, $n \geq 1$, $m \geq 0$, par $\alpha_n^0(x) = 1$ et $\alpha_n^m(x) = d(x, A_n^m)$ pour $m \geq 1$. Alors, si x et n sont fixés, la suite $\{\alpha_n^m(x)\}_{m=0}^{\infty}$ est décroissante. Utilisant des coordonnées polaires, posons, pour $n \geq 1$, $m \geq 0$ et $x \in K$,

$$P_n = \{re^{i\theta} : 0 \leq r \leq 1 \text{ et } \theta = 2^{-n}\},$$

$$R_n^m(x) = \left\{re^{i\theta} : r = \frac{1}{m+1}\alpha_n^m(x) \text{ et } 2^{-(n+1)}(1 + \alpha_n^{m+1}(x)) \leq \theta \leq 2^{-n}\right\}.$$

Pour $n \geq 1$, définissons une fonction $T_n : K \to C(\mathbb{R}^2)$ par

$$T_n(x) = P_n \cup P_{n+1} \cup \Big(\bigcup_{m=0}^{\infty} R_n^m(x)\Big).$$

Il est clair que T_n est continue et que, pour tout x dans K, $T_n(x)$ est un continu localement connexe. Si $x \notin A_n$, alors $\alpha_n^m(x) > 0$ pour tout m, et l'on constate que $\mathbb{R}^2 \setminus T_n(x)$ est connexe. Si $x \in A_n$ et si m est le plus petit entier ≥ 0 tel que A_n^{m+1} contienne x, alors $P_n \cup P_{n+1} \cup R_n^m(x)$ contient une courbe simple fermée dont l'intérieur est l'unique composante bornée de $\mathbb{R}^2 \setminus T_n(x)$.

Si l'on définit $T : K \to C(\mathbb{R}^2)$ par

$$T(x) = ([0,1] \times \{0\}) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} ((2^{-n},0) + 2^{-2n} T_n(x)),$$

il est clair que T est continue et que $T(x)$ est un continu localement connexe. Si x appartient à A, il appartient à tous les A_n, et chacun des ensembles $(2^{-n},0)+2^{-2n}I^2$ contient une composante bornée de $\mathbb{R}^2 \setminus T(x)$, donc $T(x) \notin \mathrm{ANR}(\mathbb{R}^2)$. Si $x \notin A$, il y a un entier n_0 tel que $x \notin A_n$ si $n > n_0$; alors $\mathbb{R}^2 \setminus T(x)$ a au plus n_0 composantes bornées, donc $T(x) \in \mathrm{ANR}(\mathbb{R}^2)$, d'où le lemme.

Pour a dans $\mathbb{R}^2$ et $\varepsilon > 0$, nous noterons, dans toute la suite de cet article, $u(a,\varepsilon)$ l'homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $u(a,\varepsilon)(z) = a + \varepsilon z$.

3.9. Lemme. $(2^{\mathbb{R}^2}, 2_L^{\mathbb{R}^2}, 2_L^{\mathbb{R}^2} \setminus \mathrm{ANR}(\mathbb{R}^2))$ *est fortement* $(\mathcal{K}, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_2)$-*universel.*

Démonstration. Soient $(K, L_1, L_2) \in (\mathcal{K}, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_2)$, C un fermé de K et f une fonction continue de K dans $2^{\mathbb{R}^2}$ telle que $f|C$ soit un Z-plongement vérifiant $f^{-1}(2_L^{\mathbb{R}^2}) \cap C = C \cap L_1$ et $f^{-1}(\mathrm{ANR}(\mathbb{R}^2)) \cap C = C \cap (L_1 \setminus L_2)$. Etant donné un nombre $\eta > 0$, il nous faut construire un Z-plongement $g : K \to 2^{\mathbb{R}^2}$ tel que $g|C = f|C$, $g^{-1}(2_L^{\mathbb{R}^2}) = L_1$, $g^{-1}(\mathrm{ANR}(\mathbb{R}^2)) = L_1 \setminus L_2$ et que $\varrho(f(x), g(x)) < \eta$ pour tout x dans K. Puisque $f(C)$ est un Z-ensemble, nous pouvons, quitte à remplacer f par une fonction l'approchant, supposer que $f(C) \cap f(K \setminus C) = \emptyset$. Posons alors, pour x dans K,

$$\varepsilon(x) = \tfrac{1}{3} \min(\eta, \varrho(f(x), f(C))). \tag{1}$$

Le lemme 3.6 nous permet de supposer que K est un sous-ensemble de Q tel que $K \cap \widetilde{c}_0 = L_1$ et que, si $x = (x_n)$ et $x' = (x'_n)$ sont deux points distincts de K, alors $x_n \neq x'_n$ pour une infinité d'indices n. Associant à $A = L_2$ la fonction T du lemme 3.8, définissons une fonction $\Delta : K \to 2^{\mathbb{R}^2}$ par

$$\Delta(x) = ((-1,0) + S(x)) \cup T(x),$$

où S est la fonction du lemme 3.7. Il est facile de voir que Δ est continue et vérifie

$$\Delta^{-1}(2_L^{\mathbb{R}^2}) = L_1, \tag{2}$$

$$\Delta^{-1}(\mathrm{ANR}(\mathbb{R}^2)) = L_1 \setminus L_2. \tag{3}$$

D'après Curtis [14], il existe une homotopie $\Psi : 2^{\mathbb{R}^2} \times I \to 2^{\mathbb{R}^2}$ telle que $\Psi_0 = \mathrm{id}$, et que $\Psi(2^{\mathbb{R}^2} \times\,]0,1])$ soit contenu dans l'ensemble des sous-ensembles finis. Cela nous permet de construire une fonction continue $h : K \setminus C \to 2^{\mathbb{R}^2}$ vérifiant, pour tout $x \in K \setminus C$,

$$\varrho(f(x), h(x)) < \varepsilon(x), \tag{4}$$

$$h(x) \text{ est un ensemble fini.} \tag{5}$$

Définissons alors $g : K \to 2^{\mathbb{R}^2}$ par

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in C, \\ \bigcup_{a\in h(x)} u(a, \varepsilon(x))(\Delta(x)) & \text{si } x \notin C. \end{cases}$$

Si $x \notin C$, $g(x)$ est compact puisque $h(x)$ est fini. Il est facile de voir que $g|K \setminus C$ est continue. Puisque $\Delta(x) \subset [-1, 1] \times [-1, 1]$, nous avons $\varrho(\{a\}, u(a, \varepsilon)(\Delta(x))) < 2\varepsilon$, d'où

$$\varrho(h(x), g(x)) < 2\varepsilon(x) \quad \forall x \in K \setminus C, \tag{6}$$

ce qui, avec (4), garantit que $\varrho(f(x), g(x)) < 3\varepsilon(x)$ pour tout $x \in K \setminus C$. D'après (1), il en résulte que g est continue et vérifie $g(C) \cap g(K \setminus C) = \emptyset$ et $\varrho(f(x), g(x)) < \eta$ pour tout $x \in K$.

Pour voir que g est un plongement, il suffit alors de vérifier que $g|K \setminus C$ est injective. Soient x, x' deux points de $K \setminus C$ tels que $g(x) = g(x')$. Soient $h(x) = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $h(x') = \{a'_1, \ldots, a'_{n'}\}$, où les points de $h(x)$ et $h(x')$ sont ordonnés lexicographiquement (i.e. $(b_1, c_1) \le (b_2, c_2)$ si $b_1 < b_2$ ou si $b_1 = b_2$ et $c_1 \le c_2$). Posons $a_i = (b_i, c_i)$ et $a'_j = (b'_j, c'_j)$; soit l (resp. l') le plus grand entier tel que $b_l = b_1$ (resp. $b'_{l'} = b'_1$). Examinant la définition de $g(x)$, nous constatons que la borne inférieure des abscisses des points de $g(x)$ est $b_1 - \varepsilon(x)$; nous devons donc avoir $b_1 - \varepsilon(x) = b'_1 - \varepsilon(x')$; en outre, posant $M = \{b_1 - \varepsilon(x)\} \times \mathbb{R}$, nous constatons que si $z = (b_1 - \varepsilon(x), c)$ appartient à $g(x) \cap M$ et si $c \ne c_i$ pour $i = 1, \ldots, l$, alors, pour tout voisinage suffisamment petit U de z dans $g(x)$, la composante connexe de U qui contient z est contenue dans M, tandis que si $c = c_i$ pour $i = 1, \ldots, l$, il n'y a aucun voisinage U de z tel que la composante connexe de z dans U soit contenue dans M; une propriété analogue étant vraie pour les points de $g(x') \cap M$, nous devons avoir $l = l'$ et $c_i = c'_i$ pour $1 \le i \le l$. Comme la borne inférieure des ordonnées des points de $g(x) \cap M$ (resp. $g(x') \cap M$) est $c_1 - \varepsilon(x)$ (resp. $c'_1 - \varepsilon(x')$), nous avons donc $\varepsilon(x) = \varepsilon(x')$. Pour $n \ge 1$, soit $M_n = \{b_1 - (1 - 1/n)\varepsilon(x)\} \times \mathbb{R}$. Si n est assez grand, alors $M_n \cap (u(a_i, \varepsilon(x))(\Delta(x))) = M_n \cap (u(a'_j, \varepsilon(x))(\Delta(x'))) = \emptyset$ pour $i, j > l$, et la borne inférieure des ordonnées des points de $g(x) \cap M_n$ (resp. $g(x') \cap M_n$) vaut $c_1 - \varepsilon(x)x_n$ (resp. $c_1 - \varepsilon(x)x'_n$). Nous avons donc $x_n = x'_n$ pour presque tout n, d'où $x = x'$.

Pour prouver que $g^{-1}(2^{\mathbb{R}^2}_L) = L_1$ et $g^{-1}(\mathrm{ANR}(\mathbb{R}^2)) = L_1 \setminus L_2$, il suffit de vérifier que $g^{-1}(2^{\mathbb{R}^2}_L) \setminus C = L_1 \setminus C$ et $g^{-1}(\mathrm{ANR}(\mathbb{R}^2)) \cap (L_1 \setminus C) = (L_1 \setminus L_2) \setminus C$. Soit $x \in K \setminus C$. Si $x \notin L_1$, on constate, avec les notations du paragraphe précédent, que $g(x)$ n'est pas localement connexe en certains des points de

$M\cap g(x)$, tandis que si $x\in L_1$, $g(x)$ est réunion d'un nombre fini de continus localement connexes, donc est localement connexe, d'où $g^{-1}(2^{\mathbb{R}^2}_L)\setminus C = L_1\setminus C$.

Pour voir que $g^{-1}(\mathrm{ANR}(\mathbb{R}^2))\cap(L_1\setminus C) = (L_1\setminus L_2)\setminus C$, nous utiliserons le fait, qui résulte du théorème de Borsuk cité plus haut et de la dualité d'Alexander [28, p. 296], qu'un compact localement connexe X de $\mathbb{R}^2$ est un ANR si, et seulement si, son groupe de cohomologie de Čech (à coefficients entiers) $\check{H}^1(X)$ a un nombre fini de générateurs. Si X est de dimension un, alors, pour tout fermé Y de X, l'homomorphisme de $\check{H}^1(X)$ dans $\check{H}^1(Y)$ induit par l'inclusion est surjectif, donc si X est aussi un ANR, il ne peut contenir un compact localement connexe qui ne soit pas un ANR. Puisque $g(x)$ est de dimension un pour tout $x\in K\setminus C$, il résulte de (3) que $g^{-1}(\mathrm{ANR}(\mathbb{R}^2))\cap(L_1\setminus C)\subset(L_1\setminus L_2)\setminus C$.

Pour voir l'inclusion inverse, il suffit de montrer que si $x\in(L_1\setminus L_2)\setminus C$, si $a_1,\dots,a_n$ sont des points distincts de $\mathbb{R}^2$, ε un nombre >0 et si $X=\bigcup_{i=1}^n u(a_i,\varepsilon)(\Delta(x))$, alors $\check{H}^1(X)$ a un nombre fini de générateurs. Si $n=1$, cela résulte de (3). Si $n>1$ et si l'on pose $X_1=\bigcup_{i=1}^{n-1} u(a_i,\varepsilon)(\Delta(x))$ et $X_2=u(a_n,\varepsilon)(\Delta(x))$, il suffit, en raisonnant par récurrence et en utilisant la suite de Mayer–Vietoris de $(X;X_1,X_2)$, de vérifier que $X_1\cap X_2$ a un nombre fini de composantes et, pour cela, il suffit de vérifier que, pour $a_1\neq a_2$, $u(a_1,\varepsilon)(\Delta(x))\cap u(a_2,\varepsilon)(\Delta(x))$ a un nombre fini de composantes. Posant $a_i=(b_i,c_i)$, $i=1,2$, cette vérification est facile si $c_1\neq c_2$. Quand $c_1=c_2$, cela revient à vérifier que, pour tout réel $b>0$, $\Delta(x)\cap((b,0)+\Delta(x))$ n'a qu'un nombre fini de composantes. Nous laissons au lecteur le soin de le faire (quand $b=2^{-n}$ avec $n\ge 1$, remarquer qu'il n'y a qu'un nombre fini d'entiers p tels que $[(2^{-n},0)+2^{-2n}T_n(x)]\cap[(2^{-n}+2^{-p},0)+2^{-2p}I^2]=\emptyset$).

Puisque $g(x)$ est infini si $x\in K\setminus C$, $\Psi(2^{\mathbb{R}^2}\times\,]0,1])\cap g(K\setminus C)=\emptyset$, ce qui montre que $g(K\setminus C)$ est localement homotopiquement négligeable dans $2^{\mathbb{R}^2}$. Puisque $g(L)$ est un Z-ensemble, il en est donc de même de $g(K)$, d'où le lemme.

3.10. Remarque et problème. Soit $\mathrm{ANR_c}(\mathbb{R}^2)$ l'ensemble des rétractes absolus de voisinage connexes de $\mathbb{R}^2$. Il est facile d'adapter la démonstration du lemme 3.9 pour montrer que $(C(\mathbb{R}^2), L(\mathbb{R}^2), L(\mathbb{R}^2)\setminus\mathrm{ANR_c}(\mathbb{R}^2))$ est fortement $(\mathcal{K},\mathcal{M}_2,\mathcal{M}_2)$-universel. Il suffit, pour $x\notin C$, de poser

$$g(x)=\bigcup_{a\in h(x)}[u(a,\varepsilon(x))(\Delta(x))]\cup[\{a_1\}\times[a_2-2\varepsilon(x),a_2+2\varepsilon(x)]]\\ \cup[[a_1-2\varepsilon(x),a_1+2\varepsilon(x)]\times\{a_2\}],$$

où $a=(a_1,a_2)$.

Par contre, nous ignorons si $L(\mathbb{R}^2)$ est contenu dans une réunion dénombrable de Z-ensembles de $C(\mathbb{R}^2)$. C'est le seul point restant à élucider pour déterminer si $(C(\mathbb{R}^2), L(\mathbb{R}^2), \mathrm{ANR_c}(\mathbb{R}^2))$ est lui aussi homéomorphe à $(Q^\infty \times Q^\infty, B^\infty \times Q^\infty, B^\infty \times (Q^\infty \setminus B^\infty)) \setminus \{\text{point}\}$.

4. Le triplet $(\text{c.e.}(\mathbb{R}^2), \mathrm{AR}(\mathbb{R}^2), a(\mathbb{R}^2))$**.** Les méthodes que nous utiliserons pour étudier le triplet $(\text{c.e.}(\mathbb{R}^2), \mathrm{AR}(\mathbb{R}^2), a(\mathbb{R}^2))$ sont des modifications de celles développées dans [4] et [5]. Comme dans ces deux articles, il est commode d'identifier $\mathbb{R}^2$ au plan complexe $\mathbb{C}$ et, plutôt qu'avec $\mathbb{R}^2$, de travailler avec le disque unité ouvert $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Nous prouverons donc le résultat qui nous intéresse sous la forme suivante :

4.1. Théorème. $(\text{c.e.}(D), \mathrm{AR}(D), \mathrm{AR}(D) \setminus a(D))$ *est homéomorphe à* $(\mathbb{R}^\infty \times (\mathbb{R}^\infty)^\infty, \mathbb{R}^\infty \times \Sigma^\infty, \Sigma \times \Sigma^\infty)$.

Pour a dans $\mathbb{R}^2$ et $\varepsilon > 0$, nous posons $B(a,\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x-a| \le \varepsilon\}$ et $S(a,\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x-a| = \varepsilon\}$.

Nous commencerons par une observation géométrique qui permet de simplifier et de généraliser certains des arguments et résultats de [4] et [5]. Pour $\varepsilon > 0$, soit $\alpha_\varepsilon : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\alpha_\varepsilon(t) = \begin{cases} t & \text{si } \varepsilon \le t, \\ (2 - t/\varepsilon)(2t - \varepsilon) & \text{si } \varepsilon/2 \le t \le \varepsilon, \\ 0 & \text{si } t \le \varepsilon/2. \end{cases}$$

Cette fonction dépend continûment de ε et est de classe C^1 sur $]\varepsilon/2, \infty[$.

Pour a dans $\mathbb{R}^2$ et $\varepsilon > 0$, soit $k(a,\varepsilon)$ la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$k(a,\varepsilon)(a) = a,$$
$$k(a,\varepsilon)(x) = \alpha_\varepsilon(|x-a|)\frac{x-a}{|x-a|} + a \quad \text{si } x \neq a.$$

Cette fonction est l'identité hors de $B(a,\varepsilon)$, contracte $B(a,\varepsilon/2)$ en a, envoie chaque demi-droite d'origine a dans elle-même et est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus B(a,\varepsilon/2)$.

Si a est un extrémité d'un arc K, la demi-tangente à K en a est, quand elle existe, la limite, quand le point x de $K \setminus \{a\}$ tend vers a, de la demi-droite d'origine a passant par x; c'est donc une demi-droite de la forme $a + \mathbb{R}^+ e^{i\theta}$ pour un certain θ.

4.2. Lemme. *Soient* $a \in \mathbb{R}^2$, $\varepsilon > 0$ *et* K *un arc de* $\mathbb{R}^2$ *dont* a *est une extrémité et ayant en* a *la demi-tangente* $a + \mathbb{R}^+ e^{i\theta_0}$. *Alors, la fermeture* $\overline{L}$ *de* $L = k(a,\varepsilon)^{-1}(K \setminus \{a\})$ *est un arc dont l'une des extrémités est le point* $a + (\varepsilon/2)e^{i\theta_0}$ *et* $\overline{L} \cap B(a,\varepsilon/2) = \{a + (\varepsilon/2)e^{i\theta_0}\}$.

D é m o n s t r a t i o n. Evidemment, $\overline{L} \setminus L$ est un sous-ensemble non vide de $S(a,\varepsilon/2)$. Etant donné $\eta > 0$, il y a un voisinage V de a tel que tout point de $V \cap (K \setminus \{a\})$ soit de la forme $a + re^{i\theta}$ avec $\theta \in]\theta_0 - \eta, \theta_0 + \eta[$. Alors, $k(a,\varepsilon)^{-1}(V)$ est un voisinage de $B(a,\varepsilon/2)$ tel que tout point de

$k(a,\varepsilon)^{-1}(V)\cap L$ soit de la forme $a+r'e^{i\theta}$ avec $r'>\varepsilon/2$ et $\theta\in\,]\theta_0-\eta,\theta_0+\eta[$. Comme η est arbitraire, cela montre que $\{a+(\varepsilon/2)e^{i\theta}\}$ est le seul point de $\overline{L}\cap B(a,\varepsilon/2)$. Il est facile de voir que tout point de $\overline{L}$ autre que le point $a+(\varepsilon/2)e^{i\theta}$ et le point y tel que $k(a,\varepsilon)(y)$ soit l'extrémité de K distincte de a sépare $\overline{L}$, ce qui entraîne que $\overline{L}$ est un arc dont $a+(\varepsilon/2)e^{i\theta}$ est une extrémité ([31], p. 54).

4.3. Lemme. *Il existe une homotopie* $\Lambda:\mathrm{c.e.}(D)\times I\to\mathrm{c.e.}(D)$ *et une fonction continue* $\lambda:\mathrm{c.e.}(D)\times\,]0,1]\to\mathrm{c.e.}(D)$ *vérifiant*

(i) $\Lambda_0=\mathrm{id}$,

(ii) *pour* $(C,t)\in\mathrm{c.e.}(D)\times\,]0,1]$, $\Lambda(C,t)$ *est un arc ayant une paramétrisation* C^1 *par morceaux dont* $\lambda(C,t)$ *est l'une des extrémités*, *et* $\Lambda(C,t)$ *admet en* $\lambda(C,t)$ *la demi-tangente* $\lambda(C,t)+\mathbb{R}^+$.

Démonstration. Soit $\mathrm{c.e.}^*(D)$ le sous-ensemble de $\mathrm{c.e.}(D)$ formé des continus non dégénérés. Le lemme 3.3 de [4] nous donne une homotopie $\Psi:\mathrm{c.e.}(D)\times I\to\mathrm{c.e.}(D)$ vérifiant

$$\Psi_0=\mathrm{id}, \tag{1}$$

$$\Psi(\mathrm{c.e.}(D)\times\,]0,1])\subset\mathrm{c.e.}^*(D). \tag{2}$$

Quitte à reparamétrer Ψ, nous pouvons supposer que

$$\varrho(C,\Psi(C,t))\le t\quad\ \forall(C,t)\in\mathrm{c.e.}(D)\times I. \tag{3}$$

En modifiant légèrement la démonstration du lemme 5.2 de [4], nous allons construire une homotopie $\Theta:\mathrm{c.e.}^*(D)\times I\to\mathrm{c.e.}^*(D)$ et une fonction continue $\varphi:\mathrm{c.e.}^*(D)\times\,]0,1]\to D$ vérifiant

(4) $\varrho(C,\Theta(C,t))\le t\quad \forall(C,t)\in\mathrm{c.e.}^*(D)\times I$,

(5) pour $(C,t)\in\mathrm{c.e.}^*(D)\times\,]0,1]$, $\Theta(C,t)$ est un arc ayant une paramétrisation C^1 par morceaux dont $\varphi(C,t)$ est une extrémité et qui admet en $\varphi(C,t)$ la demi-tangente $\varphi(C,t)+\mathbb{R}^+$.

La fonction φ est celle utilisée dans la démonstration du lemme 5.2 de [4]. Nous prenons un chemin $\theta:[0,1]\to C(\overline{D})$ vérifiant

(6) $\theta(0)=\overline{D}$,

(7) pour $0<t\le 1$, $\theta(t)$ est un arc semi-linéaire d'extrémité 0 contenant un segment horizontal d'extrémité 0.

Utilisant ce chemin Θ à la place de celui du lemme 5.1 de [4], nous définissons alors θ par les mêmes formules que dans la démonstration du lemme 5.2 de [4], donc, pour $t>0$, nous avons

$$\Theta(C,t)=g(C,t)\circ r(C,t)(\theta(v(C,t))),$$

où $v(C,t) > 0$, $r(C,t)$ est un homéomorphisme radial de $\overline{D}$ sur un disque de centre 0 et $g(C,t)$ est une représentation conforme de domaine D telle que $g'(C,t)(0) > 0$; la condition (5) résulte alors de (7), la positivité de $g'(C,t)$ garantissant que la demi-tangente en $\varphi(C,t)$ est bien $\varphi(C,t) + \mathbb{R}^+$. Pour obtenir (4), il suffit de reparamétrer Θ et φ (la même reparamétrisation pour les deux fonctions).

Nous pouvons maintenant définir Λ et λ comme suit :

$$\begin{aligned} &\Lambda(C,0) = C, \\ &\Lambda(C,t) = \Theta(\Psi(C,t),t), \\ &\lambda(C,t) = \varphi(\Psi(C,t),t), \end{aligned} \qquad (C,t) \in \text{c.e.}(D) \times \,]0,1].$$

Le théorème 4.1 résultera du théorème 2.5, de la proposition 2.6 et des quatre lemmes suivants.

4.4. LEMME. c.e.(D) *est homéomorphe à* $\mathbb{R}^\infty$.

D é m o n s t r a t i o n. D'après [4], c.e.(D) est un rétracte absolu topologiquement complet. Il suffit donc de vérifier l'affirmation suivante, qui est une version de la caractérisation classique de Toruńczyk.

AFFIRMATION. *Soient $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de* c.e.(D) *et* $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ *une suite de fonctions continues de Q dans* c.e.(D). *Il existe alors une suite* $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ *de fonctions continues de Q dans* c.e.(D) *vérifiant*

(i) $\forall n \ge 1$, g_n *est $\mathcal{U}$-proche de* f_n,
(ii) *la famille des images* $\{g_n(Q)\}$ *est localement finie dans* c.e.(D).

Prenons une fonction $\varepsilon : \text{c.e.}(D) \to \,]0,1]$ vérifiant

(1) si C, C' appartiennent à c.e.(D) et si $\varrho(C,C') < 3\varepsilon(C)$, alors C et C' sont contenus dans un même élément de $\mathcal{U}$,

(2) $2\varepsilon(C) < d(C, \mathbb{R}^2 \setminus D)$.

Prenons ensuite une fonction continue $\omega : \text{c.e.}(D) \to \,]0,1]$ vérifiant

$$\varrho(C, \Lambda(C,\omega(C))) < \varepsilon(C). \tag{3}$$

Pour $n \ge 1$ et $x \in Q$, posons $h_n^1(x) = \Lambda(f_n(x), \omega(f_n(x)))$ et $a_n(x) = \lambda(f_n(x), \omega(f_n(x)))$. Les fonctions $h_n^1 : Q \to \text{c.e.}(D)$ et $a_n : Q \to D$ sont continues et, d'après (3), nous avons

$$\varrho(f_n(x), h_n^1(x)) < \varepsilon(f_n(x)) \quad \forall x \in Q. \tag{4}$$

Il résulte de (4) et (2) que le disque fermé $B(a_n(x), \varepsilon(f_n(x)))$ est contenu dans D. D'après les lemmes 4.2 et 4.3, la fermeture $h_n^2(x)$ de l'ensemble $k(a_n(x), \varepsilon(f_n(x)))^{-1}(h_n^1(x) \setminus \{a_n(x)\})$ est un arc ayant en commun avec $B\big(a_n(x), \frac{1}{2}\varepsilon(f_n(x))\big)$ le seul point $a_n(x) + \frac{1}{2}\varepsilon(f_n(x))$. Il est clair que $h_n^2(x)$ dépend continûment de x et, puisque $k(a_n(x), \varepsilon(f_n(x)))$ laisse invariante chaque demi-droite d'origine $a_n(x)$ et est l'identité hors de $B(a_n(x), \varepsilon(f_n(x)))$, nous avons

$$\varrho(h_n^1(x), h_n^2(x)) < \varepsilon(f_n(x)). \tag{5}$$

Pour $n \geq 1$ et x dans Q, posons

$$X_n(x) = \{a_n(x) + \tfrac{1}{4}\varepsilon(f_n(x))(1 + e^{i\theta}) : 0 \leq \theta \leq 2\pi - 1/n\}.$$

$X_n(x)$ est donc un arc du cercle de centre $a_n(x) + \frac{1}{4}\varepsilon(f_n(x))$ et de rayon $\frac{1}{4}\varepsilon(f_n(x))$ dont l'une des extrémités est le point $a_n(x) + \frac{1}{2}\varepsilon(f_n(x))$. Posons alors, pour $n \geq 1$ et $x \in Q$,

$$g_n(x) = h_n^2(x) \cup X_n(x).$$

Il est clair que $g_n(x)$ est un arc et que la fonction $g_n : Q \to \text{c.e.}(D)$ est continue. Du fait que $X_n(x)$ est contenu dans $B\big(a_n(x), \frac{1}{2}\varepsilon(f_n(x))\big)$, nous déduisons que

$$\varrho(h_n^2(x), g_n(x)) < \varepsilon(f_n(x)), \tag{6}$$

d'où, d'après (4), (5) et (6),

$$\varrho(f_n(x), g_n(x)) < 3\varepsilon(f_n(x)), \tag{7}$$

ce qui, d'après (1), entraîne que g_n est $\mathcal{U}$-proche de f_n. Si la famille $\{g_n(Q)\}_{n=1}^{\infty}$ n'était pas localement finie dans c.e.(D), il existerait une suite croissante d'indices $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ et une suite de points $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ de Q telles que la suite $\{g_{n_i}(x_i)\}$ converge vers un élément C_0 de c.e.(D). Posant $a_i = a_{n_i}(f_{n_i}(x_i))$ et $\varepsilon_i = \varepsilon(f_{n_i}(x_i))$, nous pouvons supposer que la suite $\{a_i\}$ converge vers un point a_0 de $\overline{D}$ et que la suite $\{\varepsilon_i\}$ converge vers $\varepsilon_0 \in [0, 1]$. Alors $\varepsilon_0 > 0$ car, dans le cas contraire, il résulterait de (7) que la suite $\{f_{n_i}(x_i)\}$ convergerait aussi vers C_0 et, ε étant continue, $\{\varepsilon_i\}$ convergerait vers $\varepsilon(C_0) > 0$, ce qui est contradictoire.

Evidemment, la suite $\{X_{n_i}(x_i)\}$ converge vers le cercle $S\big(a_0 + \frac{1}{4}\varepsilon_0, \frac{1}{4}\varepsilon_0\big)$, qui est donc contenu dans C_0. Aucun point y de l'intérieur de ce cercle ne peut appartenir à C_0, car sinon y serait limite d'une suite $\{y_i\}$ avec $y_i \in h_{n_i}^2(x_i)$ pour tout i, ce qui est impossible car y est intérieur au disque $B\big(a_0, \frac{1}{2}\varepsilon_0\big)$ tandis que $h_{n_i}^2(x_i)$ est disjoint de l'intérieur du disque $B\big(a_i, \frac{1}{2}\varepsilon_i\big)$. Puisque C_0 est contenu dans D, contient $S\big(a_0 + \frac{1}{4}\varepsilon_0, \frac{1}{4}\varepsilon_0\big)$ mais pas son intérieur, il sépare le plan, contrairement à l'hypothèse qu'il appartient à c.e.(D).

4.5. Lemme. *$(\mathrm{AR}(D), \mathrm{AR}(D) \setminus a(D))$ appartient à $(\mathcal{M}_2, \mathcal{F}_\sigma)$.*

Démonstration. D'après un théorème de Borsuk ([3], p. 132), nous avons $\mathrm{AR}(D) = L(D) \cap \text{c.e.}(D)$. Puisque $L(D)$ appartient à $\mathcal{M}_2$, il en est de même de $\mathrm{AR}(D)$. Soit Z_0 le sous-ensemble de $C(D)$ formé des continus réduits à un point. Pour $n \geq 1$, soit Z_n l'ensemble des continus K de $C(D)$ pour lesquels il existe des continus X_1, X_2, X_3 et des points x_1, x_2, x_3

vérifiant $K \supset X_1 \cup X_2 \cup X_3$, $X_1 \cap X_2 \cap X_3 \neq \emptyset$, $x_i \in X_i$ et $d(x_i, X_{i+1} \cup X_{i+2}) \geq 1/n$ (i modulo 3). Les Z_n, $n \geq 0$, sont fermés dans $C(D)$. Mais un rétracte absolu plan non dégénéré ou bien contient un disque, ou bien est une dendrite donc ce n'est pas un arc si, et seulement si, il contient une triode, d'où $\mathrm{AR}(D) \setminus a(D) = \mathrm{AR}(D) \cap (\bigcup_{n=0}^{\infty} Z_n)$, ce qui montre que $\mathrm{AR}(D) \setminus a(D)$ est un F_σ dans $\mathrm{AR}(D)$.

4.6. LEMME. $\mathrm{AR}(D)$ *est contenu dans une réunion dénombrable de Z-ensembles de* c.e.(D).

Démonstration. Les lemmes 3.3 et 5.2 de [4] entraînent l'existence d'une déformation instantanée de c.e.(D) en le sous-ensemble $P(D)$ des pseudo-arcs contenus dans D. Comme $P(D)$ est topologiquement complet, donc un G_δ dans c.e.(D), son complémentaire, qui contient $\mathrm{AR}(D)$, est une réunion dénombrable de Z-ensembles, d'où le lemme.

4.7. LEMME. $(\text{c.e.}(D), \mathrm{AR}(D), \mathrm{AR}(D) \setminus a(D))$ *est fortement* $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{F}_\sigma)$*-universel.*

Démonstration. D'après la proposition 2.2, il suffit de prouver que, pour tout triplet (K, L_1, L_2) appartenant à $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{F}_\sigma)$, tout ouvert U de c.e.(D), toute fonction continue f de K dans U et tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de U, il existe un Z-plongement g de K dans U qui est $\mathcal{U}$-proche de f et vérifie $g^{-1}(\mathrm{AR}(D)) = L_1$ et $g^{-1}(a(D)) = L_1 \setminus L_2$. Compactifiant K, le lemme 3.6 nous permet de supposer que K est un sous-ensemble de Q tel que $K \cap \widetilde{c}_0 = L_1$.

Prenons une fonction continue $\varepsilon : U \to \,]0,1]$ vérifiant

(1) si C appartient à U et si $C' \in$ c.e.(D) vérifie $\varrho(C, C') < 3\varepsilon(C)$, alors C et C' sont contenus dans un même élément de $\mathcal{U}$,

(2) $2\varepsilon(C) < d(C, \mathbb{R}^2 \setminus D)$.

Soit $\omega : U \to \,]0,1]$ une fonction continue vérifiant

$$\varrho(C, \Lambda(C, \omega(C))) < \varepsilon(C). \tag{3}$$

Pour x dans K, posons $h^1(x) = \Lambda(f(x), \omega(f(x)))$ et $a(x) = \lambda(f(x), \omega(f(x)))$. Les fonctions $h^1 : K \to$ c.e.(D) et $a : K \to D$ sont continues et, d'après (3), nous avons

$$\varrho(f(x), h^1(x)) < \varepsilon(f(x)) \quad \forall x \in K. \tag{4}$$

D'après (4) et (2), le disque $B(a(x), \varepsilon(f(x)))$ est contenu dans D. Soit $h^2(x)$ la fermeture de l'ensemble $k(a(x), \varepsilon(f(x)))^{-1}(h^1(x) \setminus \{a(x)\})$; d'après les lemmes 4.2 et 4.3, c'est un arc ayant en commun avec $B\big(a(x), \frac{1}{2}\varepsilon(f(x))\big)$ le seul point $a(x) + \frac{1}{2}\varepsilon(f(x))$. La fonction h^2 est continue et nous avons

$$\varrho(h^1(x), h^2(x)) < \varepsilon(f(x)). \tag{5}$$

Nous avons besoin d'une construction auxiliaire. Pour $A \subset \mathbb{R}^2$, nous posons $\text{c.e.}(A) = C(A) \cap \text{c.e.}(\mathbb{R}^2)$.

4.8. Lemme. *Il existe un plongement* $X : Q \to C(\overline{D})$ *vérifiant*

(6) $\forall x \in Q$, $X(x)$ *a un intérieur vide*,

(7) $X^{-1}(\text{c.e.}(\overline{D})) = K$,

(8) $X^{-1}(\text{AR}(\overline{D})) = L_1$,

(9) $X^{-1}(a(\overline{D})) = L_1 \setminus L_2$,

(10) $\forall x \in K$, $h^2(x) \cup \big[u\big(a(x), \frac{1}{2}\varepsilon(f(x))\big)(X(x))\big]$ *est homéomorphe à* $X(x)$,

(11) *si* x, x' *sont deux points de* K *tels que*

$$h^2(x) \cup \big[u\big(a(x), \tfrac{1}{2}\varepsilon(f(x))\big)(X(x))\big] = h^2(x') \cup \big[u\big(a(x'), \tfrac{1}{2}\varepsilon(f(x'))\big)(X(x'))\big],$$

alors $X(x) = X(x')$.

Supposons ce lemme démontré. Les conditions (2), (4) et (5) entraînent que, pour x dans K, l'ensemble

$$g(x) = h^2(x) \cup \big[u\big(a(x), \tfrac{1}{2}\varepsilon(f(x))\big)(X(x))\big]$$

est contenu dans D. D'après (7)–(10), $g(K)$ est contenu dans $\text{c.e.}(D)$, $g^{-1}(\text{AR}(D)) = L_1$ et $g^{-1}(a(D)) = L_1 \setminus L_2$. La fonction g est continue et vérifie

$$\varrho(h^2(x), g(x)) < \varepsilon(f(x)), \tag{12}$$

ce qui, avec (4) et (5), entraîne

$$\varrho(f(x), g(x)) < 3\varepsilon(f(x)). \tag{13}$$

D'après (1), g est $\mathcal{U}$-proche de f; en particulier, elle est à valeurs dans U. La condition (11) garantit que g est injective, donc, pour prouver que c'est un plongement fermé dans U, il suffit de montrer que si $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ est une suite de points de K telle que $\{g(x_i)\}$ converge vers un élément C_0 de U, alors la suite $\{x_i\}$ a une sous-suite qui converge dans K. Posant, pour $i \geq 1$, $\varepsilon_i = \varepsilon(f(x_i))$ et $a_i = a(x_i)$, nous pouvons supposer que $\{\varepsilon_i\}$ converge vers $\varepsilon_0 \in [0,1]$, que a_i converge vers un point a_0 de $\overline{D}$ et que $\{x_i\}$ converge vers un point x_0 de Q. Supposons que x_0 n'appartienne pas à K; d'après (7), $X(x_0)$ sépare le plan. Nous avons $\varepsilon_0 > 0$ car, dans le cas contraire, il résulterait de (13) que la suite $\{f(x_i)\}$ convergerait aussi vers C_0, et $\{\varepsilon_i\}$ tendrait vers $\varepsilon(C_0) > 0$, ce qui est contradictoire. La suite $\big\{u\big(a_i, \frac{1}{2}\varepsilon_i\big)(X(x_i))\big\}$ converge alors vers $u\big(a_0, \frac{1}{2}\varepsilon_0\big)(X(x_0))$, qui est un sous-ensemble de $B\big(a_0, \frac{1}{2}\varepsilon_0\big)$ contenu dans C_0 et séparant le plan. L'intérieur de $B\big(a_0, \frac{1}{2}\varepsilon_0\big)$ contient donc un point y appartenant à une composante bornée de $\mathbb{R}^2 \setminus u\big(a_0, \frac{1}{2}\varepsilon_0\big)(X(x_0))$. Ce point ne peut appartenir à C_0, car sinon il serait limite d'une suite $\{y_i\}$ avec

$y_i \in h^2(x_i)$ pour tout i, ce qui est impossible car $h^2(x_i)$ est disjoint de l'intérieur de $B\big(a_i, \frac{1}{2}\varepsilon_i\big)$. Mais alors, y est aussi contenu dans une composante bornée de $\mathbb{R}^2 \setminus C_0$, ce qui contredit le fait que $C_0 \in \text{c.e.}(D)$.

Pour voir que $g(K)$ est un Z-ensemble dans U, remarquons que l'intérieur de chaque ensemble $g(x)$ est vide, alors que les lemmes 3.3 et 3.2 de [4] garantissent l'existence d'une déformation Φ de $\text{c.e.}(D)$ telle que $\Phi(C,t)$ soit un disque fermé pour $t > 0$, donc vérifiant $\Phi(\text{c.e.}(D) \times \,]0,1]) \cap g(K) = \emptyset$.

Pour démontrer le lemme 4.8, nous avons besoin de quelques constructions préparatoires. Si a et b sont deux points de $\mathbb{R}^2$, nous noterons $\overline{ab}$ le segment de droite (éventuellement dégénéré) d'extrémités a et b. Pour $n \geq 0$, nous notons $a_n = (2^{-n}, 0)$ et $b_n = (2^{-n}, 2^{-n})$.

La première construction auxiliaire est une variante du lemme 3.7.

4.9. Lemme. *Il existe une fonction continue* $S : Q \to \text{c.e.}(I^2)$ *vérifiant* $S^{-1}(\text{AR}(I^2)) = S^{-1}(a(I^2)) = \widetilde{c}_0$.

Démonstration. Pour $x = (x_n) \in Q$ et $n \geq 1$, posons $s_n(x) = (2^{-n} + 2^{-(n+1)}, x_n)$. On vérifie facilement que la fonction S définie par

$$S(x) = \{0\} \times [0,1] \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (\overline{a_n s_n(x)} \cup \overline{s_n(x) a_{n-1}})$$

est continue et a les propriétés souhaitées.

4.10. Lemme. *Si F est un sous-ensemble de type F_σ d'un espace métrique Y, alors il existe une fonction continue $T : Y \to \text{AR}(I^2)$ telle que $T^{-1}(a(I^2))$ $= Y \setminus F$.*

Démonstration. Supposons la distance d de Y bornée par 1. Soit $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, où les F_n sont fermés. Pour $n \geq 1$, définissons $t_n : Y \to \mathbb{R}^2$ par $t_n(x) = (2^{-n} - 2^{-(n+2)} d(x, F_n), 0)$. Il est facile de vérifier que la fonction T définie par

$$T(x) = \{0\} \cup \overline{a_0 a_1} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (\overline{a_n b_n} \cup \overline{b_n t_n(x)} \cup \overline{t_n(x) a_{n-1}})$$

est continue et a la propriété souhaitée.

4.11. Lemme. *Il existe une fonction continue* $\Delta : Q \to C(I^2)$ *vérifiant* $\Delta^{-1}(\text{c.e.}(I^2)) = \Delta^{-1}(a(I^2)) = K$.

Démonstration. Supposons la distance d de Q bornée par 1. Puisque K appartient à $\mathcal{M}_1$, $Q \setminus K$ est un F_σ; soit $Q \setminus K = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$, où les F_n sont fermés. Pour $n \geq 0$, soit $c_n = (2^{-(n+1)}, 2^{-n})$. Pour $x \in Q$ et $n \geq 0$, soit $d_n(x) = (2^{-n} - d(x, F_n) 2^{-(n+2)}, 0)$. On vérifie facilement que la fonction Δ

définie par

$$\Delta(x) = \{0\} \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} (\overline{a_n b_n} \cup \overline{b_n c_n} \cup \overline{c_n d_n(x)} \cup \overline{a_{n+1} d_n(x)})$$

est continue et a les propriétés souhaitées.

Démonstration du lemme 4.8. Soit $E = [0, 3/4] \times [0, 1/4]$. Soit F un sous-ensemble de Q de type F_σ tel que $F \cap L_1 = L_2$. Le lemme 4.10 nous donne une fonction continue $T : Q \to \mathrm{AR}(I^2)$ telle que $T^{-1}(a(I^2)) = Q \setminus F$. S et Δ étant les fonctions des lemmes 4.9 et 4.11, définissons $X_1 : Q \to C(E)$ par

$$X_1(x) = \big(\tfrac{1}{4}S(x)\big) \cup \big(\big(\tfrac{1}{4}, 0\big) + \tfrac{1}{4}T(x)\big) \cup \big(\big(\tfrac{1}{2}, 0\big) + \tfrac{1}{4}\Delta(x)\big).$$

Convenant que $x \sin(1/x) = 0$ pour $x = 0$, posons

$$A_1 = \left\{ \left((t-1)\sin\left(\frac{3\pi}{t-1}\right), t \right) : 1/4 \le t \le 1 \right\},$$

$$A_2 = \left\{ \left(t, (t-1)\sin\left(\frac{\pi}{t-1}\right) \right) : 3/4 \le t \le 1 \right\}.$$

Alors A_1 (resp. A_2) est un arc n'ayant pas de demi-tangente en son extrémité $y_1 = (0, 1)$ (resp. $y_2 = (1, 0)$) et n'ayant en commun avec E que son autre extrémité $(0, 1/4)$ (resp. $(3/4, 0)$) qui appartient à $X_1(x)$ pour tout x. Posant

$$X(x) = X_1(x) \cup A_1 \cup A_2,$$

nous obtenons une fonction continue de Q dans $C(\overline{D})$. Les conditions (6)–(9) résultent immédiatement des constructions et des propriétés de S, T et Δ. La condition (10) résulte du fait que

$$h^2(x) \cap \big[u\big(a(x), \tfrac{1}{2}\varepsilon(f(x))\big)(X(x))\big] = \big\{a(x) + \tfrac{1}{2}\varepsilon(f(x))\big\},$$

qui est une extrémité commune aux arcs $h^2(x)$ et $u\big(a(x), \tfrac{1}{2}\varepsilon(f(x))\big)(A_2)$.

Pour vérifier (11), quelques observations géométriques sont nécessaires. La condition (ii) du lemme 4.3 garantit que, pour tout $x \in K$, $h^1(x)$ a une paramétrisation C^1 par morceaux; il en est donc de même de $h^2(x) \setminus \big\{a(x) + \tfrac{1}{2}\varepsilon(f(x))\big\}$ puisque la restriction de $k(a(x), \varepsilon(f(x)))$ à $\mathbb{R}^2 \setminus B\big(a(x), \tfrac{1}{2}\varepsilon(f(x))\big)$ est un C^1-difféomorphisme. Avec le choix de A_1 et A_2, cela permet de vérifier que, pour x dans K, l'ensemble $M(x) = h^2(x) \cup \big[u\big(a(x), \tfrac{1}{2}\varepsilon(f(x))\big)(X(x))\big]$ possède les propriétés suivantes :

(14) $M(x)$ contient exactement deux points z ayant dans $M(x)$ un voisinage $V(z)$ qui est un arc dont z est une extrémité, à savoir l'extrémité z_0 de $h^2(x)$ qui est distincte de $a(x) + \tfrac{1}{2}\varepsilon(f(x))$ et $z_1 = u\big(a(x), \tfrac{1}{2}\varepsilon(f(x))\big)(y_1)$.

(15) $V(z_0)$ a une demi-tangente en z_0 tandis que $V(z_1)$ n'a pas de demi-tangente en z_1.

(16) Tout point z de $h^2(x) \setminus \{z_0\}$ a dans $M(x)$ un voisinage $V(z)$ qui est un arc; si $z \neq z_2 = a(x) + \frac{1}{2}\varepsilon(f(x)) = u\big(a(x), \frac{1}{2}\varepsilon(f(x))\big)(y_2)$, $V(z)$ a deux demi-tangentes en z, tandis que $V(z_2)$ a au plus une demi-tangente en z_2.

Il est facile de déduire de (14)–(16) que si x et x' sont deux points de K tels que $M(x) = M(x')$, alors $h^2(x) = h^2(x')$,

$$u\big(a(x), \tfrac{1}{2}\varepsilon(f(x))\big)(X(x)) = u\big(a(x'), \tfrac{1}{2}\varepsilon(f(x'))\big)(X(x')) \tag{17}$$

et

$$z_i = u\big(a(x), \tfrac{1}{2}\varepsilon(f(x))\big)(y_i) = u\big(a(x'), \tfrac{1}{2}\varepsilon(f(x'))\big)(y_i) \quad \text{pour } i = 1, 2.$$

Comme la distance entre $u(a,\varepsilon)(y_1)$ et $u(a,\varepsilon)(y_2)$ est $\sqrt{2}\,\varepsilon$, cela entraîne $\varepsilon(f(x)) = \varepsilon(f(x'))$. Puisque $a(x) = z_2 - \frac{1}{2}\varepsilon(f(x))$, nous avons aussi $a(x) = a(x')$. Mais alors, (17) entraîne $X(x) = X(x')$, d'où (11).

5. Le couple $(C(\mathbb{R}^2), \text{c.e.}(\mathbb{R}^2))$**.** Bien que $C(\mathbb{R}^2)$ soit homéomorphe à $Q \setminus \{\text{point}\}$ et c.e.$(\mathbb{R}^2)$ à P, les remarques qui suivent montrent que $(C(\mathbb{R}^2), \text{c.e.}(\mathbb{R}^2))$ n'est pas homéomorphe à $(Q, P) \setminus \{\text{point}\}$ et que $C(\mathbb{R}^2) \setminus$ c.e.$(\mathbb{R}^2)$ n'est homéomorphe à aucun des espaces classiques de la topologie de la dimension infinie.

(A) $C(\mathbb{R}^2) \setminus \text{c.e.}(\mathbb{R}^2)$ *n'est pas localement homotopiquement négligeable dans* $C(\mathbb{R}^2)$.

Dans le cas contraire, pour tout ouvert U de $C(\mathbb{R}^2)$, l'inclusion de $U \cap$ c.e.$(\mathbb{R}^2)$ dans U serait une équivalence homotopique. Prenons pour U l'ensemble $C(\mathbb{R}^2_*)$ des continus contenus dans $\mathbb{R}^2_* = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Alors, $C(\mathbb{R}^2_*)$ est contractile, mais, d'après le lemme 7.1 de [4], c.e.$(\mathbb{R}^2_*)$ a le type d'homotopie de $\mathbb{R}^2_*$, donc n'est pas contractile.

(B) c.e.$(\mathbb{R}^2)$ *est localement homotopiquement négligeable dans* $C(\mathbb{R}^2)$.

En effet, soit $\Psi : 2^{\mathbb{R}^2} \times I \to 2^{\mathbb{R}^2}$ une homotopie vérifiant

$$\varrho(C, \Psi(C,t)) \le t \quad \forall (C,t) \in 2^{\mathbb{R}^2} \times I, \tag{1}$$

$$\Psi(C,t) \text{ est fini si } t > 0. \tag{2}$$

Pour C dans $C(\mathbb{R}^2)$, posons

$$\Phi(C,0) = C,$$

$$\Phi(C,t) = \bigcup_{a \in \Psi(C,t)} S(a, 2t) \quad \text{pour } t > 0.$$

On vérifie que $\Phi(C,t)$ est connexe et que $\Phi(C(\mathbb{R}^2) \times \,]0,1]) \subset C(\mathbb{R}^2) \setminus \text{c.e.}(\mathbb{R}^2)$, d'où (B).

(C) $C(\mathbb{R}^2) \setminus \text{c.e.}(\mathbb{R}^2)$ *est σ-compact.*

Car c.e.$(\mathbb{R}^2)$ est un G_δ dans $C(\mathbb{R}^2)$.

(D) $C(\mathbb{R}^2) \setminus \text{c.e.}(\mathbb{R}^2)$ *est de première catégorie, mais n'est pas réunion dénombrable de Z-ensembles.*

En effet, puisque $C(\mathbb{R}^2) \setminus \text{c.e.}(\mathbb{R}^2)$ est σ-compact, mais n'est localement compact en aucun point, il est de première catégorie. S'il était réunion dénombrable de Z-ensembles, il serait, d'après (B), contenu dans une réunion dénombrable de Z-ensembles de $C(\mathbb{R}^2)$, donc serait localement homotopiquement négligeable dans $C(\mathbb{R}^2)$, contrairement à (A).

(E) $C(\mathbb{R}^2) \setminus \text{c.e.}(\mathbb{R}^2)$ *est fortement $\mathcal{K}$-universel.*

Il faut vérifier que, étant donnés un compact K, un fermé L de K et un $\eta > 0$, toute fonction continue f de K dans $C(\mathbb{R}^2) \setminus \text{c.e.}(\mathbb{R}^2)$ telle que $f|L$ soit un Z-plongement peut être η-approximée par un Z-plongement g tel que $g|L = f|L$. Nous pouvons supposer que $f(L) \cap f(K \setminus L) = \emptyset$. Posons alors, pour x dans $K \setminus L$,

$$\varepsilon(x) = \tfrac{1}{8} \min(\eta, \varrho(f(x), f(L))).$$

Soit $\varphi = (\varphi_n)$ un plongement de K dans Q tel que $\varphi_n(x) = \varphi_n(x')$ pour presque tout n entraîne $x = x'$. Notant $S^1 = \{z \in \mathbb{R}^2 : |z| = 1\}$, définissons une fonction $\xi : Q \to C(\mathbb{R}^2)$ en posant, pour $q = (q_n)$ dans Q,

$$\xi(q) = S^1 \cup ([1,2] \times \{0\}) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{2 - 1/n\} \times [0, q_n 2^{-n}].$$

Ψ étant comme dans (B), définissons $g : K \to C(\mathbb{R}^2)$ par

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in L, \\ \bigcup_{a \in \Psi(f(x), \varepsilon(x))} u(a, 2\varepsilon(x))(\xi \circ \varphi(x)) & \text{si } x \notin L. \end{cases}$$

Pour $x \in K \setminus L$, $g(x)$ est un continu de dimension un contenant un cercle, donc appartient à $C(\mathbb{R}^2) \setminus \text{c.e.}(\mathbb{R}^2)$. On vérifie que $\varrho(\Psi(f(x), \varepsilon(x)), g(x)) \le 6\varepsilon(x)$, d'où $\varrho(f(x), g(x)) \le 7\varepsilon(x) < \eta$, ce qui entraîne que g est continue et que $g(L) \cap g(K \setminus L) = \emptyset$.

Pour voir que g est injective, il suffit donc de montrer que si x, x' sont deux points de $K \setminus L$ tels que $g(x) = g(x')$, alors $x = x'$. Mais $g(x)$ est la réunion des cercles $S(a, 2\varepsilon(x))$ avec $a \in \Psi(f(x), \varepsilon(x))$, qui sont en nombre fini, et d'un ensemble dénombrable de segments de droite. Comme l'intersection de $S(a, 2\varepsilon(x))$ avec un segment ou avec un cercle $S(a', \varepsilon')$ tel que $a' \ne a$ ou $\varepsilon' \ne 2\varepsilon(x)$ contient au plus deux points, l'égalité $g(x) = g(x')$ entraîne $\varepsilon(x) = \varepsilon(x')$ et $\Psi(f(x), \varepsilon(x)) = \Psi(f(x'), \varepsilon(x'))$. Si a est un point de $\Psi(f(x), \varepsilon(x))$ dont l'abscisse est maximale, alors, pour presque tout n,

$$\begin{aligned} g(x) \cap [u(a, 2\varepsilon(x))(\{2 - 1/n\} \times [0, 2^{-n}])] \\ = u(a, 2\varepsilon(x))(\{2 - 1/n\} \times [0, \varphi_n(x) 2^{-n}]). \end{aligned}$$

La relation analogue pour x' donne $\varphi_n(x) = \varphi_n(x')$ pour presque tout n, d'où $x = x'$ d'après le choix de φ.

D'après (B) et le lemme 2.6 de [7], $g(L)$ est un Z-ensemble dans $C(\mathbb{R}^2)$. L'ensemble $g(K \setminus L)$ est localement homotopiquement négligeable dans $C(\mathbb{R}^2)$ car $g(x)$ a un intérieur vide si $x \in K \setminus L$, et il y a une déformation instantanée de $C(\mathbb{R}^2)$ en l'ensemble des continus dont l'intérieur n'est pas vide. Par suite, $g(K)$ est un Z-ensemble dans $C(\mathbb{R}^2)$, donc aussi dans $C(\mathbb{R}^2)\setminus$ c.e.$(\mathbb{R}^2)$ d'après (B) et le lemme 2.6 de [7].

Soit $\sigma = \{x \in \mathbb{R}^\infty : x_n = 0$ pour presque tout $n\}$.

(F) $(C(\mathbb{R}^2) \setminus \text{c.e.}(\mathbb{R}^2)) \times \sigma$ *est homéomorphe à* Σ.

D'après (B) et (C), $X = (C(\mathbb{R}^2) \setminus \text{c.e.}(\mathbb{R}^2)) \times \sigma$ est un rétracte absolu σ-compact. Puisque σ est réunion dénombrable de Z-ensembles au sens fort, X aussi. Alors, tout Z-ensemble dans X est un Z-ensemble au sens fort et X est fortement $\mathcal{K}$-universel d'après (E), d'où (F).

5.1. Remarque et problème. Il semble qu'il existe une grande variété de sous-ensembles σ-compacts X de Q tels que le couple (Q, X) vérifie l'analogue des conditions (A)–(F) ci-dessus. Un tel exemple a déjà été donné, p. 839 de [15], par Curtis, Dobrowolski et Mogilski; cet exemple est d'une nature différente de celui considéré ici car $Q \setminus X$ n'est pas contractile. Il serait intéressant d'avoir des caractérisations topologiques du couple $(C(\mathbb{R}^2), \text{c.e.}(\mathbb{R}^2))$ et de l'espace $C(\mathbb{R}^2) \setminus \text{c.e.}(\mathbb{R}^2)$.

Bibliographie

[1] C. Bessaga and A. Pełczyński, *Selected Topics in Infinite-Dimensional Topology*, PWN, Warszawa, 1975.

[2] M. Bestvina and J. Mogilski, *Characterizing certain incomplete infinite-dimensional absolute retracts*, Michigan Math. J. 33 (1986), 291–313.

[3] K. Borsuk, *Theory of Retracts*, PWN, Warszawa, 1967.

[4] R. Cauty, *L'espace des pseudo-arcs d'une surface*, Trans. Amer. Math. Soc. 331 (1992), 247–263.

[5] —, *L'espace des arcs d'une surface*, ibid. 332 (1992), 193–209.

[6] —, *L'espace des fonctions continues d'un espace métrique dénombrable*, Proc. Amer. Math. Soc. 113 (1991), 493–501.

[7] —, *Caractérisation topologique de l'espace des fonctions dérivables*, Fund. Math. 138 (1991), 35–58.

[8] —, *Les fonctions continues et les fonctions intégrables au sens de Riemann comme sous-espaces de $\mathcal{L}^1$*, ibid. 139 (1991), 23–36.

[9] —, *Un exemple d'ensembles absorbants non équivalents*, ibid. 140 (1991), 49–61.

[10] —, *Sur deux espaces de fonctions non dérivables*, ibid. 141 (1992), 195–214.

[11] R. Cauty and T. Dobrowolski, *Applying coordinate products to the topological identification of normed spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 337 (1993), 625–649.

[12] R. Cauty, T. Dobrowolski and W. Marciszewski, *A contribution to the topological classification of the spaces* $C_p(X)$, Fund. Math. 142 (1993), 269–301.
[13] D. W. Curtis, *Hyperspaces of non-compact metric spaces*, Compositio Math. 40 (1980), 139–152.
[14] —, *Hyperspaces of finite subsets as boundary sets*, Topology Appl. 22 (1986), 97–107.
[15] D. W. Curtis, T. Dobrowolski and J. Mogilski, *Some applications of the topological characterization of the sigma-compact spaces* ℓ_f^2 *and* Σ, Trans. Amer. Math. Soc. 284 (1984), 837–846.
[16] J. J. Dijkstra and J. Mogilski, *The topological product structure of systems of Lebesgue spaces*, Math. Ann. 290 (1991), 527–543.
[17] J. J. Dijkstra, J. van Mill and J. Mogilski, *The space of infinite-dimensional compacta and other topological copies of* $(\ell_f^2)^\infty$, Pacific J. Math. 152 (1992), 255–273.
[18] T. Dobrowolski and L. Rubin, *The hyperspaces of infinite-dimensional compacta for covering and cohomological dimension are homeomorphic*, ibid. 164 (1994), 15–39.
[19] —, —, *The space of ANR's in* $\mathbb{R}^n$, Fund. Math. 146 (1995), 31–58.
[20] A. N. Dranishnikov, *On a problem of P. S. Aleksandrov*, Mat. Sb. 135 (1977), 551–557 (en russe).
[21] A. N. Dranishnikov and E. V. Shchepin, *Cell-like maps. Dimension raising problems*, Uspekhi Mat. Nauk 41 (6) (1986), 49–90 (en russe).
[22] J. Dydak and J. J. Walsh, *Infinite dimensional compacta having cohomogical dimension two*: *an application of the Sullivan conjecture*, Topology 32 (1993), 93–104.
[23] H. Gladdines and J. van Mill, *Hyperspaces of Peano continua of euclidean spaces*, Fund. Math. 142 (1993), 173–188.
[24] G. Kozlowski, J. van Mill and J. J. Walsh, *AR-maps obtained from cell-like maps*, Proc. Amer. Math. Soc. 82 (1981), 299–302.
[25] K. Kuratowski, *Evaluation de la classe borélienne ou projective d'un ensemble de points à l'aide des symboles logiques*, Fund. Math. 17 (1931), 249–272.
[26] —, *Topologie I*, 4ème éd., PWN, Warszawa, 1958.
[27] —, *Topologie II*, 3ème éd., PWN, Warszawa, 1961.
[28] E. H. Spanier, *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, New York, 1966.
[29] H. Toruńczyk, *Concerning locally homotopy negligible sets and characterization of* l_2*-manifolds*, Fund. Math. 101 (1978), 93–110.
[30] —, *Characterizing Hilbert space topology*, ibid. 111 (1981), 247–262.
[31] G. T. Whyburn, *Analytic Topology*, Amer. Math. Soc., Providence, 1942.

22, RUE JOUVENET
75016 PARIS, FRANCE

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
PITTSBURG STATE UNIVERSITY
PITTSBURG, KANSAS 66762
U.S.A.
E-mail: TDOBROWO@MAIL.PITTSTATE.EDU

FACULTEIT WISKUNDE EN INFORMATICA
VRIJE UNIVERSITEIT
DE BOELELAAN 1081A
AMSTERDAM, THE NETHERLANDS
E-mail: HELMA@CS.VU.NL
VANMILL@CS.VU.NL

Received 14 June 1994