FUNDAMENTA
MATHEMATICAE
144 (1994)

Une caractérisation des rétractes absolus de voisinage

par

Robert Cauty (Paris)

Abstract. We prove that a metric space is an ANR if, and only if, every open subset of X has the homotopy type of a CW-complex.

1. Introduction. Le but de cet article est de prouver le résultat suivant.

THÉORÈME. *Un espace métrisable X est un rétracte absolu de voisinage si, et seulement si, tout ouvert de X a le type d'homotopie d'un CW-complexe.*

La nécessité est évidente puisque tout ouvert d'un rétracte absolu de voisinage en est encore un et que tout rétracte absolu de voisinage a le type d'homotopie d'un CW-complexe. Le problème de savoir si la réciproque est vraie a été posé par R. Geoghegan [6] et figure dans sa liste classique de problèmes sur la topologie de la dimension infinie [7] sous la référence ANR2, ainsi que dans la nouvelle liste de J. West [14] (mais rebaptisé là ANR3).

L'outil principal de la démonstration est la réalisation géométrique $S(X)$ du complexe singulier de X. L'application naturelle π de $S(X)$ dans X est une équivalence homotopique faible, donc une équivalence homotopique lorsque X a le type d'homotopie d'un CW-complexe. Pour tout sous-ensemble U de X, $S(U)$ s'identifie à un sous-complexe de $S(X)$, donc, dans la situation du théorème, la restriction de π à $S(U)$ est, pour tout ouvert U, une équivalence homotopique de $S(U)$ dans U. Cette propriété nous permettra de construire une fonction continue $\varphi : X \times]0,1] \to S(X)$ et une homotopie $\Phi : X \times [0,1] \to X$ vérifiant $\Phi(x,0) = x$ et $\Phi(x,t) = \pi \circ \varphi(x,t)$ pour $t > 0$. L'existence de ces fonctions entraîne que, pour tout recouvrement ouvert $\mathfrak{U}$ de X, X est $\mathfrak{U}$-dominé par $S(X)$ (si la fonction $\lambda : X \to]0,1]$ est telle que, pour tout $x \in X$, $\Phi(\{x\} \times [0,\lambda(x)])$ soit contenu dans un élément de $\mathfrak{U}$, et si $f : X \to S(X)$ est définie par $f(x) = \varphi(x,\lambda(x))$, alors $\pi \circ f$ est $\mathfrak{U}$-

1991 *Mathematics Subject Classification*: Primary 54C55.

homotope à l'identité de X). Comme $S(X)$ est un CW-complexe (et même triangulable), un théorème de Hanner ([9], théorème 6.3, p. 139) entraîne alors que X est un rétracte absolu de voisinage. La construction de φ et Φ utilise le cylindre de l'application π d'une façon analogue à celle utilisée dans [10] par G. Kozlowski, mais la technique est ici beaucoup plus complexe que dans [10] car l'application π n'est pas fermée et $S(U)$, qui jouera le rôle joué par $\pi^{-1}(U)$ dans [10], est en général un sous-ensemble propre de $\pi^{-1}(U)$ dont l'intérieur dans $S(X)$ est vide.

La distance sur un espace métrique sera toujours notée d; $\operatorname{diam}(U)$ désignera le diamètre d'un sous-ensemble U de X. Si $\mathfrak{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ est une famille de sous-ensembles de X, nous noterons $\overline{\mathfrak{U}} = \{\overline{U}_\alpha \mid \alpha \in A\}$ la famille des fermetures des éléments de $\mathfrak{U}$ et $N(\mathfrak{U})$ le nerf de la famille $\mathfrak{U}$; $\langle \alpha_0, \ldots, \alpha_n \rangle$ désignera le simplexe de $N(\mathfrak{U})$ correspondant aux sommets $U_{\alpha_0}, \ldots, U_{\alpha_n}$. Nous poserons $I = [0,1]$. Une fonction $f : X \to Y$ sera dite *inessentielle* si elle est homotope à une fonction constante.

2. Préliminaires. Pour tout espace X, nous noterons $S(X)$ la réalisation géométrique du complexe singulier de X et π_X — ou simplement π — l'application naturelle de $S(X)$ dans X. Nous utiliserons la construction de $S(X)$ donnée par J. B. Giever [8] (qui le note $\overline{P}(X)$), qui ne tient pas compte des dégénérescences. Pour $U \subset X$, nous identifions $S(U)$ à un sous-complexe de $S(X)$ et, si $\mathfrak{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ est une famille de sous-ensembles de X, nous posons $S(\mathfrak{U}) = \bigcup_{\alpha \in A} S(U_\alpha)$; $S(\mathfrak{U})$ est un sous-complexe de $S(X)$. Il est clair que si U et V sont deux sous-ensembles de X, alors $S(U) \cap S(V) = S(U \cap V)$.

LEMME 1. *Si $\mathfrak{U}$ est une famille de sous-ensembles de X dont les intérieurs recouvrent X, alors l'inclusion $i : S(\mathfrak{U}) \hookrightarrow S(X)$ est une équivalence homotopique.*

Démonstration. Il suffit de montrer que i est une équivalence homotopique faible. Puisque $\pi|S(\mathfrak{U}) = \pi \circ i$ et que π est une équivalence homotopique faible ([8], théorème VI), il suffit de montrer que $\pi|S(\mathfrak{U})$ en est une, mais cela est implicite dans les arguments des sections 8 et 9 de [8] (voir, en particulier, le lemme 2, page 187).

Etant donnée une fonction continue $f : X \to Y$, le *cylindre* $M(f)$ de f est l'espace quotient de la somme topologique $X \times I \amalg Y$ obtenu en identifiant $(x,0)$ à $f(x)$ pour tout $x \in X$. Soit q la projection naturelle de $X \times I \amalg Y$ sur $M(f)$. Nous poserons $[x,t] = q(x,t)$ pour tout $(x,t) \in X \times I$, et nous identifierons naturellement X et Y aux sous-espaces $q(X \times \{1\})$ et $q(Y)$ respectivement de $M(f)$.

Rappelons qu'un sous-espace A d'un espace X est appelé un *rétracte par déformation forte* de X s'il existe une homotopie $k : X \times I \to X$ vérifiant

$k(x,t) = x$ pour $(x,t) \in (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ et $k(X \times \{1\}) \subset A$; une telle homotopie est appelée une *rétraction par déformation forte* de X sur A.

LEMME 2. *Si $f : X \to Y$ est une équivalence homotopique, alors X est un rétracte par déformation forte de $M(f)$.*

Ce lemme résulte immédiatement des théorèmes 1.26 et 2.29 de [3].

Pour tout espace X, nous poserons $M(X) = M(\pi_X)$. Si U est un sous-espace de X, $\pi_U(a) = \pi_X(a)$ pour tout $a \in S(U)$, donc $M(U)$ s'identifie naturellement à un sous-ensemble de $M(X)$. La remarque élémentaire suivante sera utilisée implicitement dans toute la suite.

LEMME 3. *Pour tout sous-espace U de X, la topologie induite par $M(X)$ sur $M(U)$ coïncide avec la topologie du cylindre de l'application π_U.*

Démonstration. Soient $q : S(X) \times I \amalg X \to M(X)$ et $q' : S(U) \times I \amalg U \to M(U)$ les projections naturelles. La restriction de q à $S(U) \times I \amalg U$ étant continue, la topologie $\mathfrak{T}$ induite par $M(X)$ sur $M(U)$ est moins fine que la topologie $\mathfrak{T}'$ du cylindre de π_U. Inversement, soit $F \subset M(U)$ fermé pour $\mathfrak{T}'$; alors $q'^{-1}(F)$ est fermé dans $S(U) \times I \amalg U$ et $F \cap U$ est fermé dans U. Soit G la fermeture de $F \cap U$ dans X, et soit $H = (q'^{-1}(F) \cap (S(U) \times I)) \cup ((\pi_X^{-1}(G) \times \{0\}) \cup G)$. Puisque $S(U)$, étant un sous-complexe, est fermé dans $S(X)$, $q'^{-1}(F) \cap (S(U) \times I)$ est fermé dans $S(X) \times I$, donc H est fermé dans $S(X) \times I \amalg X$. On vérifie facilement que H est saturé pour la relation d'équivalence définissant $M(X)$, donc $q(H)$ est fermé dans $M(X)$, et que $q(H) \cap M(U) = F$, ce qui montre que H est fermé pour $\mathfrak{T}$, donc que $\mathfrak{T}'$ est moins fine que $\mathfrak{T}$, d'où l'égalité.

Pour tout sous-ensemble U de X, $\overline{M(U)} \setminus M(U) \subset X$ et $M(U)$ est fermé si, et seulement si, U est fermé. Le fait que $S(U) \cap S(V) = S(U \cap V)$ entraîne

$$M(U) \cap M(V) = M(U \cap V)$$

pour tous les sous-ensembles U et V de X. Si $\mathfrak{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ est une famille de sous-ensembles de X, nous poserons $M(\mathfrak{U}) = \bigcup_{\alpha \in A} M(U_\alpha)$, que nous regardons comme un sous-espace de $M(X)$; si $\mathfrak{U}$ recouvre X, alors $M(\mathfrak{U})$ contient X. Nous noterons ϱ la rétraction de $M(X)$ sur X définie par $\varrho(x) = x$ si $x \in X$ et $\varrho([a,t]) = \pi(a)$ pour $(a,t) \in S(X) \times I$.

LEMME 4. *Si $\mathfrak{U}$ est une famille de sous-ensembles d'un espace X dont les intérieurs recouvrent X, alors $S(X) \cup M(\mathfrak{U})$ est un rétracte par déformation forte de $M(X)$.*

Démonstration. Puisque $S(\mathfrak{U})$ est un sous-complexe de $S(X)$, l'inclusion $S(\mathfrak{U}) \hookrightarrow S(X)$ est une cofibration; d'après le lemme 1, c'est une équivalence homotopique. D'après le théorème 6 de [13], l'inclusion de $(S(X) \times \{0,1\}) \cup (S(\mathfrak{U}) \times I)$ dans $S(X) \times I$ est une cofibration et une équivalence homotopique. D'après le théorème 2.29 de [3], $(S(X) \times \{0,1\}) \cup (S(\mathfrak{U}) \times I)$

est un rétracte par déformation forte de $S(X) \times I$, donc $(S(X) \times \{0,1\}) \cup (S(\mathfrak{U}) \times I) \amalg X$ est un rétracte par déformation forte de $S(X) \times I \amalg X$. Le lemme s'en déduit par passage au quotient.

Lemme 5. *Soit* $\mathfrak{U}$ *une famille de sous-ensembles d'un espace* X *dont les intérieurs recouvrent* X. *Alors*, $((S(X) \cup M(\mathfrak{U})) \times I) \cup (M(X) \times \{0,1\})$ *est un rétracte par déformation forte de* $M(X) \times I$.

Démonstration. Si $\omega : S(X) \to I$ vérifie $\omega^{-1}(0) = S(\mathfrak{U})$, alors la fonction $\alpha : M(X) \to I$ définie par $\alpha(x) = 0$ si $x \in X$ et $\alpha([a,t]) = \min(t(1-t), \omega(a))$ pour $(a,t) \in S(X) \times I$ vérifie $\alpha^{-1}(0) = S(X) \cup M(\mathfrak{U})$. Combinant les théorèmes 2.29 et 3.26 de [3] avec le lemme 4, nous constatons que l'inclusion de $S(X) \cup M(\mathfrak{U})$ dans $M(X)$ est une cofibration et une équivalence homotopique. Le théorème 6 de [13] garantit alors qu'il en est de même de l'inclusion de $((S(X) \cup M(\mathfrak{U})) \times I) \cup (M(X) \times \{0,1\})$ dans $M(X) \times I$, d'où le résultat ([3], théorème 2.29).

Rappelons qu'un espace topologique X est dit *stratifiable* [1] s'il est séparé et s'il existe une fonction associant à tout ouvert U de X une suite d'ouverts $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ de façon que (a) $\overline{U}_n \subset U$, (b) $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ et (c) $U \subset V$ implique $U_n \subset V_n$ pour tout n. Il est connu (voir [1]) que tout espace stratifiable est paracompact, que tout espace métrisable est stratifiable, ainsi que tout CW-complexe, tout sous-espace d'un espace stratifiable et tout produit dénombrable de tels espaces.

Lemme 6. *Soit* $f : X \to Y$ *une fonction continue. Si* X *et* Y *sont stratifiables*, $M(f)$ *aussi.*

C'est un cas particulier du théorème 6.2 de [1].

Ce lemme entraîne en particulier que $M(X)$ est stratifiable lorsque X est métrisable; c'est le cas dont nous aurons besoin dans la suite.

Un espace X est appelé un *rétracte absolu de voisinage pour la classe des espaces stratifiables* — ou *RAV*(*stratifiable*) — s'il est stratifiable et si, pour tout fermé A d'un espace stratifiable Y, toute fonction continue de A dans X se prolonge à un voisinage de A dans Y. Le théorème d'extension des homotopies de Borsuk s'étend comme suit aux espaces stratifiables.

Lemme 7. *Soient* X *un* *RAV*(*stratifiable*), Y *un espace stratifiable et* A *un fermé de* Y. *Etant données une fonction continue* $f : Y \to X$ *et une homotopie* $h : A \times I \to X$ *vérifiant* $h(a,0) = f(a)\ \forall a \in A$, *il existe une homotopie* $H : Y \times I \to X$ *telle que* $H(x,0) = f(x)\ \forall x \in Y$ *et* $H|A \times I = h$.

Démonstration. Puisque $Y \times I$ est stratifiable, donc normal, cela est une conséquence immédiate du lemme 2.1, page 116, de [9].

Enfin, le lemme suivant est un cas particulier du corollaire 2.4 de [2].

Lemme 8. *Tout CW-complexe est un* *RAV*(*stratifiable*).

3. Deux résultats auxiliaires. Dans toute cette section, X est un espace métrisable dont tout ouvert a le type d'homotopie d'un CW-complexe. Alors, pour tout ouvert U, $\pi|S(U)$ est une équivalence homotopique de $S(U)$ dans U et, d'après le lemme 2, $S(U)$ est un rétracte par déformation forte de $M(U)$.

LEMME 9. *Soient A un fermé de X, Q un voisinage ouvert de A dans X et K un RAV(stratifiable). Si f est une fonction continue de $S(X) \cup M(Q)$ dans K, alors il existe une fonction continue g de $M(X)$ dans K telle que $g|S(X) \cup M(A) = f|S(X) \cup M(A)$.*

Démonstration. Puisque X a le type d'homotopie d'un CW-complexe, il admet un recouvrement ouvert $\mathfrak{P}$ tel que, pour tout $P \in \mathfrak{P}$, l'inclusion $P \hookrightarrow X$ soit inessentielle (voir, par exemple, [3], lemme 8, p. 235). Soit $\mathfrak{V}'$ un recouvrement ouvert localement fini et σ-discret de X plus fin que $\mathfrak{P}$ et que le recouvrement $\{Q, X \setminus A\}$. Soit V la réunion des éléments de $\mathfrak{V}'$ contenus dans Q, et soit $\mathfrak{V} = \{V_i \mid i \in J\}$ la collection des éléments de $\mathfrak{V}'$ qui ne sont pas contenus dans Q. Alors, $\{V\} \cup \mathfrak{V}$ est un recouvrement ouvert de X, donc nous pouvons trouver des ouverts U et U_i, $i \in J$, avec $\overline{U} \subset V$ et $\overline{U}_i \subset V_i$ tels que $\mathfrak{U} = \{U\} \cup \{U_i \mid i \in J\}$ recouvre X. Puisque les éléments de $\mathfrak{V}$ sont contenus dans $X \setminus A$, U contient A.

Comme $\mathfrak{V}'$ est σ-discret, il en est de même de $\mathfrak{V}$; soit $\mathfrak{V} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{V}_n$, où chaque $\mathfrak{V}_n = \{V_i \mid i \in J_n\}$ est une famille discrète. Nous pouvons supposer que $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une partition de J. Pour $p \geq 0$, prenons des ouverts U^p et U_i^p, $i \in J$, vérifiant, pour tout $p \geq 0$,

$$\overline{U} \subset U^{p+1} \subset \overline{U}^{p+1} \subset U^p \subset \overline{U}^p \subset V\,, \tag{1}$$

$$\overline{U}_i \subset U_i^{p+1} \subset \overline{U}_i^{p+1} \subset U_i^p \subset \overline{U}_i^p \subset V_i\,. \tag{2}$$

Pour $n \geq 1$ et $p \geq 0$, soit $\mathfrak{U}_n^p = \{U^p\} \cup \{U_i^p \mid i \in J_1 \cup \ldots \cup J_n\}$. Soit $\mathfrak{U}_0^0 = \{U^0\}$.

AFFIRMATION 1. *Pour $n \geq 0$, il existe des fonctions continues $h_n : S(X) \cup M(\overline{\mathfrak{U}}_n^n) \to K$ vérifiant*

$$h_0 = f|S(X) \cup M(\overline{\mathfrak{U}}_0^0)\,, \tag{3}$$

$$h_n|S(X) \cup M(\overline{\mathfrak{U}}_{n-1}^n) = h_{n-1}|S(X) \cup M(\overline{\mathfrak{U}}_{n-1}^n) \qquad \textit{pour } n \geq 1\,. \tag{4}$$

Supposons cette affirmation démontrée. En raison de (1)–(4), nous pouvons alors définir une fonction $h : S(X) \cup M(\overline{\mathfrak{U}}) \to K$ par

$$h|S(X) \cup M(\overline{U}) = f|S(X) \cup M(\overline{U})\,,$$
$$h|M(\overline{U}_i) = h_n|M(\overline{U}_i) \qquad \text{si } i \in J_n\,.$$

Pour voir que h est continue, remarquons d'abord que la finitude locale de la famille $\overline{\mathfrak{U}}$ dans X entraîne que la famille $\{M(\overline{U}_i) \mid i \in J\}$ est localement finie dans $M(X)$. Comme la restriction de h à chacun des ensembles $S(X) \cup$

$M(\overline{U})$ et $M(\overline{U}_i)$, $i \in J$, qui sont fermés dans $M(X)$ et forment une famille localement finie, est continue, h est continue. Le lemme 4 entraîne l'existence d'une fonction $g : M(X) \to K$ qui prolonge h; puisque U contient A, c'est la fonction cherchée.

La condition (3) définit h_0. Soit $n \geq 1$ et supposons h_{n-1} construite.

AFFIRMATION 2. *Pour tout $i \in J_n$, il existe une fonction continue $h_i : M(U_i^{n-1}) \to K$ coïncidant avec h_{n-1} sur $M(U_i^{n-1}) \cap (S(X) \cup M(\overline{\mathfrak{U}}_{n-1}^n))$.*

Notons d'abord que l'affirmation 2 entraîne l'affirmation 1 car, les éléments de $\mathfrak{V}_n$ étant deux à deux disjoints, elle nous permet de définir h_n par

$$h_n|S(X) \cup M(\overline{\mathfrak{U}}_{n-1}^n) = h_{n-1}|S(X) \cup M(\overline{\mathfrak{U}}_{n-1}^n)\,,$$
$$h_n|M(\overline{U}_i^n) = h_i|M(\overline{U}_i^n) \qquad \text{pour } i \in J_n\,.$$

La continuité de h_n se vérifie comme celle de h ci-dessus.

Pour i dans J_n, soit $\mathfrak{R}_i$ la famille des ouverts $U_i^{n-1} \cap U^{n-1}$ et $U_i^{n-1} \cap U_j^{n-1}$, $j \in J_1 \cup \ldots \cup J_{n-1}$; soit R_i la réunion des éléments de $\mathfrak{R}_i$. Le lemme 4 garantit l'existence d'une fonction continue $k_i : M(R_i) \to K$ coïncidant avec h_{n-1} sur $M(\mathfrak{R}_i) \cup S(R_i)$. Alors, (4) permet de définir une fonction $\overline{k}_i : M(R_i) \cup S(U_i^{n-1}) \to K$ par $\overline{k}_i|M(R_i) = k_i$ et $\overline{k}_i|S(U_i^{n-1}) = h_{n-1}|S(U_i^{n-1})$; cette fonction est continue puisque ses restrictions à $M(R_i)$ et $S(U_i^{n-1})$ le sont et que ces ensembles sont fermés dans $M(R_i) \cup S(U_i^{n-1})$.

AFFIRMATION 3. *$\overline{k}_i$ est inessentielle.*

L'affirmation 3 entraîne l'affirmation 2. En effet, puisque $M(U_i^{n-1}) \cap S(X) = S(U_i^{n-1})$ et que $M(U_i^{n-1}) \cap M(\overline{\mathfrak{U}}_{n-1}^n) \subset M(U_i^{n-1}) \cap M(\mathfrak{R}_i)$, la définition de $\overline{k}_i$ et l'affirmation 3 entraînent que la restriction de h_{n-1} au sous-ensemble $M(U_i^{n-1}) \cap (S(X) \cup M(\overline{\mathfrak{U}}_{n-1}^n))$, qui est fermé dans $M(U_i^{n-1})$, est inessentielle, donc, à l'aide du lemme 7, se prolonge en une fonction continue $h_i : M(U_i^{n-1}) \to K$.

Pour prouver l'affirmation 3, considérons d'abord le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} S(U_i^{n-1}) & \xrightarrow{\alpha'} & S(X) \\ {\scriptstyle\pi'}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\pi} \\ U_i^{n-1} & \xrightarrow{\alpha} & X \end{array}$$

où α, α' sont des inclusions et π' la restriction de π. Puisque U_i^{n-1} est contenu dans un élément de $\mathfrak{P}$, α est inessentielle. Puisque X et U_i^{n-1} sont ouverts, π et π' sont des équivalences homotopiques. Par suite, α' est inessentielle; comme h_{n-1} est définie sur $S(X)$, $h_{n-1}|S(U_i^{n-1})$ est donc aussi inessentielle.

Puisque R_i est ouvert, $S(R_i)$ est un rétracte par déformation forte de $M(R_i)$. Comme $S(U_i^{n-1}) \cap M(R_i) = S(R_i)$, $S(U_i^{n-1})$ est donc un rétracte par déformation forte de $S(U_i^{n-1}) \cup M(R_i)$. Par suite, $\overline{k}_i$ est homotope à une fonction de la forme $(\overline{k}_i|S(U_i^{n-1})) \circ r$, où r est une rétraction de $S(U_i^{n-1}) \cup M(R_i)$ sur $S(U_i^{n-1})$. Comme $\overline{k}_i|S(U_i^{n-1}) = h_{n-1}|S(U_i^{n-1})$, cela entraîne l'inessentialité de $\overline{k}_i$, d'où le lemme.

LEMME 10. *Soient A un fermé de X, Q un voisinage ouvert de A dans X et K un RAV(stratifiable). Si F est une fonction continue de $((S(X) \cup M(Q)) \times I) \cup (M(X) \times \{0,1\})$ dans K, alors il existe une fonction continue G de $M(X) \times I$ dans K qui coïncide avec F sur $((S(X) \cup M(A)) \times I) \cup (M(X) \times \{0,1\})$.*

Démonstration. Prenons des ouverts V, W vérifiant $A \subset V \subset \overline{V} \subset W \subset \overline{W} \subset Q$. Soit $\mathfrak{U} = \{\overline{W}, X \setminus V\}$; les intérieurs des éléments de $\mathfrak{U}$ recouvrent X.

AFFIRMATION. *Il existe une fonction continue $H : (S(X) \cup M(\mathfrak{U})) \times I \times I \to M(X) \times I$ vérifiant*

(i) $H(a,t,s) = (a,t)$ *si* $(a,t,s) \in (S(X) \times I \times I) \cup (M(\mathfrak{U}) \times I \times \{0\})$,
(ii) $H(M(\mathfrak{U}) \times \{t\} \times I) \subset M(X) \times \{t\}$ $\forall t \in [0,1]$,
(iii) $H(M(A) \times I \times I) \subset M(Q) \times I$,
(iv) $H(M(\mathfrak{U}) \times I \times \{1\}) \subset S(X) \times I$.

Pour prouver cela, soit $\lambda : X \to I$ une fonction continue telle que $\lambda^{-1}(1) = A$ et $\lambda^{-1}(0) = X \setminus V$. Soit $k : M(Q) \times I \to M(Q)$ une rétraction par déformation forte de $M(Q)$ sur $S(Q)$, et soit $k' : M(X) \times I \to M(X)$ une rétraction par déformation forte de $M(X)$ sur $S(X)$. Posons

$$H(a,t,s) = (a,t) \qquad \text{si } (a,t,s) \in S(X) \times I \times I\,.$$

Pour $(a,t) \in M(\mathfrak{U}) \times I$ et $0 \le s \le 1/2$, posons

$$H(a,t,s) = \begin{cases} (k(a, 2s\lambda(\varrho(a))), t) & \text{si } a \in M(\overline{W}),\\ (a,t) & \text{si } a \in M(X \setminus V). \end{cases}$$

Cette définition a un sens car $k(a,s) = a$ si $a \in S(Q)$ et, si $a \in M(\overline{W}) \cap M(X \setminus V) = M(\overline{W} \setminus V)$, alors $\lambda(\varrho(a)) = 0$, donc $k(a, 2s\lambda(\varrho(a))) = k(a,0) = a$. Notant $h(a)$ la projection (indépendante de t) de $H(a,t,1)$ sur $M(X)$, posons, pour $a \in M(\mathfrak{U})$ et $1/2 \le s \le 1$,

$$H(a,t,s) = (k'(h(a), 2s-1), t)\,,$$

ce qui est compatible avec les définitions précédentes. La fonction H est continue car sa restriction à chacun des fermés $S(X) \times I \times I$, $M(\overline{W}) \times I \times [0,1/2]$, $M(X \setminus V) \times I \times [0,1/2]$ et $M(\mathfrak{U}) \times I \times [1/2,1]$ l'est. Les conditions (i) et (ii) sont évidemment vérifiées, ainsi que (iv) car $k'(M(X) \times \{1\}) \subset S(X)$. Si $a \in M(A)$, alors $\lambda(\varrho(a)) = 1$, donc, pour $0 \le s \le 1/2$, $H(a,t,s) =$

$(k(a,2s),t) \in M(Q) \times I$; en outre, $h(a) = k(a,1) \in S(X)$, donc $H(a,t,s) = H(a,t,1/2)$ pour $1/2 \le s \le 1$, d'où (iii).

Les conditions (i)–(iv) entraînent que nous pouvons définir une fonction continue

$$\overline{H} : [(S(X) \cup M(\mathfrak{U})) \times I \times \{0\}] \\ \cup [((S(X) \cup M(A)) \times I \cup (M(\mathfrak{U}) \times \{0,1\})) \times I] \to K$$

par

$$\overline{H}(a,t,s) = F(H(a,t,1-s))\,.$$

D'après (i), $\overline{H}(a,t,1) = F(a,t)$ pour $(a,t) \in ((S(X) \cup M(A)) \times I) \cup (M(\mathfrak{U}) \times [0,1])$. Le lemme 7, appliqué à l'inclusion

$$((S(X) \cup M(A)) \times I) \cup (M(\mathfrak{U}) \times \{0,1\}) \hookrightarrow (S(X) \cup M(\mathfrak{U})) \times I\,,$$

entraîne alors que $F|((S(X) \cup M(A)) \times I) \cup (M(\mathfrak{U}) \times \{0,1\})$ se prolonge en une fonction continue $\overline{F} : (S(X) \cup M(\mathfrak{U})) \times I \to K$. Nous pouvons prolonger $\overline{F}$ à $((S(X) \cup M(\mathfrak{U})) \times I) \cup (M(X) \times \{0,1\})$ en posant $\overline{F}(a,t) = F(a,t)$ si $(a,t) \in M(X) \times \{0,1\}$, et le lemme 5 permet alors de trouver un prolongement continu G de $\overline{F}$ à $M(X) \times I$; c'est la fonction cherchée.

Dans la section suivante, nous appliquerons les lemmes 9 et 10 au cas où $K = S(U)$, U ouvert de X, ce qui est légitime d'après le lemme 8.

4. Démonstration du théorème. Comme il est indiqué dans l'introduction, il suffit de construire une fonction continue $\varphi : X \times]0,1] \to S(X)$ et une homotopie $\Phi : X \times I \to X$ vérifiant $\Phi(x,0) = x$ et $\Phi(x,t) = \pi \circ \varphi(x,t)$ pour $t > 0$.

Supposons la distance de X bornée par 1. Partant de $A_0 = \{0\}$ et $\mathfrak{U}_0 = \{X\}$, construisons par récurrence des recouvrements ouverts localement finis $\mathfrak{U}_n = \{U_\alpha \mid \alpha \in A_n\}$ de X vérifiant, pour $n \ge 0$,

(1) $\operatorname{diam}(U_\alpha) \le 2^{-n} \quad \forall \alpha \in A_n$,

(2) $\overline{\mathfrak{U}}_{n+1}$ est plus fin que $\mathfrak{U}_n$,

(3) le nerf $N(\overline{\mathfrak{U}}_n)$ est localement de dimension finie.

La possibilité de trouver ces recouvrements découle de la paracompacité de X et d'un résultat de C. H. Dowker ([4], lemme 3.3). Pour $\alpha \in A_n$, $n \ge 1$, choisissons $\lambda(\alpha) \in A_{n-1}$ tel que $U_{\lambda(\alpha)}$ contienne $\overline{U}_\alpha$.

Pour $\alpha \in A_n$, $n \ge 1$ et $p \ge 0$, prenons des ouverts U_α^p et des fermés F_α^p vérifiant

(4) $\overline{U}_\alpha \subset U_\alpha^{p+1} \subset F_\alpha^{p+1} \subset U_\alpha^p \subset F_\alpha^p \subset U_{\lambda(\alpha)}$,

(5) la famille $\{F_\alpha^0 \mid \alpha \in A_n\}$ est localement finie,

(6) pour $\alpha_0, \ldots, \alpha_i$ dans A_n, $F^0_{\alpha_0} \cap \ldots \cap F^0_{\alpha_i} \neq \emptyset$ si, et seulement si,

$$\overline{U}_{\alpha_0} \cap \ldots \cap \overline{U}_{\alpha_i} \neq \emptyset .$$

(L'existence d'ensembles F^p_α et U^p_α vérifiant ces conditions résulte de la proposition 1.9, p. 60 de [11]).

Si $\sigma = \{\alpha_0, \ldots, \alpha_i\}$ est un simplexe de $N(\overline{\mathfrak{U}}_n)$ et p un entier ≥ 0, nous poserons $U^p_\sigma = U^p_{\alpha_0} \cap \ldots \cap U^p_{\alpha_i}$ et $F^p_\sigma = F^p_{\alpha_0} \cap \ldots \cap F^p_{\alpha_i}$; nous noterons $\lambda(\sigma) = \langle \lambda(\alpha_0), \ldots, \lambda(\alpha_i) \rangle$, qui est un simplexe de $N(\mathfrak{U}_{n-1})$ (éventuellement de dimension inférieure à celle de σ). Quand cela a un sens, nous écrirons $\lambda^3(\alpha) = \lambda \circ \lambda \circ \lambda(\alpha)$ et $\lambda^3(\sigma) = \lambda \circ \lambda \circ \lambda(\sigma)$ ($\alpha \in A_n$ et σ simplexe de $N(\overline{\mathfrak{U}}_n)$). Pour tout simplexe σ de $N(\overline{\mathfrak{U}}_n)$, posons

$$\mu(\sigma) = \sup\{\dim \tau - \dim \sigma\} ,$$

la borne supérieure étant prise sur tous les simplexes τ dont σ est face. D'après (3), $\mu(\sigma)$ est un entier ≥ 0. Si σ est une face propre de τ, alors $\mu(\sigma) > \mu(\tau)$.

Affirmation 1. *Pour tout $n \geq 1$, il existe une fonction continue f_n : $M(X) \to S(X)$ vérifiant*

(i) $f_n(a) = a \ \forall a \in S(X)$,
(ii) $f_n(M(\overline{U}_\alpha)) \subset S(U_{\lambda(\alpha)}) \ \forall \alpha \in A_n$.

Fixons n. Nous allons d'abord construire, pour tout simplexe σ de $N(\overline{\mathfrak{U}}_n)$, une fonction continue $f_\sigma : M(F^{\mu(\sigma)}_\sigma) \to S(U_{\lambda(\sigma)})$ de façon que

(7) $f_\sigma(a) = a \ \forall a \in S(F^{\mu(\sigma)}_\sigma)$,

(8) si σ est face de τ, alors $f_\sigma | M(F^{\mu(\sigma)}_\tau) = f_\tau | M(F^{\mu(\sigma)}_\tau)$.

Si $\mu(\sigma) = 0$, la condition (8) est vide, et l'on peut prendre pour f_σ la restriction d'une rétraction de $M(U_{\lambda(\sigma)})$ sur $S(U_{\lambda(\sigma)})$, qui existe d'après le lemme 2. Soit $k \geq 1$ et supposons f_τ définie lorsque $\mu(\tau) < k$. Fixons un simplexe σ avec $\mu(\sigma) = k$. Soit $\mathfrak{D}_\sigma$ l'ensemble des simplexes de $N(\overline{\mathfrak{U}}_n)$ dont σ est une face propre, et soit $\mathfrak{F}_\sigma = \{F^{k-1}_\tau \mid \tau \in \mathfrak{D}_\sigma\}$. Si τ et τ' sont deux éléments de $\mathfrak{D}_\sigma$ tels que $F^{k-1}_\tau \cap F^{k-1}_{\tau'} \neq \emptyset$, alors, d'après (4) et (6), les sommets des simplexes τ et τ' déterminent un simplexe $\overline{\tau}$ de $N(\overline{\mathfrak{U}}_n)$ pour lequel $F^{k-1}_\tau \cap F^{k-1}_{\tau'} = F^{k-1}_{\overline{\tau}}$, d'où $M(F^{k-1}_\tau) \cap M(F^{k-1}_{\tau'}) = M(F^{k-1}_{\overline{\tau}})$. En utilisant (8), on constate que $f_\tau | M(F^{k-1}_{\overline{\tau}}) = f_{\tau'} | M(F^{k-1}_{\overline{\tau}})$, donc nous pouvons définir une fonction $g_\sigma : S(F^{k-1}_\sigma) \cup M(\mathfrak{F}_\sigma) \to S(X)$ par

$$g_\sigma(a) = a \quad \text{ si } a \in S(F^{k-1}_\sigma) ,$$
$$g_\sigma | M(F^{k-1}_\tau) = f_\tau | M(F^{k-1}_\tau) \quad \forall \tau \in \mathfrak{D}_\sigma .$$

Comme $f_\tau(M(F^{k-1}_\tau)) \subset S(U_{\lambda(\tau)})$, g_σ est à valeurs dans $S(U_{\lambda(\sigma)})$. La restriction de g_σ à chacun des fermés $S(F^{k-1}_\sigma)$ et $M(F^{k-1}_\tau)$, $\tau \in \mathfrak{D}_\sigma$, est continue; il résulte de (5) que cette famille est localement finie dans $M(X)$, donc g_σ est continue.

Soit $\mathfrak{Q}_\sigma = \{U_\tau^{k-1} \mid \tau \in \mathfrak{D}_\sigma\}$, et soit Q la réunion des éléments de $\mathfrak{Q}_\sigma$; Q est un ouvert contenu dans U_σ^{k-1}. Le lemme 4 permet de trouver une fonction continue $g'_\sigma : M(Q) \to S(U_{\lambda(\sigma)})$ égale à g_σ sur $S(Q) \cup M(\mathfrak{Q}_\sigma)$. D'après (5), la famille des fermés F_τ^k avec $\tau \in \mathfrak{D}_\sigma$ est localement finie; sa réunion P est donc fermée, et est contenue dans Q d'après (4). Appliquant le lemme 9, en y remplaçant X par U_σ^{k-1} et A par P, nous pouvons trouver une fonction continue $g''_\sigma : M(U_\sigma^{k-1}) \to S(U_{\lambda(\sigma)})$ telle que $g''_\sigma|M(P) = g'_\sigma|M(P)$ et $g''_\sigma(a) = a$ pour $a \in S(U_\sigma^{k-1})$. Soit f_σ la restriction de g''_σ à $M(F_\sigma^k)$. La condition (7) est vérifiée par construction, et (8) résulte du fait que si $\tau \in \mathfrak{D}_\sigma$, alors $F_\tau^k \subset P$, et g''_σ, g'_σ, g_σ et f_τ coïncident sur $M(F_\tau^k)$.

Notant simplement α le 0-simplexe associé à un élément $\overline{U}_\alpha$ de $\overline{\mathfrak{U}}_n$ (nous supposons les U_α non vides), et f_α la fonction associée ci-dessus à ce 0-simplexe, il résulte de (8), appliqué aux 1-simplexes $\langle \alpha, \alpha' \rangle$ de $N(\overline{\mathfrak{U}}_n)$, que $f_\alpha|M(\overline{U}_\alpha) \cap M(\overline{U}_{\alpha'}) = f_{\alpha'}|M(\overline{U}_\alpha) \cap M(\overline{U}_{\alpha'})$. D'après (7), nous pouvons donc définir une fonction $f' : S(X) \cup M(\overline{\mathfrak{U}}_n) \to S(X)$ par

$$f'(a) = a \qquad \forall a \in S(X)\,,$$
$$f'|M(\overline{U}_\alpha) = f_\alpha|M(\overline{U}_\alpha) \qquad \forall \alpha \in A_n\,.$$

La continuité de f' résulte encore de la finitude locale de la famille de fermés $M(\overline{U}_\alpha)$, $\alpha \in A_n$. Le lemme 4 permet alors de prolonger f' en une fonction continue $f_n : M(X) \to S(X)$. La condition (i) est trivialement vérifiée, et (ii) résulte de ce que $f'|M(\overline{U}_\alpha) = f_\alpha|M(\overline{U}_\alpha)$.

Affirmation 2. *Pour tout $n \geq 2$, il existe une homotopie $h_n : M(X)\times I \to S(X)$ vérifiant*

(i) $h_n(a,t) = a \quad \forall (a,t) \in S(X) \times I$,
(ii) $h_n(y,0) = f_n(y)$, $h_n(y,1) = f_{n-1}(y) \quad \forall y \in M(X)$,
(iii) $h_n(M(\overline{U}_\alpha) \times I) \subset S(U_{\lambda^3(\alpha)})$ $\forall \alpha \in A_{n+1}$.

La démonstration est parallèle à celle de l'affirmation 1, mais utilise les lemmes 5 et 10 au lieu des lemmes 4 et 9. Nous commençons par construire, par récurrence sur $\mu(\sigma)$, pour tout simplexe σ de $N(\overline{\mathfrak{U}}_{n+1})$, une homotopie $h_\sigma : M(F_\sigma^{\mu(\sigma)}) \times I \to S(U_{\lambda^3(\sigma)})$ vérifiant

(9) $\qquad h_\sigma(a,t) = a$ $\forall (a,t) \in S(F_\sigma^{\mu(\sigma)}) \times I$,

(10) $\qquad h_\sigma(y,0) = f_n(y)$, $h_\sigma(y,1) = f_{n-1}(y)$ $\forall y \in M(F_\sigma^{\mu(\sigma)})$,

(11) $\qquad$ si σ est face de τ, alors $h_\sigma|M(F_\tau^{\mu(\sigma)}) \times I = h_\tau|M(F_\tau^{\mu(\sigma)}) \times I$.

Si $\mu(\sigma) = 0$, on peut, en remarquant que, d'après (ii) de l'affirmation 1, f_n et f_{n-1} envoient $M(U_{\lambda(\sigma)})$ dans $S(U_{\lambda^3(\sigma)})$, prendre pour h_σ la restriction d'une homotopie h de $M(U_{\lambda(\sigma)}) \times I$ dans $S(U_{\lambda^3(\sigma)})$ vérifiant $h(a,t) = a$ si

$(a,t) \in S(U_{\lambda(\sigma)}) \times I$, $h(y,0) = f_n(y)$ et $h(y,1) = f_{n-1}(y)$ $\forall y \in M(U_{\lambda(\sigma)})$ (l'existence de h est garantie par le lemme 10, avec $X = U_{\lambda(\sigma)}$, $A = Q = \emptyset$ et $K = S(U_{\lambda^3(\sigma)})$). Supposant $\mu(\sigma) = k > 0$ et h_τ construite pour $\mu(\tau) < k$, définissons $\mathfrak{D}_\sigma$, $\mathfrak{F}_\sigma$, $\mathfrak{Q}_\sigma$, Q et P comme précédemment (en changeant n en $n+1$). Les h_τ, $\tau \in \mathfrak{D}_\sigma$, permettent de définir une fonction continue

$$k_\sigma : ((S(F_\sigma^{k-1}) \cup M(\mathfrak{F}_\sigma)) \times I) \cup (M(F_\sigma^{k-1}) \times \{0,1\}) \to S(U_{\lambda^3(\sigma)})$$

par

$$k_\sigma(a,t) = a \quad \text{si } (a,t) \in S(F_\sigma^{k-1}) \times I\,,$$
$$k_\sigma | M(F_\tau^{k-1}) \times I = h_\tau | M(F_\tau^{k-1}) \times I \quad \forall \tau \in \mathfrak{D}_\sigma\,,$$
$$k_\sigma(y,0) = f_n(y), \quad k_\sigma(y,1) = f_{n-1}(y) \quad \forall y \in M(F_\sigma^{k-1})\,.$$

Le lemme 5 permet de trouver une fonction continue $k'_\sigma : M(Q) \times I \to S(U_{\lambda^3(\sigma)})$ égale à k_σ sur $((S(Q) \cup M(\mathfrak{Q}_\sigma)) \times I) \cup (M(Q) \times \{0,1\})$, puis le lemme 10 de trouver une homotopie $k''_\sigma : M(U_\sigma^{k-1}) \times I \to S(U_{\lambda^3(\sigma)})$ vérifiant

$$k''_\sigma(a,t) = a \quad \text{si } (a,t) \in S(U_\sigma^{k-1}) \times I\,,$$
$$k''_\sigma(y,0) = f_n(y), \quad k''_\sigma(y,1) = f_{n-1}(y) \quad \forall y \in M(U_\sigma^{k-1})\,,$$
$$k''_\sigma | M(P) \times I = k'_\sigma | M(P) \times I\,.$$

On peut alors prendre pour h_σ la restriction de k''_σ à $M(F_\sigma^k) \times I$. Notant h_α la fonction ainsi associée à un 0-simplexe α de $N(\overline{\mathfrak{U}}_{n+1})$, définissons $h' : ((S(X) \cup M(\overline{\mathfrak{U}}_{n+1})) \times I) \cup (M(X) \times \{0,1\}) \to S(X)$ par

$$h'(a,t) = a \quad \forall (a,t) \in S(X)\,,$$
$$h' | M(\overline{U}_\alpha) \times I = h_\alpha | M(\overline{U}_\alpha) \times I \quad \forall \alpha \in A_{n+1}\,,$$
$$h'(y,0) = f_n(y), \quad h'(y,1) = f_{n-1}(y) \quad \forall y \in M(X)\,.$$

Le lemme 5 permet de prolonger h' en une homotopie $h_n : M(X) \times I \to S(X)$ qui a les propriétés souhaitées.

Définissons alors $\varphi : X \times]0,1] \to S(X)$ par

$$\varphi(x,t) = h_{n+1}(x, 2^n(t - 2^{-n})) \quad \text{pour } 2^{-n} \le t \le 2^{-n+1},\ n \ge 1\,.$$

Puisque $h_{n+2}(x,1) = f_{n+1}(x) = h_{n+1}(x,0)$, cette définition a un sens; les h_n étant continues, φ aussi. Posons ensuite

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} x & \text{si } t = 0, \\ \pi \circ \varphi(x,t) & \text{si } 0 < t \le 1. \end{cases}$$

La fonction Φ est continue sur $X \times]0,1]$. Remarquons que, d'après (iii) de l'affirmation 2, si $\alpha \in A_{n+2}$ est tel que U_α contienne x, alors, pour $2^{-n} \le t \le 2^{-n+1}$, $U_{\lambda^3(\alpha)}$ contient x et $\Phi(x,t)$, d'où, d'après (1), puisque $\lambda^3(\alpha) \in A_{n-1}$,

$$d(x, \Phi(x,t)) \le 2^{-n+1} \quad \text{pour } 2^{-n} \le t \le 2^{-n+1},\ n \ge 1\,.$$

La continuité de Φ aux points $(x,0)$ en résulte, d'où le théorème.

Bibliographie

[1] C. J. R. Borges, *On stratifiable spaces*, Pacific J. Math. 17 (1966), 1–16.
[2] R. Cauty, *Convexité topologique et prolongement des fonctions continues*, Compositio Math. 27 (1973), 233–271.
[3] T. tom Dieck, K. H. Kamps und D. Puppe, *Homotopietheorie*, Lecture Notes in Math. 157, Springer, Berlin, 1970.
[4] C. H. Dowker, *Mapping theorems for non-compact spaces*, Amer. J. Math. 69 (1947), 200–242.
[5] R. Engelking, *General Topology*, PWN, Warszawa, 1977.
[6] R. Geoghegan, *Conjecture 6*, in: Proc. Internat. Conf. on Geometric Topology, Warszawa, 1978, Presented Problems, PWN, Warszawa, 1980, p. 463.
[7] —, *Open problems in infinite-dimensional topology*, Topology Proc. 4 (1979), 287–338.
[8] J. B. Giever, *On the equivalence of two singular homology theories*, Ann. of Math. 51 (1950), 178–191.
[9] S. T. Hu, *Theory of Retracts*, Wayne State University Press, Detroit, 1965.
[10] G. Kozlowski, *Images of ANR's*, manuscrit non publié.
[11] A. R. Pears, *Dimension Theory of General Spaces*, Cambridge University Press, Cambridge, 1975.
[12] E. H. Spanier, *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, New York, 1966.
[13] A. Strøm, *Note on cofibrations II*, Math. Scand. 22 (1968), 130–142.
[14] J. E. West, *Open problems in infinite dimensional topology*, in: Open Problems in Topology, J. van Mill and G. M. Reed (eds.), Elsevier, 1990, 524–597.

22, RUE JOUVENET
F-75016 PARIS, FRANCE

Received 3 March 1992;
in revised form 15 April 1993