FUNDAMENTA
MATHEMATICAE
146 (1994)

Un espace métrique linéaire qui n'est pas un rétracte absolu

par

Robert Cauty (Paris)

Abstract. We construct the example of the title.

1. Introduction. Le but de cet article est de démontrer le théorème suivant, qui résout un problème classique.

1.1. Théorème. *Il existe un espace métrique linéaire σ-compact E qui n'est pas un rétracte absolu.*

Il est connu qu'alors le complété de E ne peut pas être un rétracte absolu. Cet espace, donc son complété, possède aussi la propriété intéressante suivante :

1.2. Addendum. *E peut être construit de façon à être un sous-espace vectoriel fermé d'un espace métrique linéaire qui est un rétracte absolu.*

E fournit aussi le premier exemple d'espace métrique linéaire à ne pas être admissible au sens de Klee [11] puisque Dobrowolski a prouvé dans [4] qu'un espace métrique linéaire σ-compact est admissible au sens de Klee si, et seulement si, c'est un rétracte absolu.

Notre construction utilise l'espace vectoriel topologique libre $E(X)$ sur un compact métrisable X. Algébriquement, $E(X)$ a pour base X, et sa topologie est la plus fine des topologies vectorielles induisant sur X sa topologie originelle. $E(X)$ n'est pas métrisable, mais sa topologie est la borne supérieure de l'ensemble $\mathcal{T}(X)$ des topologies vectorielles métrisables qui induisent sur X sa topologie de départ; plus précisément, pour tout ouvert U de $E(X)$, il existe $\tau \in \mathcal{T}(X)$ telle que U soit τ-ouvert. Bien que nous la présentions un peu différemment dans la suite, notre stratégie est la suivante. Il est connu qu'un espace métrisable Y est un rétracte absolu de voisinage si, et seulement si, tout ouvert de Y a le type d'homotopie d'un

1991 *Mathematics Subject Classification*: Primary 54C55.

CW-complexe (voir [3]). Si τ appartient à $\mathcal{T}(X)$ et si le sous-ensemble U de $E(X)$ est τ-ouvert, l'identité i est une équivalence homotopique faible de U dans (U,τ). Si $(E(X),\tau)$ est un rétracte absolu, il est facile de voir que i a un inverse homotopique à droite, i.e. que U est dominé par (U,τ), donc U doit alors, comme (U,τ), avoir le type d'homotopie d'un CW-complexe, la fonction i étant alors en fait une équivalence homotopique. Pour obtenir l'exemple cherché, il suffit donc de construire un compact X tel que $E(X)$ contienne un ouvert n'ayant pas le type d'homotopie d'un CW-complexe. Il est beaucoup plus facile d'étudier la topologie libre sur $E(X)$, ce qui revient à étudier globalement la collection des espaces métrisables $(E(X),\tau)$ avec $\tau \in \mathcal{T}(X)$, que d'étudier individuellement chacun des espaces $(E(X),\tau)$.

Nous commencerons par donner une description détaillée de l'espace $E(X)$ et en prouver les quelques propriétés élémentaires dont nous avons besoin.

Nous noterons I l'intervalle $[0,1]$. Une distance sur un espace métrisable X sera dite *admissible* si elle définit la topologie de X (nous aurons aussi à considérer des distances sur des espaces non métrisables, et préciserons systématiquement si nos distances sont admissibles ou seulement continues). Si d est un distance sur un ensemble X et A, B des sous-ensembles de X, nous poserons $d(A,B)=\inf_{a\in A, b\in B} d(a,b)$; si $A=\{a\}$ est réduit à un point, nous écrirons $d(a,B)$ au lieu de $d(\{a\},B)$.

2. L'espace vectoriel topologique libre sur un compact métrisable. Rappelons qu'un espace topologique Y est dit *limite inductive* d'une suite croissante de fermés $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$, noté $Y=\varinjlim Y_n$, si $Y=\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$ et si un sous-ensemble F de Y est fermé dans Y si, et seulement si, $F\cap Y_n$ est fermé pour tout n. Il est connu que si les Y_n sont parfaitement normaux, il en est de même de Y. En outre, si $Y=\varinjlim Y_n$ et $Z=\varinjlim Z_n$ où les fermés Y_n et Z_n sont compacts, alors $Y\times Z=\varinjlim Y_n\times Z_n$. Il est aussi connu, et facile de vérifier, que si $Y=\varinjlim Y_n$, où les Y_n sont métrisables, et si T est un rétracte absolu de voisinage, alors toute fonction continue d'un fermé A de Y dans T peut se prolonger à un voisinage de A dans Y.

Soit X un espace métrique compact, et soit $E(X)$ l'espace vectoriel réel ayant X pour base. Pour $n\geq 1$, le point générique de $X^n\times\mathbb{R}^n$ sera noté (x,λ), où $x=(x_1,\ldots,x_n)\in X^n$ et $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$. Définissons une fonction α_n de $X^n\times\mathbb{R}^n$ dans $E(X)$ par $\alpha_n(x,\lambda)=\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$. Pour $t\geq 0$, soient $D_n(X,t)=\{(x,\lambda)\in X^n\times\mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n |\lambda_i|\leq t\}$ et $E_n(X,t)=\alpha_n(D_n(X,t))$. Posons $D_n(X)=D_n(X,n)$ et $E_n(X)=E_n(X,n)$. Nous munissons chaque ensemble $E_n(X)$ de la topologie quotient de $D_n(X)$ par α_n, ce qui en fait un espace compact métrisable. Nous définissons une topologie sur $E(X)$ en convenant qu'un sous-ensemble A de $E(X)$ est ouvert si, est seulement si, $A\cap E_n(X)$ est ouvert dans $E_n(X)$ pour tout $n\geq 1$.

$E(X)$ devient ainsi la limite inductive de la suite croissante de compacts $\{E_n(X)\}$.

Les opérations algébriques sont continues sur $E(X)$. En effet, pour tout $n \geq 1$, nous avons un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} D_n(X) \times D_n(X) & \xrightarrow{p} & D_{2n}(X) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha_n \times \alpha_n} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha_{2n}} \\ E_n(X) \times E_n(X) & \xrightarrow{a} & E_{2n}(X) \end{array}$$

où a est la restriction de l'addition et p est définie par

$$p((x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n), (x_{n+1}, \ldots, x_{2n}, \lambda_{n+1}, \ldots, \lambda_{2n})) \\ = (x_1, \ldots, x_{2n}, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2n}).$$

Comme p, α_{2n} et $\alpha_n \times \alpha_n$ sont continues et $\alpha_n \times \alpha_n$ est une application quotient, a est continue. Puisque les $E_n(X)$ sont compacts, $E(X) \times E(X) = \varinjlim E_n(X) \times E_n(X)$, d'où la continuité de l'addition. La continuité de la multiplication scalaire se prouve de même en utilisant le fait que $E(X) \times \mathbb{R} = \varinjlim E_n(X) \times [-n, n]$ et le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} D_n(X) \times [-n, n] & \xrightarrow{q} & D_n(X, n^2) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha_n \times \mathrm{id}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha_n} \\ E_n(X) \times [-n, n] & \xrightarrow{m} & E_n(X, n^2) \end{array}$$

où $q((x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n), t) = (x_1, \ldots, x_n, t\lambda_1, \ldots, t\lambda_n)$ et m est la multiplication.

Si f est une fonction continue de X dans un espace vectoriel topologique G, alors l'unique application linéaire F de $E(X)$ dans G qui prolonge f est continue puisque, pour tout n, l'application $F \circ \alpha_n$ est visiblement continue. Cela justifie d'appeler $E(X)$ *l'espace vectoriel topologique libre* sur X.

Nous noterons $\mathcal{T}(X)$ l'ensemble des topologies d'espace métrique linéaire sur $E(X)$ qui sont moins fines que la topologie libre. Le lemme 2.1 ci-dessous montrera en particulier que la topologie libre est la borne supérieure des éléments de $\mathcal{T}(X)$. Si $\{\tau_i\}_{i=1}^{\infty}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{T}(X)$, alors la borne supérieure τ des topologies τ_i appartient à $\mathcal{T}(X)$. En effet, c'est évidemment une topologie d'espace vectoriel séparé moins fine que la topologie libre, et si, pour $i \geq 1$, $\{V_i^j\}_{j=1}^{\infty}$ est une base dénombrable de τ_i-voisinages de 0, alors les ensembles $V_{i_1}^{j_1} \cap \ldots \cap V_{i_k}^{j_k}$ forment une base dénombrable de τ-voisinages de 0, donc τ est métrisable.

Si U est un sous-ensemble de $E(X)$, nous noterons encore U l'espace obtenu en munissant U de la topologie induite par la topologie libre. Si τ

est une autre topologie sur $E(X)$, nous noterons (U,τ) l'espace obtenu en munissant U de la topologie induite par τ. D'une façon générale, toute notion topologique non explicitement associée à une topologie τ sera supposée concerner la topologie libre.

2.1. LEMME. *Si U est un ouvert de $E(X)$, il existe $\tau \in \mathcal{T}(X)$ telle que U soit τ-ouvert.*

Démonstration. Commençons par montrer que si V est un voisinage de 0 dans $E(X)$, il existe $\tau \in \mathcal{T}(X)$ telle que V soit un τ-voisinage de 0. Puisque $E(X)$ est limite inductive d'une suite de compacts métrisables, il est parfaitement normal, donc nous pouvons trouver une fonction continue $\delta : E(X) \to I$ telle que $\delta^{-1}(0) = \{0\}$. Nous pouvons trouver par récurrence une suite $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ de voisinages de 0 dans $E(X)$ vérifiant

$$V_1 \subset V, \tag{1}$$

$$aV_n \subset V_n \quad \text{pour tout } a \in [-1,1], \tag{2}$$

$$V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n, \tag{3}$$

$$V_n \subset \delta^{-1}([0,1/n]). \tag{4}$$

La condition (4) garantit que $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \{0\}$, et le corollaire 6.8 de [10] garantit l'existence d'une topologie τ d'espace métrique linéaire sur $E(X)$ telle que $\{V_n\}$ soit une base de τ-voisinages de 0. Nécessairement, τ appartient à $\mathcal{T}(X)$, et (1) garantit que V est un τ-voisinage de 0.

Pour tout $x \in U$, nous pouvons trouver un voisinage V_x de 0 tel que $x + V_x \subset U$. D'après ce qui précède, il existe $\tau_x \in \mathcal{T}(X)$ telle que V_x soit un τ_x-voisinage de 0. Soit B_x le τ_x-intérieur de V_x; les B_x sont ouverts dans $E(X)$ et $U = \bigcup_{x\in U}(x + B_x)$. Etant réunion d'une suite de compacts métrisables, $E(X)$ est héréditairement de Lindelöf, donc nous pouvons trouver une suite $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ de points de U telle que $U = \bigcup_{i=1}^{\infty}(x_i + B_{x_i})$. La borne supérieure τ de la suite $\{\tau_{x_i}\}_{i=1}^{\infty}$ appartient encore à $\mathcal{T}(X)$ et chacun des ensembles $x_i + B_{x_i}$ est τ-ouvert, ce qui implique que U est τ-ouvert.

2.2. LEMME. *Soient A un sous-espace de $E(X)$, Y un espace métrique et $\varphi : A \to Y$ une fonction continue. Alors, il existe $\tau \in \mathcal{T}(X)$ telle que $\varphi : (A,\tau) \to Y$ soit continue.*

Démonstration. Pour tout entier $p \ge 1$ et tout point x de A, nous pouvons trouver un voisinage ouvert $V_p(x)$ de x dans $E(X)$ tel que le diamètre de $\varphi(V_p(x) \cap A)$ soit inférieur à $1/p$. Le lemme 2.1 nous permet de trouver $\tau_p(x) \in \mathcal{T}(X)$ telle que $V_p(x)$ soit $\tau_p(x)$-ouvert. Puisque $E(X)$ est héréditairement de Lindelöf, nous pouvons trouver une suite $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ de points de A telle que, pour tout p, $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} V_p(x_i)$. Soit τ la borne supérieure des topologies $\tau_p(x_i)$ $(i,p \ge 1)$. Alors $\tau \in \mathcal{T}(X)$ et, pour tout $p \ge 1$, la suite $\{V_p(x_i)\}_{i=1}^{\infty}$ est un recouvrement τ-ouvert de A. Comme le diamètre de chaque ensemble $\varphi(V_p(x) \cap A)$ est inférieur à $1/p$, cela entraîne la continuité de $\varphi : (A, \tau) \to Y$.

2.3. Lemme. *Si X est de dimension finie, alors $E(X)$ est réunion dénombrable de compacts de dimension finie.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que, pour $n \geq 1$ et $t > 0$, $E_n(X,t)$ est de dimension finie. Le cas $n = 1$ étant évident, cela peut se faire par récurrence en remarquant que tout point de $E_n(X,t) \setminus E_{n-1}(X,t)$ a, dans $E_n(X,t)$, un voisinage homéomorphe à un sous-ensemble de $X^n \times \mathbb{R}^n$.

3. Propriétés d'extension des $(E(X), \tau)$. Pour prouver le théorème 1.1 et son addendum, nous cherchons un compact X pour lequel il existe $\tau \in \mathcal{T}(X)$ telle que $(E(X), \tau)$ ne soit pas un rétracte absolu. Cependant, nous avons besoin de connaître deux cas particuliers où il ne peut exister de telle topologie τ.

3.1. Lemme. *Si X est de dimension finie, alors $(E(X), \tau)$ est un rétracte absolu quelle que soit $\tau \in \mathcal{T}(X)$.*

Si K est un compact de $E(X)$, alors (K, τ) est homéomorphe à K, donc, compte-tenu du lemme 2.3, cela est un cas particulier d'un théorème de Haver [8].

Le lemme suivant sera utilisé pour prouver l'addendum 1.2.

3.2. Lemme. *Si X est un rétracte absolu de voisinage, alors $(E(X), \tau)$ est un rétracte absolu quelle que soit $\tau \in \mathcal{T}(X)$.*

Pour prouver ce lemme, nous avons besoin d'un résultat préliminaire.

3.3. Lemme. *Si un espace métrique linéaire E est réunion d'une suite $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ de fermés qui sont des rétractes absolus de voisinage, alors E est un rétracte absolu.*

Démonstration. Fixons une distance admissible d sur E. Il suffit de prouver que E est un rétracte absolu de voisinage. Soient A un fermé d'un espace métrique Z et f une fonction continue de A dans E. Pour prouver que f se prolonge à un voisinage de A, il suffit, d'après le lemme 1 de [4], de montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction continue $f_\varepsilon : A \to E$ vérifiant

(1) $$d(f(x), f_\varepsilon(x)) < \varepsilon \quad \forall x \in A,$$

(2) f_ε peut se prolonger à un voisinage de A.

Pour $n \geq 1$, soit $A_n = f^{-1}(E_n)$; alors $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite de fermés dont la réunion est A. Nous allons construire par récurrence des voisinages ouverts V_n et W_n de $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ dans Z et des fonctions continues $h_n : V_n \to E$ de façon que, pour tout $n \geq 1$,

$$\overline{W}_n \subset V_n, \tag{3}$$

$$W_n \subset W_{n+1}, \tag{4}$$

$$d(f(x), tf(x) + (1-t)h_n(x)) < \varepsilon \quad \text{pour } x \in A \cap V_n \text{ et } t \in I, \tag{5}$$

$$h_{n+1}|\overline{W}_n = h_n|\overline{W}_n. \tag{6}$$

Puisque les E_n sont des rétractes absolus de voisinage, nous pouvons trouver, pour tout $n \geq 1$, un voisinage ouvert U_n de A_n dans Z et une fonction continue $g_n : U_n \to E_n$ prolongeant $f|A_n$. Quitte à remplacer U_n par un voisinage plus petit, nous pouvons supposer que

$$d(f(x), tf(x) + (1-t)g_n(x)) < \varepsilon \quad \text{pour } x \in A \cap U_n \text{ et } t \in I. \tag{7}$$

Posons $V_1 = U_1$ et $h_1 = g_1$, puis prenons un voisinage ouvert W_1 de A_1 tel que $\overline{W}_1 \subset V_1$. Soit maintenant $n \geq 1$, et supposons V_n, W_n et h_n construits. D'après (3), les fermés $\overline{W}_n$ et $A_{n+1} \setminus V_n$ sont disjoints, donc nous pouvons trouver des ouverts O et P dont les fermetures sont disjointes et vérifiant

$$\overline{W}_n \subset O \subset \overline{O} \subset V_n, \tag{8}$$

$$A_{n+1} \setminus V_n \subset P \subset \overline{P} \subset U_{n+1}. \tag{9}$$

Soit $\alpha : Z \to I$ une fonction continue telle que $\alpha^{-1}(0) = \overline{O}$ et $\alpha^{-1}(1) = \overline{P}$. L'ensemble $A_{n+1} \setminus (O \cup P)$ est fermé et contenu dans $V_n \cap U_{n+1}$. Nous prendrons V_{n+1} de la forme $V_{n+1} = O \cup P \cup H$ où H est un voisinage de $A_{n+1} \setminus (O \cup P)$ contenu dans $V_n \cap U_{n+1}$, et nous définirons h_{n+1} par

$$h_{n+1}(x) = \begin{cases} h_n(x) & \text{si } x \in O, \\ (1-\alpha(x))h_n(x) + \alpha(x)g_{n+1}(x) & \text{si } x \in H, \\ g_{n+1}(x) & \text{si } x \in P. \end{cases}$$

La condition (6) résultera alors de (8). Reste à choisir H de façon que pour tout $x \in V_{n+1} \cap A$, on ait

$$d(f(x), tf(x) + (1-t)h_{n+1}(x)) < \varepsilon \quad \text{pour tout } t \in I. \tag{10}$$

Remarquons d'abord que les conditions (5) et (8) (resp. (7) et (9)) garantissent que (10) est vérifiée par tout point x de $O \cap A$ (resp. $P \cap A$). En outre, si $x \in A_{n+1} \setminus (O \cup P)$, alors $g_{n+1}(x) = f(x)$ et $h_{n+1}(x) = (1-\alpha(x))h_n(x) + \alpha(x)f(x)$ appartient au segment d'extrémités $f(x)$ et $h_n(x)$. La condition (5) garantit alors que (10) est vérifiée par tout point x de $A_{n+1} \setminus (O \cup P)$. Par continuité, elle est donc vérifiée par tout point de $H \cap A$, pourvu que H soit un voisinage assez petit de $A_{n+1} \setminus (O \cup P)$. L'ouvert V_{n+1} ainsi construit contient $\overline{W}_n \cup A_{n+1} \supset A_1 \cup \ldots \cup A_{n+1}$ et, pour achever la construction, il suffit de choisir un ouvert W_{n+1} tel que $\overline{W}_n \cup A_{n+1} \subset W_{n+1} \subset \overline{W}_{n+1} \subset V_{n+1}$.

Alors, $W = \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n$ est un voisinage de A dans Z et la fonction $h : W \to E$ définie par $h|W_n = h_n|W_n$ pour tout n est continue et, d'après (5), vérifie $d(f(x), h(x)) < \varepsilon$ pour tout $x \in A$, donc $f_\varepsilon = h|A$ vérifie les conditions (1) et (2), d'où le lemme.

D é m o n s t r a t i o n d u l e m m e 3.2. Puisque $E(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n(X)$, il suffit, d'après le lemme 3.3, de montrer que chaque $E_n(X)$ est un rétracte absolu. E_n peut être regardé comme un foncteur de la catégorie des espaces compacts dans elle-même, le morphisme associé à une fonction continue f de X dans Y étant la restriction à $E_n(X)$ de l'application linéaire continue de $E(X)$ dans $E(Y)$ qui prolonge f (on convient que $E_n(\emptyset) = \{0\}$). Ce foncteur a les propriétés suivantes, dont les vérifications élémentaires sont laissées au lecteur :

(a) E_n est continu, i.e. commute aux limites projectives,

(b) si $f : X \to Y$ est injective, alors $E_n(f) : E_n(X) \to E_n(Y)$ est injective,

(c) si $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ est une famille de fermés d'un espace X, alors $E_n(\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in A} E_n(X_\alpha)$,

(d) pour tout $y \in E_n(X)$, il existe un sous-espace X' de X de cardinal $\leq n$ tel que $y \in E_n(X')$,

(e) si X est fini, alors $E_n(X)$ est un polyèdre.

D'après un résultat de V. N. Basmanov ([1], théorème 2), ces propriétés entraînent que $E_n(X)$ est un rétracte absolu de voisinage chaque fois que X en est un (la démonstration du théorème 2 de [1] s'adapte au cas où $F(\emptyset)$ est un rétracte absolu de voisinage de dimension finie au lieu d'être supposé vide).

4. Démonstration du théorème 1.1. Dans cette section, nous fixons un compact X, un polyèdre fini Y et une fonction f de Y dans X vérifiant

(i) X est de dimension infinie,

(ii) f est une surjection continue ouverte,

(iii) pour tout $x \in X$, $f^{-1}(x)$ est de forme triviale.

Un tel triplet (X, Y, f) peut s'obtenir comme suit. D'après A. N. Dranishnikov [5], il existe un compact Z de dimension trois et une décomposition semi-continue supérieurement $\mathcal{D}$ de Z telle que chaque élément de $\mathcal{D}$ soit de forme triviale et que le quotient $Z/\mathcal{D}$ soit de dimension infinie. Plongeons Z dans $Y = S^7$, et soit $\mathcal{D}'$ la décomposition semi-continue supérieurement de S^7 dont les éléments sont ceux de $\mathcal{D}$ et les points de $S^7 \setminus Z$. Alors, $X = S^7/\mathcal{D}'$ est de dimension infinie et un théorème de J. J. Walsh [13] garantit l'existence d'une fonction f de S^7 sur X vérifiant (ii) et (iii).

Fixons un entier $m > \dim Y$. Puisque X est de dimension infinie, nous pouvons trouver un fermé A de X et une fonction continue g de A dans la sphère S^m n'admettant aucun prolongement à X ([7], théorème 3.2.10). Puisque S^m est un rétracte absolu de voisinage, nous pouvons trouver un voisinage ouvert W de A dans $E(X)$ et une fonction continue $\overline{g} : \overline{W} \to S^m$ prolongeant g; il sera commode de supposer que $\overline{W}$ ne contient pas 0. Soit $F : E(Y) \to E(X)$ l'application linéaire continue prolongeant f. Le lemme suivant, qui est le coeur de la démonstration, sera prouvé plus loin.

4.1. Lemme. *Il existe un voisinage ouvert U de $X \cup \overline{W}$ dans $E(X)$ et une fonction continue $h : F^{-1}(U) \to S^m$ telle que $h|F^{-1}(\overline{W}) = \overline{g} \circ (F|F^{-1}(\overline{W}))$.*

Les lemmes 2.1 et 2.2 garantissent l'existence de topologies $\tau \in \mathcal{T}(X)$ telles que U et W soient τ-ouverts et que $\overline{g} : (\overline{W}, \tau) \to S^m$ soit continue. Le théorème 1.1 résulte donc du suivant.

4.2. Théorème. *Soit $\tau \in \mathcal{T}(X)$ telle que U et W soient τ-ouverts et que $\overline{g} : (\overline{W}, \tau) \to S^m$ soit continue. Alors, $(E(X), \tau)$ n'est pas un rétracte absolu.*

Démonstration. Supposons au contraire que $(E(X), \tau)$ soit un rétracte absolu. Le lemme 2.2 permet de trouver $\tau' \in \mathcal{T}(Y)$ telle que $F : (E(Y), \tau') \to (E(X), \tau)$ et $h : (F^{-1}(U), \tau') \to S^m$ soient continues.

Affirmation. *Pour tout sous-ensemble τ-ouvert V de $E(X)$, $F|F^{-1}(V) : (F^{-1}(V), \tau') \to (V, \tau)$ est une équivalence homotopique.*

Preuve. Puisque $(E(Y), \tau')$ est un rétracte absolu d'après le lemme 3.1, l'ouvert $(F^{-1}(V), \tau')$ a le type d'homotopie d'un CW-complexe. Puisque $(E(X), \tau)$ est supposé être un rétracte absolu, (V, τ) a aussi le type d'homotopie d'un CW-complexe. Il suffit donc de vérifier que $F|F^{-1}(V)$ est une équivalence homotopique faible, ce qui résulte immédiatement d'un théorème de G. Kozlowski [12] (noter que, pour tout τ-voisinage étoilé N d'un point quelconque de $E(X)$, les ensembles (N, τ) et $(F^{-1}(N), \tau')$ sont contractiles, ce qui entraîne que l'hypothèse du théorème 1 de [12] est vérifiée pour tout n).

Soient $F_1 : (F^{-1}(U), \tau') \to (U, \tau)$ et $F_2 : (F^{-1}(W), \tau') \to (W, \tau)$ les restrictions de F; ce sont donc des équivalences homotopiques. Puisque F_1 est une équivalence homotopique, il existe une fonction continue $k : (U, \tau) \to S^m$ telle que $h|(F^{-1}(U), \tau')$ soit homotope à $k \circ F_1$. Puisque $h|F^{-1}(W) = (\overline{g}|W) \circ F_2$ et que F_2 est une équivalence homotopique, $k|W$ et $\overline{g}|W$ sont homotopes. En particulier, g est homotope à $k|A$ et, comme $k|X$ est un prolongement de $k|A$ à X, le théorème d'extension des homotopies de Borsuk garantit que g se prolonge à X, ce qui contredit le choix de g.

P r e u v e d e l' a d d e n d u m. Plongeons X dans le cube de Hilbert Q. Alors, $E(X)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $E(Q)$. Si U' et W' sont des ouverts de $E(Q)$ tels que $U' \cap E(X) = U$ et $W' \cap E(X) = W$, les lemmes 2.1 et 2.2 permettent de trouver $\tau_0 \in \mathcal{T}(Q)$ telle que U', W' et $E(Q) \setminus E(X)$ soient τ_0-ouverts et que $\overline{g} : (\overline{W}, \tau_0) \to S^m$ soit continue. Alors, la topologie τ induite par τ_0 sur $E(X)$ vérifie les hypothèses du théorème 4.2, et $(E(X), \tau)$ est un sous-espace fermé de $(E(Q), \tau_0)$, qui est un rétracte absolu d'après le lemme 3.2.

5. Démonstration du lemme 4.1. Pour tout espace topologique Z, nous notons 2^Z l'espace des compacts de Z muni de la topologie de Vietoris. Il est connu que si $f : Y \to X$ est une surjection continue entre espaces compacts, alors la fonction $\varphi : X \to 2^Y$ définie par $\varphi(x) = f^{-1}(x)$ est continue si, et seulement si, f est ouverte. Nous aurons besoin du résultat suivant, qui est un cas particulier d'un théorème de W. E. Haver [9].

5.1. Lemme. *Soient Z un espace métrique qui est réunion dénombrable de compacts de dimension finie et T un rétracte absolu de voisinage. Soit $\varphi : Z \to 2^T$ une fonction continue telle que, pour tout $z \in Z$, $\varphi(z)$ soit de forme triviale. Alors, si d est une distance admissible sur T et $\varepsilon : Z \to]0,1]$ une fonction continue, il existe une fonction continue $\chi : Z \to T$ telle que $d(\chi(z), \varphi(z)) < \varepsilon(z)$ pour tout $z \in Z$.*

Posons $G_0(X) = \{0\}$ et $G_n(X) = \alpha_n(X^n \times \mathbb{R}^n)$ pour $n > 1$. Pour $n \geq 1$, soit $H_n(X) = G_n(X) \setminus G_{n-1}(X)$. Les ensembles $G_n(Y)$, $n \geq 0$, et $H_n(Y)$, $n \geq 1$, sont définis de façon analogue. Il est facile de voir que, pour tout $n \geq 0$, $G_n(X)$ est fermé dans $E(X)$. Tout point z de $H_n(X)$ peut se mettre sous la forme $z = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ où $x_1, \ldots, x_n$ sont des points distincts de X et les λ_i des réels $\neq 0$; cette représentation est unique à l'ordre près. Nous avons besoin d'une remarque élémentaire.

5.2. Lemme. *Soient $1 \leq n \leq p$ des entiers. Si $z = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ est un point de $H_n(X) \cap E_p(X)$, alors $\sum_{i=1}^n |\lambda_i| \leq p$.*

D é m o n s t r a t i o n. Puisque z appartient à $E_p(X)$, il peut s'écrire $z = \sum_{j=1}^p \mu_j y_j$ où $\sum_{j=1}^p |\mu_j| \leq p$. Pour $i = 1, \ldots, n$, soit N_i l'ensemble des indices j tels que $y_j = x_i$. Alors, $\sum_{j \in N_i} \mu_j = \lambda_i$, donc $|\lambda_i| \leq \sum_{j \in N_i} |\mu_j|$; le lemme en résulte.

5.3. Lemme. *Si $0 < t < t'$, alors $E_n(Y, t') \cap H_n(Y)$ est un voisinage de $E_n(Y, t) \cap H_n(Y)$ dans $H_n(Y)$.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit $E'_n(t')$ l'ensemble des points $y = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i$ de $H_n(Y)$ tels que $\sum_{i=1}^n |\lambda_i| < t'$. Alors $E_n(Y, t) \cap H_n(Y) \subset E'_n(t') \subset E_n(Y, t') \cap H_n(Y)$, et il suffit de vérifier que $E'_n(t')$ est ouvert dans $G_n(Y)$. Comme $G_n(Y)$ est fermé, $G_n(Y) = \varinjlim_q G_n(Y) \cap E_q(Y)$ et, comme $E_q(Y)$

est un compact métrisable, il suffit de vérifier qu'aucune suite de points de $E_q(Y) \cap (G_n(Y) \setminus E'_n(t'))$ ne peut converger vers un point de $E'_n(t')$, ce qui est facile.

5.4. LEMME. *Pour tout $n \geq 1$, $H_n(Y)$ est un rétracte absolu de voisinage.*

Démonstration. Il est facile de déduire du lemme 5.3 que la restriction de α_n à $Y^n \times \mathbb{R}^n \setminus \alpha_n^{-1}(G_{n-1}(Y))$ est un revêtement à $n!$ feuillets. Cet ensemble étant ouvert dans $Y^n \times \mathbb{R}^n$ et Y étant un polyèdre, le lemme en résulte.

Soit $n \geq 1$. Si $z = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ est un point de $H_n(X)$, l'ensemble

$$\begin{aligned}\varphi_n(z) &= \lambda_1 f^{-1}(x_1) + \ldots + \lambda_n f^{-1}(x_n) \\ &= \{\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n : a_i \in f^{-1}(x_i) \text{ pour } i = 1, \ldots, n\}\end{aligned}$$

est un compact contenu dans $H_n(Y)$.

5.5. LEMME. *La fonction $\varphi_n : H_n(X) \to 2^{H_n(Y)}$ est continue et, pour tout $z \in H_n(X)$, $\varphi_n(z)$ est de forme triviale.*

Démonstration. Comme la restriction α'_n de α_n à $X^n \times \mathbb{R}^n \setminus \alpha_n^{-1}(G_{n-1}(X))$ est un revêtement de cet espace sur $H_n(X)$, il suffit, pour prouver la continuité de φ_n, de vérifier que $\varphi_n \circ \alpha'_n$ est continue, ce qui résulte immédiatement de la continuité de la fonction $x \rightsquigarrow f^{-1}(x)$ de X dans 2^Y. Pour $z = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in H_n(X)$, l'application $(a_1, \ldots, a_n) \rightsquigarrow \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n$ est un homéomorphisme du produit $f^{-1}(x_1) \times \ldots \times f^{-1}(x_n)$ sur $\varphi_n(z)$; comme les compacts $f^{-1}(x_1), \ldots, f^{-1}(x_n)$ sont de forme triviale, il en est de même de leur produit.

Choisissons une distance continue d_Y sur $E(Y)$ vérifiant

(1) Les ensembles $F^{-1}(\overline{W})$ et $F^{-1}(G_n(X))$, $n \geq 1$, sont d_Y-fermés.

Pour construire d_Y, il suffit d'observer que $F^{-1}(\overline{W})$ et $F^{-1}(G_n(X))$ sont fermés et, d étant une distance continue arbitraire sur $E(Y)$, de poser $d_Y(x,y) = d(x,y) + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} |\gamma_n(x) - \gamma_n(y)|$ où les γ_n sont des fonctions continues de $E(Y)$ dans I telles que $\gamma_0^{-1}(0) = F^{-1}(\overline{W})$ et $\gamma_n^{-1}(0) = F^{-1}(G_n(X))$ pour $n \geq 1$.

Pour tout $n \geq 1$ et tout sous-ensemble B de $G_n(x)$, nous noterons $\mathrm{Int}_n B$ l'intérieur de B relativement à $G_n(X)$. Nous allons construire, pour $n \geq 1$, des voisinages fermés V_n, V'_n de $X \cup (\overline{W} \cap G_n(X))$ dans $G_n(X)$ et une fonction continue $k_n : F^{-1}(V'_n \cup \overline{W}) \to S^m$ vérifiant, pour tout n,

$$V_n \subset \mathrm{Int}_n V'_n, \tag{2}$$

$$V_{n+1} \cap G_n(X) = V_n \quad \text{et} \quad \mathrm{Int}_{n+1} V_{n+1} \cap G_n(X) = \mathrm{Int}_n V_n, \tag{3}$$

$$k_n | F^{-1}(\overline{W}) = \overline{g} \circ (F | F^{-1}(\overline{W})), \tag{4}$$

$$k_{n+1} | F^{-1}(V_n \cup \overline{W}) = k_n | F^{-1}(V_n \cup \overline{W}). \tag{5}$$

Supposons ces objets construits. Puisque $G_n(X)$ est un fermé contenant $E_n(X)$, nous avons $E(X) = \varinjlim G_n(X)$, donc (3) garantit que $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ est un fermé d'intérieur $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{Int}_n V_n$; cet ouvert contient $X \cup \overline{W}$. Puisque $F^{-1}(G_n(X))$ contient $G_n(Y) \supset E_n(Y)$, nous avons $F^{-1}(V) = \varinjlim F^{-1}(V_n \cup \overline{W})$; d'après (5), nous pouvons définir une fonction continue $k : F^{-1}(V) \to S^m$ par $k|F^{-1}(V_n \cup \overline{W}) = k_n|F^{-1}(V_n \cup \overline{W})$ pour tout n. Alors, (4) garantit que $h = k|F^{-1}(U)$ vérifie la conclusion du lemme 4.1.

La construction des V_n, V'_n et k_n se fera par récurrence, la première étape de cette récurrence étant un peu différente des autres.

Construction de V_1, V'_1 et k_1. Puisque $\dim Y < m$, la fonction $\overline{g} \circ (F|F^{-1}(\overline{W}))$ peut se prolonger en une fonction continue k_0 de $Y \cup F^{-1}(\overline{W})$ dans S^m. Comme S^m est un rétracte absolu de voisinage, nous pouvons trouver un voisinage ouvert P_0 de $Y \cup F^{-1}(\overline{W})$ dans $E(Y)$ et un prolongement continu $\overline{k}_0$ de k_0 à P_0. Posons $M_1 = \{z \in H_1(X) : \varphi_1(z) \subset P_0\}$. Puisque $H_1(X)$ est ouvert dans $G_1(X)$ et φ_1 continue, l'ensemble M_1 est ouvert dans $G_1(X)$. Si x appartient à X, $\varphi_1(x) = f^{-1}(x) \subset Y \subset P_0$, donc M_1 contient X; puisque nous avons supposé que $\overline{W}$ ne contient pas 0, $\overline{W} \cap G_1(X)$ est aussi contenu dans M_1. Nous prendrons pour V_1, V'_1 des voisinages fermés de $X \cup (\overline{W} \cap G_1(X))$ dans $G_1(X)$ vérifiant $V_1 \subset \operatorname{Int}_1 V'_1 \subset V'_1 \subset M_1$. Nous pouvons alors définir une fonction continue $\widetilde{\varphi}_1 : F^{-1}(V'_1) \to 2^{H_1(Y)}$ par $\widetilde{\varphi}_1(y) = \varphi_1(F(y))$. D'après le lemme 5.4, $H_1(Y)$ est métrisable; soit d_1 une distance admissible sur $H_1(Y)$. Comme $F^{-1}(V'_1)$ et $F^{-1}(\overline{W})$ sont fermés dans $E(Y)$, il résulte du lemme 2.3 que $F^{-1}(V'_1 \backslash \overline{W})$ est réunion dénombrable de compacts de dimension finie et, pour tout $\tau \in \mathcal{T}(Y)$, $(F^{-1}(V'_1 \setminus \overline{W}), \tau)$ est aussi réunion dénombrable de tels compacts. Le lemme 2.2 nous permet de trouver $\tau \in \mathcal{T}(Y)$ telle que les fonctions $\widetilde{\varphi}_1$ et $d_Y(\cdot, F^{-1}(\overline{W}))$ soient τ-continues sur $F^{-1}(V'_1 \backslash \overline{W})$ et, en appliquant le lemme 5.1 à $(F^{-1}(V'_1 \backslash \overline{W}), \tau)$, nous pouvons trouver une fonction continue $\chi_1 : F^{-1}(V'_1 \setminus \overline{W}) \to H_1(Y)$ vérifiant, pour tout $y \in F^{-1}(V'_1 \setminus \overline{W})$,

$$(6) \qquad d_1(\chi_1(y), \widetilde{\varphi}_1(y)) < \min(d_1(\widetilde{\varphi}_1(y), H_1(Y) \setminus P_0), d_Y(y, F^{-1}(\overline{W}))),$$

la condition (1) garantissant que le terme de droite de cette inégalité est > 0. La relation (6) garantit que $\chi_1(y)$ appartient à P_0, ce qui nous permet de définir une fonction k_1 de $F^{-1}(V'_1 \cup \overline{W})$ dans S^m par

$$k_1(y) = \begin{cases} \overline{g}(F(y)) & \text{si } y \in F^{-1}(\overline{W}), \\ \overline{k}_0(\chi_1(y)) & \text{si } y \in F^{-1}(V'_1 \setminus \overline{W}). \end{cases}$$

La condition (4) étant vérifiée par définition, il reste à établir la continuité de k_1. Comme $F^{-1}(V'_1 \cup \overline{W})$ est fermé, c'est la limite inductive de la suite croissante de compacts métrisables $F^{-1}(V'_1 \cup \overline{W}) \cap E_q(Y)$. Par suite, pour vérifier la continuité de k_1, il suffit de montrer que si $\{z(p)\}_{p=1}^{\infty}$ est une suite de points de $F^{-1}(V'_1 \cup \overline{W})$ convergeant vers un point z de cet ensemble, alors $\{k_1(z(p))\}$ tend vers $k_1(z)$. Puisque $\overline{k}_0$, χ_1, F et $\overline{g}$ sont continue là où elles sont définies, le seul cas nécessitant une vérification est celui où $z \in F^{-1}(\overline{W})$ et où $z(p) \in F^{-1}(V_1' \setminus \overline{W})$ pour tout $p \geq 1$. Alors, $\{F(z(p))\}$ tend vers $F(z)$, qui appartient à $V_1' \subset H_1(X)$ puisque V_1' est fermé, donc $\{\widetilde{\varphi}_1(z(p))\}$ tend vers $\varphi_1(F(z))$. Comme $\{d_Y(z(p), F^{-1}(\overline{W}))\}$ tend vers zéro, il résulte alors de (6) que l'ensemble $\varphi_1(F(z)) \cup \{\chi_1(z(p)) : p \geq 1\}$ est un compact de l'espace métrisable $H_1(Y)$. Alors, toute sous-suite de la suite $\{z(p)\}$ a une sous-suite $\{z(p_k)\}_{k=1}^{\infty}$ telle que $\{\chi_1(z(p_k))\}$ converge vers un point a de $\varphi_1(F(z)) \subset F^{-1}(F(z))$. Mais alors, $\{k_0(\chi_1(z(p_k)))\}$ converge vers $\overline{k}_0(a) = \overline{g}(F(a)) = \overline{g}(F(z)) = k_0(z) = k_1(z)$, ce qui montre que toute sous-suite de la suite $\{k_1(z(p))\}$ a une sous-suite convergeant vers $k_1(z)$, donc que $\{k_1(z(p))\}$ tend vers $k_1(z)$, d'où la continuité de k_1.

Soit maintenant $n > 1$, et supposons V_{n-1}, V_{n-1}' et k_{n-1} construits. Puisque S^m est un rétracte absolu de voisinage, nous pouvons trouver un voisinage ouvert P_{n-1} de $F^{-1}(V_{n-1}' \cup \overline{W})$ dans $E(Y)$ et un prolongement continu $\overline{k}_{n-1}$ de k_{n-1} à P_{n-1}. Posons $M_n = \{z \in H_n(X) : \varphi_n(z) \subset P_{n-1}\}$ et $N_n = M_n \cup \operatorname{Int}_{n-1} V_{n-1}'$.

Affirmation 1. *N_n est ouvert dans $G_n(X)$.*

Puisque $G_n(X)$ est fermé dans $E(X)$, nous avons $G_n(X) = \varinjlim_q G_n(X) \cap E_q(X)$. Si l'affirmation était fausse, il existerait un q tel que $N_n \cap E_q(X)$ ne soit pas ouvert dans $G_n(X) \cap E_q(X)$. Comme $H_n(X)$ est ouvert dans $G_n(X)$ et φ_n continue, l'ensemble M_n est ouvert dans $G_n(X)$. Il devrait donc exister un $x \in \operatorname{Int}_{n-1} V_{n-1}'$ tel que $N_n \cap E_q(X)$ ne soit pas un voisinage de x dans $G_n(X) \cap E_q(X)$. Comme $E_q(X)$ est métrisable, nous pourrions alors trouver une suite $\{z(p)\}_{p=1}^{\infty}$ de points de $E_q(X) \cap (G_n(X) \setminus N_n)$ convergeant vers x. Comme x ne peut pas être limite d'une suite de points de $G_{n-1}(X) \setminus \operatorname{Int}_{n-1} V_{n-1}'$, nous pouvons supposer que, pour tout p, $z(p) \in H_n(X) \setminus M_n$, et il existe donc un point $y(p) \in \varphi_n(z(p)) \setminus P_{n-1}$. Comme $z(p)$ appartient à $E_q(X)$, le lemme 5.2 garantit que $\varphi_n(z(p))$ est contenu dans $E_q(Y)$. Comme $E_q(Y)$ est un compact métrisable, nous pouvons, quitte à extraire une sous-suite, supposer que $\{y(p)\}$ converge vers un point y. F étant continue, $F(y) = x$. Mais alors, y appartient à $F^{-1}(V_{n-1}')$ et, P_{n-1} étant un voisinage de $F^{-1}(V_{n-1}')$, $y(p)$ appartient à P_{n-1} pour tout p assez grand. Cette contradiction prouve l'affirmation.

Comme M_n contient $\overline{W} \cap H_n(X)$, N_n contient $X \cup (\overline{W} \cap G_n(X))$, et la parfaite normalité de $E(X)$ nous permet de trouver un voisinage fermé V_n de $X \cup (\overline{W} \cap G_n(X))$ dans $G_n(X)$ contenu dans N_n et vérifiant $V_n \cap G_{n-1}(X) = V_{n-1}$ et $\operatorname{Int}_n V_n \cap G_{n-1}(X) = \operatorname{Int}_{n-1} V_{n-1}$. Soit V_n' un voisinage fermé de V_n dans $G_n(X)$ contenu dans N_n.

D'après le lemme 5.4, $H_n(Y)$ est métrisable; soit d_n une distance admissible sur $H_n(Y)$. Quitte à remplacer d_n par $d_n + d_Y$, nous pouvons supposer que

$$d_Y(y,y') \le d_n(y,y') \quad \forall y,y' \in H_n(Y). \tag{7}$$

Les lemmes 5.2 et 5.3 entraînent que, pour tout $p \ge n$, $E_{p+1}(Y) \cap H_n(Y)$ est un voisinage de $E_p(Y) \cap H_n(Y)$ dans $H_n(Y)$. Nous pouvons alors trouver une fonction continue $\eta_n : H_n(Y) \to]0,1]$ vérifiant

(8) pour tout $p \ge n$ et tout point y de $E_p(Y) \cap H_n(Y)$,

$$\eta_n(y) < d_n(y, H_n(Y) \setminus E_{p+1}(Y)).$$

Définissons une fonction continue $\widetilde{\varphi}_n : F^{-1}(M_n) \to 2^{H_n(Y)}$ par $\widetilde{\varphi}_n(y) = \varphi_n(F(y))$. Comme $F^{-1}(M_n \setminus \overline{W})$ est ouvert dans $F^{-1}(G_n(X))$, qui est fermé dans $E(Y)$, c'est, d'après le lemme 2.3, une réunion dénombrable de compacts de dimension finie, et il en est de même de tout espace $(F^{-1}(M_n \setminus \overline{W}), \tau)$ où $\tau \in \mathcal{T}(Y)$. Appliquant à nouveau le lemme 5.1 à un espace $(F^{-1}(M_n \setminus \overline{W}), \tau)$ où τ est judicieusement choisie, nous pouvons trouver une fonction continue $\chi_n : F^{-1}(M_n \setminus \overline{W}) \to H_n(Y)$ vérifiant, pour tout $y \in F^{-1}(M_n \setminus \overline{W})$,

$$\begin{aligned} d_n(\chi_n(y), \widetilde{\varphi}_n(y)) < \min(&d_n(\widetilde{\varphi}_n(y), H_n(Y) \setminus P_{n-1}), \\ &d_Y(y, F^{-1}(G_{n-1}(X) \cup \overline{W})), \min\{\eta_n(z) : z \in \widetilde{\varphi}_n(y)\}). \end{aligned} \tag{9}$$

Ici encore, la relation (9) garantit que $\chi_n(y)$ appartient à P_{n-1}, mais nous ne pouvons pas définir k_n de la même façon que k_1 car k_{n-1} ne se factorise pas à travers F. Il nous faut donc modifier un peu la suite de la construction. Si y, y' sont deux points de $E(Y)$, nous notons $[y,y']$ le segment de droite d'extrémités y et y'. Posons

$$\begin{aligned} R_n &= \{y \in F^{-1}(M_n \setminus \overline{W}) : [y, \chi_n(y)] \subset P_{n-1}\}, \\ T_n &= R_n \cup F^{-1}(\operatorname{Int}_{n-1} V'_{n-1} \cup \overline{W}). \end{aligned}$$

Affirmation 2. *T_n est ouvert dans $F^{-1}(G_n(X) \cup \overline{W})$.*

Comme M_n et P_{n-1} sont ouverts et la fonction χ_n continue, R_n est ouvert dans $F^{-1}(G_n(X) \cup \overline{W})$. En raisonnant comme dans la démonstration de l'affirmation 1, on constate que, si T_n n'etait pas ouvert, il existerait un entier $q \ge n$ et des points $z \in E_q(Y) \cap F^{-1}(\operatorname{Int}_{n-1} V'_{n-1} \cup \overline{W})$ et $z(p) \in E_q(Y) \cap (F^{-1}(G_n(X) \cup \overline{W}) \setminus T_n)$, $p \ge 1$, tels que la suite $\{z(p)\}_{p=1}^{\infty}$ converge vers z. D'après l'affirmation 1, $N_n \cup \overline{W}$ est un voisinage de $\operatorname{Int}_{n-1} V'_{n-1} \cup \overline{W}$ dans $G_n(X) \cup \overline{W}$, donc nous pouvons supposer que, pour tout p, $z(p) \in F^{-1}(N_n \cup \overline{W}) \setminus T_n = F^{-1}(M_n \setminus \overline{W}) \setminus R_n$, donc le segment $[z(p), \chi_n(z(p))]$ n'est pas entièrement contenu dans P_{n-1}. Puisque $z(p)$ appartient à $E_q(Y)$, $F(z(p))$ appartient à $E_q(X)$ et le lemme 5.2 entraîne que $\widetilde{\varphi}_n(z(p)) = \varphi_n(F(z(p)))$ est contenu dans $E_q(Y)$. Alors, les conditions (8) et (9) entraînent que $\chi_n(z(p))$ appartient à $E_{q+1}(Y)$. Comme $E_{q+1}(Y)$ est un compact métrisable, nous pouvons, quitte à extraire une sous-suite, supposer que $\{\chi_n(z(p))\}$ converge vers un point a et que le suite de compacts $\{\widetilde{\varphi}_n(z(p))\}$ converge vers un compact K. Puisque $F(\widetilde{\varphi}_n(z(p))) = F(z(p))$, K est contenu dans $F^{-1}(F(z))$. Comme $\{d_Y(z(p), F^{-1}(G_{n-1}(X) \cup \overline{W}))\}$ tend vers zéro, il résulte de (9) et (7) que

$$d_Y(\chi_n(z(p)), \widetilde{\varphi}_n(z(p))) \to 0. \tag{10}$$

Comme $E_{q+1}(Y)$ est compact, la distance continue d_Y définit sa topologie, donc (10) entraîne que la limite a de $\{\chi_n(z(p))\}$ appartient à K, donc que $F(a) = F(z)$. Mais alors, $[z, a] \subset F^{-1}(F(z)) \subset F^{-1}(V'_{n-1} \cup \overline{W}) \subset P_{n-1}$. Puisque $\{\chi_n(z(p))\}$ tend vers a, le segment $[z(p), \chi_n(z(p))]$ tend vers $[z, a]$, donc, P_{n-1} étant ouvert, est entièrement contenu dedans si p est assez grand. Cette contradiction prouve l'affirmation.

Comme T_n contient le fermé $F^{-1}((V'_n \cap G_{n-1}(X)) \cup \overline{W})$, nous pouvons trouver un ouvert B de $F^{-1}(G_n(X) \cup \overline{W})$ vérifiant $F^{-1}((V'_n \cap G_{n-1}(X)) \cup \overline{W}) \subset B \subset \overline{B} \subset T_n$. Soit β une fonction continue de $F^{-1}(G_n(X) \cup \overline{W})$ dans I telle que $\beta(y) = 0$ si $y \in \overline{B}$ et $\beta(y) = 1$ si $y \notin T_n$. D'après la définition de T_n, le point $(1 - \beta(y))y + \beta(y)\chi_n(y)$ appartient à P_{n-1} quel que soit $y \in F^{-1}(M_n \setminus \overline{W})$, ce qui nous permet de définir une fonction continue $k_n : F^{-1}(V'_n \cup \overline{W}) \to S^m$ par

$$k_n(y) = \begin{cases} \overline{k}_{n-1}(y) & \text{si } y \in \overline{B}, \\ \overline{k}_{n-1}((1 - \beta(y))y + \beta(y)\chi(y)) & \text{si } y \notin B. \end{cases}$$

Puisque $\overline{k}_{n-1}$ prolonge k_{n-1}, k_n vérifie (4) et (5). Ceci achève la démonstration du lemme 4.1.

Bibliographie

[1] V. N. Basmanov, *Foncteurs covariants, rétractes et dimension*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 271 (1983), 1033–1036 (en russe).

[2] J. van der Bijl and J. van Mill, *Linear spaces, absolute retracts, and the compact extension property*, Proc. Amer. Math. Soc. 104 (1988), 942–952.

[3] R. Cauty, *Une caractérisation des rétractes absolus de voisinage*, Fund. Math. 144 (1994), 11–22.

[4] T. Dobrowolski, *On extending mappings into nonlocally convex linear metric spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 93 (1985), 555–560.

[5] A. N. Dranishnikov, *Sur un problème de P. S. Aleksandrov*, Mat. Sb. 135 (177) (1988), 551–557 (en russe).

[6] R. Engelking, *General Topology*, PWN, Warszawa, 1977.

[7] —, *Dimension Theory*, PWN, Warszawa, 1978.

[8] W. E. Haver, *Locally contractible spaces that are absolute neighborhood retracts*, Proc. Amer. Math. Soc. 40 (1973), 280–284.

[9] —, *A near-selection theorem*, General Topology Appl. 9 (1978), 117–124.

[10] J. L. Kelley and I. Namioka, *Linear Topological Spaces*, van Nostrand, New York, 1963.
[11] V. Klee, *Leray–Schauder theory without local convexity*, Math. Ann. 141 (1960), 286–296.
[12] G. Kozlowski, *Factorization of certain maps up to homotopy*, Proc. Amer. Math. Soc. 21 (1969), 88–92.
[13] J. J. Walsh, *Isotoping mappings to open mappings*, Trans. Amer. Math. Soc. 250 (1979), 121–145.

22, RUE JOUVENET
F-75016 PARIS, FRANCE

Received 26 October 1993;
in revised form 12 May 1994