FUNDAMENTA
MATHEMATICAE
143 (1993)

Classes de Wadge potentielles
et théorèmes d'uniformisation partielle

par

Dominique Lecomte (Paris)

Résumé. On cherche à donner une construction aussi simple que possible d'un borélien donné d'un produit de deux espaces polonais. D'où l'introduction de la notion de classe de Wadge potentielle. On étudie notamment ce que signifie "ne pas être potentiellement fermé", en montrant des résultats de type Hurewicz. Ceci nous amène naturellement à des théorèmes d'uniformisation partielle, sur des parties "grosses", au sens du cardinal ou de la catégorie.

0. Introduction. La notion de classe de Wadge permet de mesurer la complexité topologique d'un borélien d'un espace polonais de dimension 0. On peut se demander si la complexité d'un borélien donné ne diminue pas en raffinant la topologie polonaise de l'espace ambiant. Comme on le verra au tout début, la réponse est positive : tout borélien peut être rendu ouvert.

Mais la question analogue se pose avec des topologies produit, notamment lors de l'étude des relations d'équivalence boréliennes; d'où l'introduction de la notion de classe de Wadge potentielle (on détaillera ce lien dans le chapitre 1). Après avoir effectué quelques rappels et établi quelques propriétés de base, on donne une nouvelle démonstration d'un premier résultat d'uniformisation partielle, déjà prouvé par Przymusi/nski : une condition nécessaire et suffisante pour qu'un borélien contienne un graphe de fonction borélienne à image non dénombrable. Ensuite, on verra qu'à chaque niveau de complexité on peut trouver un borélien dont la complexité ne diminue pas.

Suite à quoi on cherchera à savoir si certains résultats vrais pour les classes de Wadge peuvent être adaptés aux classes de Wadge potentielles. En l'occurrence, il s'agit d'une part de voir si cette notion correspond à une réduction, comme dans le cas des classes de Wadge classiques, et on verra que non. On cherchera ensuite à savoir si on peut obtenir des résultats de type Hurewicz, c'est-à-dire : ne pas être d'une classe donnée, c'est être au

1991 *Mathematics Subject Classification*: Primary 04A15.

moins aussi compliqué que des exemples de référence n'étant pas de cette classe.

On obtiendra des résultats partiels pour les potentiellement fermés, et pour les petites classes de Wadge (notamment, on caractérisera les boréliens potentiellement fermés parmi les boréliens à coupes dénombrables, à l'aide d'ensembles localement à projections ouvertes).

Ce qui nous amènera à de nouveaux résultats d'uniformisation, pour des ensembles à coupes maigres et des G_δ denses, dont le but est d'obtenir d'autres caractérisations que celles évoquées ci-dessus.

1. Notations et rappels. On utilisera les notations standard de la théorie descriptive des ensembles, qui peuvent être trouvées dans [Mo]. Par exemple, on notera $D_2(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)$ la classe des différences de deux ouverts.

Γ désignera une famille d'ensembles, et $\Gamma\lceil X$ les parties de X qui sont dans Γ. Par exemple, $\boldsymbol{\Delta}^1_1\lceil \mathbf{2}^\omega$ désignera l'ensemble des boréliens de $\mathbf{2}^\omega$.

Dans un espace polonais récursivement présenté, Σ désignera la topologie engendrée par les Σ^1_1 (c'est la topologie de Gandy–Harrington), Δ la topologie engendrée par les Δ^1_1, ce qu'on pourra noter aussi $\prec\Delta^1_1\succ$ (cette topologie est polonaise : cf. [Lo4]).

Si X est un tel espace, on pose $\Omega_X := \{x \in X : \omega^x_1 = \omega^{\mathrm{CK}}_1\}$. Rappelons (cf. [Mo]) que Ω_X est Σ^1_1, et un Σ-ouvert dense (cf. [Lo1]). Les traces des Σ^1_1 sur Ω_X sont $\boldsymbol{\Delta}^0_1\lceil(\Omega_X, \Sigma\lceil\Omega_X)$; en effet, si A est Σ^1_1 contenu dans Ω_X et f est Δ^1_1 telle que $f(x) \in \mathrm{WO} \Leftrightarrow x \notin A$, on a

$$x \notin A \Leftrightarrow x \notin \Omega_X \text{ ou } [x \in \Omega_X \text{ et } \exists \xi < \omega^{\mathrm{CK}}_1\ (f(x) \in \mathrm{WO} \text{ et } |f(x)| \le \xi)].$$

L'espace $(\Omega_X, \Sigma\lceil\Omega_X)$ est donc à base dénombrable d'ouverts-fermés, donc métrisable séparable; on sait (cf. [Lo1]) que c'est un espace fortement α-favorable, donc c'est un espace polonais, de dimension 0 par ce qui précède.

Si X et Y sont des espaces topologiques, Π_X (resp. Π_Y) désignera la projection de $X \times Y$ sur X (resp. Y). Le symbole $\delta(C)$ désignera le diamètre de C pour une distance qui rende complet l'espace polonais ambiant.

Par ailleurs, je renvoie le lecteur à [Ku] et [Mo] pour ce qui concerne les notions de base en topologie, en théorie descriptive et en théorie effective, et à [W] et [Lo2] pour les résultats sur les classes de Wadge, qui seront rappelés en cas de besoin. Rappelons tout de même certains de ces résultats.

Soit P_0 (resp. P) un espace polonais de dimension 0, et A_0 (resp. A) un borélien de P_0 (resp. P). On dira que A est dans la *classe de Wadge engendrée par* A_0 (notée $\langle A_0\rangle$) s'il existe une fonction continue f de P dans P_0 telle que $A = f^{-1}(A_0)$.

Si Γ est une famille d'ensembles, on notera $\check{\Gamma} := \{\check{A} : A \in \Gamma\}$. Par exemple, $\check{\boldsymbol{\Sigma}}^0_1 = \boldsymbol{\Pi}^0_1$. On dira que Γ est *auto-duale* si $\Gamma = \check{\Gamma}$.

Soit Γ une famille de boréliens d'espaces polonais de dimension 0, stable par image réciproque continue. On montre que Γ est une classe de Wadge non auto-duale si et seulement si Γ admet un universel. Ainsi les classes de Baire additives et multiplicatives sont des classes de Wadge non auto-duales, par exemple.

On ordonne les classes de Wadge par l'inclusion; ce qui précède montre que cet ordre n'est pas total : deux classes de Wadge non auto-duales duales l'une de l'autre sont incomparables. On a cependant le théorème de Wadge : si Γ_1 et Γ_2 sont des classes de Wadge, alors $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$ ou $\Gamma_2 \subseteq \check{\Gamma}_1$. Cet ordre est également bien fondé. On sait aussi qu'une classe de Wadge non auto-duale a pour successeur une classe de Wadge auto-duale, et qu'une classe de Wadge auto-duale a pour successeurs deux classes de Wadge non auto-duales duales l'une de l'autre.

On montre également que si Γ est non auto-duale, $\mathbf{2}^\omega$ contient un vrai Γ, c'est-à-dire un élément de $\Gamma \setminus \check{\Gamma}$.

Si F est fermé dans l'espace polonais P de dimension 0, dire que A est dans $\Gamma\lceil F$ équivaut à affirmer l'existence de B dans $\Gamma\lceil P$ tel que $A = B \cap F$.

Enfin, si ξ est un ordinal dénombrable non nul, on note $\boldsymbol{\Delta}^0_\xi$-PU$(\Gamma)$ la classe suivante : $\{\bigcup_{n\in\omega} A_n \cap U_n : (U_n)\ \boldsymbol{\Delta}^0_\xi\text{-partition},\ A_n \in \Gamma\}$. On montre que si Γ est une classe de Wadge, $\Gamma = \boldsymbol{\Delta}^0_1$-PU$(\Gamma)$, et que si de plus $\Gamma \neq \{\emptyset\}$ et $\check{\Gamma} \neq \{\emptyset\}$, il existe un plus grand ordinal dénombrable ξ tel que $\Gamma = \boldsymbol{\Delta}^0_\xi$-PU$(\Gamma)$, appelé *niveau* de Γ (on convient que $\{\emptyset\}$ et $\{\emptyset\}^\vee$ sont de niveau 0).

Rappel 1.1. (a) [Ku] *Si X est un espace polonais et (B_n) une suite de boréliens de X, il existe une topologie polonaise sur X, plus fine que la topologie initiale, rendant les B_n ouverts.*

(b) [Lo3] *Si (X,σ) et Y sont des espaces polonais et B un borélien de $X\times Y$ ayant ses coupes verticales $\boldsymbol{\Sigma}^0_\xi$, il existe une topologie polonaise σ' sur X, plus fine que σ, telle que B soit $\boldsymbol{\Sigma}^0_\xi$ dans $(X,\sigma')\times Y$.*

Lemme 1.2. *Soit (X,σ) un espace polonais; alors il existe une topologie polonaise de dimension 0 sur X plus fine que σ.*

Démonstration. Soit (U^0_n) une base de la topologie de $\sigma_0 := \sigma$. A l'aide du rappel 1.1(a), on trouve une topologie σ_1 rendant fermés les U^0_n. Soit (U^1_n) une base de σ_1. On construit comme ceci par récurrence une suite croissante (σ_n) de topologies polonaises sur X telle que si $(U^p_n)_{n\in\omega}$ est une base de σ_p, U^p_n est fermé de (X,σ_{p+1}). Posons $S_n := \{U^j_p : j\le n,\ p\in\omega\}$; alors $\sigma_n = \prec S_n \succ$, et $\bigcap_{n\in\omega} S_n = S_0$, donc $\sigma' := \prec \bigcup_{n\in\omega} S_n \succ$ répond au problème : (X,σ') est homéomorphe à la diagonale de $\prod_{n\in\omega}(X,\sigma_n)$, qui est fermée dans $\prod_{n\in\omega}(X,\sigma_n)$. ∎

Proposition 1.3. *Si X est un espace polonais et (B_n) une suite de boréliens de X, il existe une topologie polonaise de dimension* 0 *sur X, plus fine que la topologie initiale, rendant les B_n ouverts.*

Démonstration. On applique le rappel 1.1(a) et le lemme 1.2. ∎

Définition 1.4. Soient X et Y des espaces polonais, et A un borélien de $X \times Y$. Si Γ est une classe de Wadge de boréliens, on dira que A est *potentiellement dans* Γ (ce qu'on notera $A \in \mathrm{Pot}(\Gamma)$) s'il existe des topologies polonaises de dimension 0, σ (sur X) et τ (sur Y), plus fines que les topologies initiales, telles que A, considéré comme partie de $(X,\sigma) \times (Y,\tau)$, soit dans Γ.

Dans l'étude des relations d'équivalence boréliennes, par exemple dans [HKL], on étudie le pré-ordre qui suit. Si E (resp. E') est une relation d'équivalence borélienne sur l'espace polonais X (resp. X'), on pose

$$E \le E' \Leftrightarrow (\exists f : X \to X' \text{ borélienne telle que } xEy \Leftrightarrow f(x)E'f(y)).$$

La dernière relation peut s'écrire : $E = (f \times f)^{-1}(E')$; or si E' est dans Γ (ou même si E' est $\mathrm{Pot}(\Gamma)$) et $E = (f \times f)^{-1}(E')$, E est $\mathrm{Pot}(\Gamma)$: si (U_n) et (V_n) sont des bases des topologies associées à E', on peut rendre les $f^{-1}(U_n)$ et les $f^{-1}(V_n)$ ouverts, par la proposition 1.3, ce qui fournit une topologie σ; on a alors $E \in \Gamma\lceil(X,\sigma) \times (X,\sigma)$. Ceci motive l'introduction de la notion de classe de Wadge potentielle.

Remarque 1.5. (a) *Si A est un borélien à coupes verticales $\boldsymbol{\Sigma}^0_\xi$ d'un produit de deux espaces polonais, alors A est* $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}^0_\xi)$.

En effet, on applique le rappel 1.1(b) et le lemme 1.2.

Remarque 1.5. (b) [Lo4] *Si Γ est une classe de Wadge et B est $\Delta^1_1(\alpha)$ dans $\omega^\omega \times \omega^\omega$, alors B est $\mathrm{Pot}(\Gamma)$ si et seulement si B, considéré comme partie de $\omega^\omega \times \omega^\omega$ muni de la topologie Δ^2_α, est dans Γ.*

Rappelons enfin deux résultats sur les ensembles maigres.

Proposition 1.6 [Lo1]. *Si X est un espace polonais parfait non vide et A un sous-ensemble maigre de $X \times X$, on trouve une copie P de $\mathbf{2}^\omega$ dans X telle que si x et y sont distincts dans P, (x,y) n'est pas dans A.*

Corollaire 1.7. *Si X et Y sont des espaces polonais parfaits non vides et A un sous-ensemble maigre de $X \times Y$, on trouve une copie P (resp. Q) de $\mathbf{2}^\omega$ dans X (resp. Y) telles que $(P \times Q) \cap A = \emptyset$.*

Démonstration. On peut supposer que $X, Y = \omega^\omega$; en effet, si (U_n) est une base de la topologie de X, $X' := X \setminus \bigcup_{n\in\omega}(\overline{U}_n \setminus U_n)$ est G_δ dense de X, donc polonais parfait, et est de dimension 0. Soit (x_n) une suite dense de X'; alors $X'' := X' \setminus \{x_n : n \in \omega\}$ est G_δ dense de X', donc polonais de dimension 0, et est localement non compact, donc homéomorphe à ω^ω. De même avec Y.

On applique alors la proposition 1.6 à $X = Y = \omega^\omega$; ceci fournit une injection continue ψ de $\mathbf{2}^\omega$ dans ω^ω dont l'image est le P de la proposition 1.6; on peut alors poser $P := \psi''N_{(0)}$ et $Q := \psi''N_{(1)}$. ■

2. Ensembles potentiellement ouverts

Remarque 2.1. *Soit A un borélien d'un produit de deux espaces polonais. Si A a une de ses projections dénombrable, donc en particulier si A est dénombrable, A est* $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Delta}^0_1)$.

En effet, si par exemple $\Pi''_X A$ est dénombrable, on rend les coupes verticales de A ouvertes-fermées, par la proposition 1.3, de sorte que A est $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}^0_1) \cap \mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Pi}^0_1)$, par la remarque 1.5(a). Ceci fournit des topologies σ et σ' sur X, et τ et τ' sur Y, de bases respectives (U_n), (U'_n), (V_n), (V'_n).

On remarque ensuite que si (Z, μ) est polonais et μ' est polonaise sur Z et plus fine que μ, l'application identique, de (Z, μ') dans (Z, μ), est bijective continue; son inverse est donc borélienne, et par conséquent, les boréliens de (Z, μ) et (Z, μ') coïncident.

On applique alors la proposition 1.3 à X, (U_n) et (U'_n), qui sont des boréliens de X, d'une part, et à Y, (V_n) et (V'_n) d'autre part, pour avoir le résultat. ■

Ceci montre en particulier que la notion de classe de Wadge potentielle n'a d'intérêt que si les espaces polonais ambiants sont non dénombrables.

Proposition 2.2. *Soit A un borélien d'un produit de deux espaces polonais. Alors A est* $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)$ *si et seulement si A est réunion dénombrable de rectangles boréliens.*

Démonstration. Si A est $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)$, on utilise la remarque de la preuve précédente. Inversement, on applique la proposition 1.3. ■

Il résulte de ceci que tous les boréliens d'un produit ne peuvent être rendus ouverts en conservant une topologie produit de topologies polonaises; par exemple, la diagonale $\Delta(\mathbf{2}^\omega)$ de $\mathbf{2}^\omega \times \mathbf{2}^\omega$ n'est pas réunion dénombrable de rectangles, donc $\Delta(\mathbf{2}^\omega)$ n'est pas $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)$.

On donne maintenant une nouvelle preuve du premier théorème d'uniformisation partielle annoncé; assez curieusement, la discussion s'articule autour de la notion d'ensembles potentiellement ouverts. Ce théorème sera en outre appliqué au chapitre 3. Notons que ce théorème a déjà été démontré dans [P].

Théorème 2.3. *Soit A un borélien d'un produit de deux espaces polonais. Alors A contient un graphe de fonction injective continue définie sur une* *copie de $\mathbf{2}^\omega$ si et seulement si A n'est pas réunion dénombrable de rectangles boréliens dont l'un des côtés est un singleton.*

Démonstration. Si A contient un graphe comme dans l'énoncé, raisonnons par l'absurde : $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n \times B_n$, avec A_n ou B_n singleton; si $\mathrm{Gr}(f) \subseteq A$, $\mathrm{Gr}(f)$ s'écrit $\bigcup_{n\in\omega}[\mathrm{Gr}(f\lceil A_n)\cap(X\times B_n)]$; comme $\mathrm{Gr}(f)$ est non dénombrable, l'un des ensembles $\mathrm{Gr}(f\lceil A_n)\cap(X\times B_n)$ est non dénombrable, ce qui contredit l'injectivité de f.

Montrons la réciproque.

Premier cas : *A est* $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)$. D'après la proposition 2.2, on a $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n \times B_n$, avec A_n et B_n boréliens, donc on peut trouver n tel que A_n et B_n soient non dénombrables, donc boréliennement isomorphes, disons par φ. A_n contient une copie de $\mathbf{2}^\omega$, qui contient un G_δ dense G sur lequel φ est continue; G étant non dénombrable contient une copie de $\mathbf{2}^\omega$, d'où le résultat.

Second cas : *A n'est pas* $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)$. Posons

$$E := \{x \in X : A(x) \text{ est dénombrable}\}\,.$$

Si E est co-dénombrable, $(E\times Y)\cap A$ est borélien à coupes dénombrables, donc est réunion dénombrable de graphes boréliens (par le théorème de Lusin : cf. [Mo]). De plus, par la remarque 2.1, $(\check{E}\times Y)\cap A$ est $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Delta}^0_1)$, donc $(E\times Y)\cap A$ n'est pas $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)$, et l'un des graphes n'est pas $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)$ (qui est stable par réunion dénombrable par la proposition 2.2). Par suite, la fonction correspondante est à image non dénombrable, par la remarque 2.1. On va alors trouver un parfait du domaine de la fonction sur lequel elle est injective, et on conclut comme au premier cas.

Si E n'est pas co-dénombrable, comme il est co-analytique, $\check{E}$ contient une copie de $\mathbf{2}^\omega$; il suffit donc de voir que si $X = \mathbf{2}^\omega$ et A est à coupes verticales non dénombrables, A contient un graphe comme dans l'énoncé.

Posons donc

$$F := \{y \in Y : A(y) \text{ est maigre dans } \mathbf{2}^\omega\}.$$

Si F est co-dénombrable, $(\mathbf{2}^\omega\times F)\cap A$ est borélien à coupes non dénombrables (donc non vides), donc est uniformisable par une fonction Baire-mesurable définie sur $\mathbf{2}^\omega$ (par le théorème de von Neumann). Cette fonction f est continue sur un G_δ dense G de $\mathbf{2}^\omega$, et $f''G$ est non dénombrable : sinon, comme $G = \bigcup_{\beta\in f''G} G\cap f^{-1}(\{\beta\})$, l'un des $G\cap f^{-1}(\{\beta\})$ serait non maigre et contenu dans $A(\beta)$, ce qui contredirait le fait que β est dans F. On conclut alors comme avant.

Si F n'est pas co-dénombrable, comme il est borélien, $\check{F}$ contient une copie de $\mathbf{2}^\omega$; il suffit donc de voir que si $X = Y = \mathbf{2}^\omega$ et A est borélien à coupes non maigres, A contient un graphe comme dans l'énoncé.

Mais par le théorème de Kuratowski–Ulam, A est non maigre, donc on peut trouver s et t dans $2^{<\omega}$ telles que $(N_s \times N_t) \setminus A$ soit maigre. On trouve alors, par le corollaire 1.7, deux copies P et Q de $\mathbf{2}^\omega$ telles que $P \times Q \subseteq (N_s \times N_t) \cap A$, et si φ est un homéomorphisme de P sur Q, $\mathrm{Gr}(\varphi)$ répond à la question. ∎

3. Classe de Wadge potentielle d'un borélien. On cherche maintenant à diminuer au maximum la complexité d'un borélien donné d'un produit d'espaces polonais.

Proposition et Définition 3.1. *Soit A un borélien d'un produit d'espaces polonais. Il existe une unique classe de Wadge de boréliens, appelée classe de Wadge potentielle de A, et notée Γ_A, telle que :*

(i) $A \in \mathrm{Pot}(\Gamma_A)$,

(ii) *si Γ est une classe de Wadge strictement contenue dans Γ_A, alors* $A \notin \mathrm{Pot}(\Gamma)$.

D é m o n s t r a t i o n. Montrons l'existence d'une telle classe, en raisonnant par l'absurde : si Γ_0 est la classe de Wadge $\langle A\rangle$ engendrée par A, A est $\mathrm{Pot}(\Gamma_0)$ et on trouve $\Gamma_1 \boldsymbol{\psi} \Gamma_0$ telle que A soit $\mathrm{Pot}(\Gamma_1)$. Par récurrence, on construit comme ceci $\Gamma_{n+1} \boldsymbol{\psi} \Gamma_n$ telles que A soit $\mathrm{Pot}(\Gamma_{n+1})$. Mais ceci contredit la bonne fondation de l'ordre de Wadge.

Montrons l'unicité d'une telle classe : si Γ_1 et Γ_2 vérifient (i), (ii) et $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$, $\Gamma_1 \not\subseteq \Gamma_2$ (sinon $\Gamma_1 \boldsymbol{\psi} \Gamma_2$ et A n'est pas $\mathrm{Pot}(\Gamma_1)$), donc $\check{\Gamma}_2 \subseteq \Gamma_1$, et de même $\check{\Gamma}_1 \subseteq \Gamma_2$, donc $\Gamma_1 = \check{\Gamma}_2$ est non auto-duale.

L'ensemble A est dans $\mathrm{Pot}(\Gamma_1) \cap \mathrm{Pot}(\Gamma_2)$, donc comme dans la preuve de la remarque 2.1, on trouve des topologies σ et τ telles que A soit dans $(\Gamma_1 \cap \Gamma_2)\lceil(X,\sigma) \times (Y,\tau)$. Mais la classe de Wadge Γ engendrée par A, considéré comme partie de $(X,\sigma)\times(Y,\tau)$, vérifie $A \in \mathrm{Pot}(\Gamma)$ et $\Gamma \subseteq \Gamma_1 \cap \check{\Gamma}_1$ $\boldsymbol{\psi}$ Γ_1, une contradiction. ∎

Toute classe de Wadge potentielle est donc une classe de Wadge; on peut se demander s'il y a une réciproque. L'exemple de la diagonale de $\mathbf{2}^\omega$ montre que c'est vrai pour la classe des fermés, et on va voir que c'est vrai en général. On peut même préciser ce résultat, en trouvant un $\mathrm{Pot}(\Gamma)$ "maximal"; mais pour ce faire on introduit une classe de fonctions qui est le candidat naturel pour le problème de la réduction évoqué dans l'introduction, comme le montre le lemme suivant.

Soit donc C_0 la classe des fonctions telles que l'image réciproque d'un $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)$ soit aussi $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)$.

Lemme 3.2. *Soient X, Y, X', Y' des espaces polonais, A (resp. B) un borélien de $X \times Y$ (resp. $X' \times Y'$); si f, de $X' \times Y'$ dans $X \times Y$, est dans C_0 et réduit B à A, alors Γ_B est contenue dans Γ_A.*

Démonstration. $A \in \mathrm{Pot}(\Gamma_A)$, ce qui fournit σ et τ telles que A est dans $\Gamma_A\lceil(X,\sigma)\times(Y,\tau)$. Soient (U_n) et (V_n) des bases de σ et τ. Comme f est dans C_0, par la proposition 2.2 on trouve des boréliens $U^{n,p}_m$ et $V^{n,p}_m$ tels que $f^{-1}(U_n\times V_p)=\bigcup_{m\in\omega}U^{n,p}_m\times V^{n,p}_m$. Par la proposition 1.3, on obtient des topologies σ' et τ' rendant les $U^{n,p}_m$ et les $V^{n,p}_m$ ouverts, de sorte que f, de $(X',\sigma')\times(Y',\tau')$ dans $(X,\sigma)\times(Y,\tau)$, est continue. Donc B est dans $\Gamma_A\lceil(X',\sigma')\times(Y',\tau')$ et $B\in\mathrm{Pot}(\Gamma_A)$, d'où le résultat : sinon $\Gamma_A\subseteq\check{\Gamma}_B$, et $B\in\mathrm{Pot}(\Gamma_B)\cap\mathrm{Pot}(\check{\Gamma}_B)$; donc comme dans la preuve de la proposition 3.1, et par abus de langage, $B\in\mathrm{Pot}(\Gamma_B\cap\check{\Gamma}_B)$ et $\Gamma_B=\check{\Gamma}_B$; d'où $\Gamma_A\not\subseteq\Gamma_B$, ce qui contredit $B\in\mathrm{Pot}(\Gamma_A)$. ∎

THÉORÈME 3.3. *Si Γ est une classe de Wadge de boréliens il existe B dans $\Gamma\lceil\omega^\omega\times\omega^\omega$ tel que :*

(i) $\Gamma_B=\Gamma$,

(ii) *A est $\mathrm{Pot}(\Gamma)$ si et seulement s'il existe f dans C_0 injective telle que $A=f^{-1}(B)$.*

Démonstration. Premier cas : *Γ est non auto-duale.* Soit U un universel pour $\Gamma\lceil\omega^\omega$, $U\subseteq\omega^\omega\times\omega^\omega$. Posons $(\alpha)_i(n):=\alpha(2n+i)$, où $i=0,1$,

$$\langle\gamma,\beta\rangle(n):=\begin{cases}\gamma(k) & \text{si } n=2k,\\ \beta(k) & \text{si } n=2k+1,\end{cases}$$

et $B(\alpha,\beta)\Leftrightarrow U((\alpha)_0,\langle(\alpha)_1,\beta\rangle)$.

Alors B est aussi universel pour $\Gamma\lceil\omega^\omega$: $(\cdot)_1$ est continue, donc si C est dans $\Gamma\lceil\omega^\omega$, $(\cdot)_1^{-1}(C)$ aussi, et il existe α dans ω^ω tel que $(\cdot)_1^{-1}(C)=U_\alpha$; $\langle\alpha,0^\omega\rangle$ est donc un code pour C.

B est dans Γ, donc comme à la fin de la preuve du lemme précédent, $\Gamma_B\subseteq\Gamma$. Raisonnons par l'absurde pour montrer (i) : $\Gamma_B\not\subseteq\Gamma$, donc $\Gamma_B\subseteq\check{\Gamma}$; B est $\mathrm{Pot}(\Gamma_B)$, ce qui fournit des topologies σ et τ telles que $B\in\Gamma_B\lceil(\omega^\omega,\sigma)\times(\omega^\omega,\tau)$, et on a $B\in\check{\Gamma}\lceil(\omega^\omega,\sigma)\times(\omega^\omega,\tau)$.

L'application identique, de (ω^ω,σ) dans ω^ω, est bijective continue, donc d'inverse borélienne; son inverse est donc continue sur un G_δ dense G de ω^ω; sur G, σ et la topologie usuelle coïncident. G étant non dénombrable contient une copie L de $\mathbf{2}^\omega$, et comme $\Gamma\neq\check{\Gamma}$, on peut trouver D dans $(\Gamma\setminus\check{\Gamma})\lceil L$; $D=E\cap L$, où $E\in\Gamma\lceil\omega^\omega$. B étant universel, soit α dans ω^ω tel que $B_\alpha=E$. Tout comme B_α, E est dans $\check{\Gamma}\lceil(\omega^\omega,\sigma)$, donc $E\cap G$ est dans $\check{\Gamma}\lceil G$ car sur G, les topologies sont identiques. Donc D est dans $\check{\Gamma}\lceil L$, une contradiction qui montre que $\Gamma=\Gamma_B$.

Pour (ii), si $A=f^{-1}(B)$, A est $\mathrm{Pot}(\Gamma)$ à cause du lemme précédent. Inversement, si A est $\mathrm{Pot}(\Gamma)$, on trouve σ' et τ' telles que A soit dans $\Gamma\lceil(X,\sigma')\times(Y,\tau')$. On trouve des fermés F et H de ω^ω, et des homéomorphismes : φ, de (X,σ') sur F, et ψ, de (Y,τ') sur H. $(\varphi\times\psi)''A\in\Gamma\lceil(F\times H)$, donc est la trace sur $F\times H$ de $R\in\Gamma\lceil\omega^\omega\times\omega^\omega$. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un homéomorphisme, donc il existe α dans ω^ω tel que $\langle\cdot,\cdot\rangle''R = U_\alpha$, ce qui s'écrit

$$R(\gamma,\beta) \Leftrightarrow U(\alpha,\langle\gamma,\beta\rangle) \Leftrightarrow B(\langle\alpha,\gamma\rangle,\beta)\,.$$

La fonction $f := g \circ (\varphi \times \psi) \circ \mathrm{Id}$ répond à la question, si on pose

$$g : F \times H \to \omega^\omega \times \omega^\omega\,, \qquad (\gamma,\beta) \mapsto (\langle\alpha,\gamma\rangle,\beta)\,,$$

puisque par la proposition 2.2, les fonctions de la forme $u \times v$, avec u et v boréliennes, sont dans C_0.

S e c o n d c a s : *Γ est auto-duale.* On sait qu'alors: ou bien il existe une suite strictement croissante (Γ_n), cofinale dans Γ, de classes de Wadge non auto-duales telle que

$$\Gamma = \Big\{ \bigcup_{n\in\omega} A_n \cap U_n : (U_n)\ \boldsymbol{\Delta}^0_1\text{-partition},\ A_n \in \Gamma_n \Big\}\,,$$

ou bien Γ est le successeur d'une classe non auto-duale Γ' telle que

$$\Gamma = \{(A \cap N) \cup (B \setminus N) : N \in \boldsymbol{\Delta}^0_1,\ A \in \Gamma',\ B \in \check{\Gamma}'\}\,.$$

Dans la première éventualité, comme Γ_n est non auto-duale, on trouve A_n dans $\Gamma_n\lceil\omega^\omega \times \omega^\omega$ tel que $\Gamma_{A_n} = \Gamma_n$ et si B_n est dans $\Gamma_n\lceil\omega^\omega \times \omega^\omega$, il existe α_n dans ω^ω tel que $B_n(\gamma,\beta) \Leftrightarrow A_n(\langle\alpha_n,\gamma\rangle,\beta)$ (ceci par le premier cas).

Soit

$$\psi_n : \omega^\omega \to N_{(n)}\,, \qquad \alpha \mapsto n^\frown\alpha\,,$$

et $B := \bigcup_{n\in\omega}(\psi_n \times \mathrm{Id})''A_n$. La fonction ψ_n étant un homéomorphisme, $(\psi_n \times \mathrm{Id})''A_n \in \Gamma_n\lceil N_{(n)} \times \omega^\omega \subseteq \Gamma\lceil N_{(n)} \times \omega^\omega$ et $B \in \boldsymbol{\Delta}^0_1\text{-PU}(\Gamma) = \Gamma$, donc $\Gamma_B \subseteq \Gamma$.

Si l'inclusion est stricte, il existe n tel que $\Gamma_B \not\subseteq \Gamma_n = \Gamma_{A_n}$; or on a $A_n = (\psi_n \times \mathrm{Id})^{-1}(B)$, et $\Gamma_{A_n} \subseteq \Gamma_B$ par le lemme précédent, d'où contradiction. Donc $\Gamma_B = \Gamma$.

Si A est $\mathrm{Pot}(\Gamma)$, on trouve σ', τ', F, H, φ, ψ, R comme au premier cas. On sait qu'on peut trouver une $\boldsymbol{\Delta}^0_1$-partition (U_n) de $\omega^\omega \times \omega^\omega$ et B_n dans $\Gamma_n\lceil\omega^\omega \times \omega^\omega$ tels que l'on ait l'égalité $R = \bigcup_{n\in\omega} U_n \cap B_n$. La fonction $f := h \circ (\varphi \times \psi) \circ \mathrm{Id}$ convient, si on pose

$$h : F \times H \to \omega^\omega \times \omega^\omega\,, \qquad (\gamma,\beta) \mapsto (\psi_n(\langle\alpha_n,\gamma\rangle),\beta) \quad \text{si } (\gamma,\beta) \in U_n\,,$$

puisque si C et D sont des boréliens de ω^ω, on a

$$h^{-1}(C \times D) = \bigcup_{n\in\omega} U_n \cap (\{\alpha \in \omega^\omega : \psi_n(\langle\alpha_n,\alpha\rangle) \in C\} \times D) \in \mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)\,.$$

Dans la seconde éventualité, on trouve A_0 dans $\Gamma'\lceil\omega^\omega \times \omega^\omega$, et A_1 dans $\check{\Gamma}'\lceil\omega^\omega \times \omega^\omega$ tels que $\Gamma_{A_0} = \Gamma'$, $\Gamma_{A_1} = \check{\Gamma}'$; et si C (resp. D) est dans Γ' (resp. Γ) $\lceil\omega^\omega \times \omega^\omega$, on trouve α_0 (resp. α_1) dans ω^ω tels que

$$C(\gamma,\beta) \Leftrightarrow A_0(\langle\alpha_0,\gamma\rangle,\beta), \qquad D(\gamma,\beta) \Leftrightarrow A_1(\langle\alpha_1,\gamma\rangle,\beta)\,.$$

Si φ_0 est un homéomorphisme de ω^ω sur $\omega^\omega \setminus N_{(0)}$, et si

$$B := (\varphi_0 \times \mathrm{Id})'' A_1 \cup (\psi_0 \times \mathrm{Id})'' A_0 \,,$$

B est dans $\Gamma\lceil \omega^\omega \times \omega^\omega$, donc $\Gamma_B \subseteq \Gamma$.

Comme Γ est le successeur de Γ', si l'inclusion est stricte, on a $\Gamma_B \subseteq \Gamma'$ ou $\Gamma_B \subseteq \check{\Gamma}'$. Soit par exemple $\Gamma_B \subseteq \Gamma'$; $A_1 \in \mathrm{Pot}(\check{\Gamma}') = \mathrm{Pot}(\Gamma_{A_1})$, et comme Γ' est non auto-duale, A_1 n'est pas $\mathrm{Pot}(\Gamma')$ car $\Gamma_{A_1} = \check{\Gamma}'$. Donc A_1 n'est pas $\mathrm{Pot}(\Gamma_B)$; or $A_1 = (\varphi_0 \times \mathrm{Id})^{-1}(B)$, donc $\Gamma_{A_1} \subseteq \Gamma_B$, une contradiction. La dernière partie est analogue à celle de la première éventualité. ■

On cherche maintenant à adapter les résultats sur les classes de Wadge. Si C (resp. D) est borélien de X (resp. Y), on a

$$\langle C\rangle \subseteq \langle D\rangle \Leftrightarrow \text{ il existe } f \text{ continue, de } X \text{ dans } Y, \text{ telle que } C = f^{-1}(D).$$

Une question analogue se pose pour les classes de Wadge potentielles : peut-on trouver une classe de fonctions $\mathcal{C}$ telle que si B est borélien de $Z \times T$, on ait

$$\Gamma_A \subseteq \Gamma_B \Leftrightarrow \exists f : X \times Y \to Z \times T \text{ dans } \mathcal{C} \text{ telle que } A = f^{-1}(B)\,.$$

Comme on va le voir, la réponse est négative; la classe qui semblait le candidat "raisonnable", C_0 à cause du lemme précédent, ne fonctionne pas, et à un petit niveau (avec $A \in \boldsymbol{\Pi}^0_1$ et $B \in \check{D}_2(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)$).

On notera $\leq_P$ le pré-ordre associé à C_0 :

$$A \leq_P B \Leftrightarrow \text{il existe } f \text{ dans } C_0 \text{ telle que } A = f^{-1}(B).$$

L'inégalité $A \leq_P B$ entraîne donc l'inclusion $\Gamma_A \subseteq \Gamma_B$, par le lemme 3.2. On montre maintenant un lemme bien plus fort que nécessaire pour introduire le contre-exemple évoqué ci-dessus, mais qui permettra de mieux comprendre ce qu'on cherche à faire dans les paragraphes suivants.

Définition 3.4. Si X est un espace polonais, on dira que G, G_δ de X, est *presque-ouvert* si G est contenu dans l'intérieur de son adhérence.

Lemme 3.5. *Soient* (C_n) (*resp.* (D_n)) *des suites de presque-ouverts non vides de* X (*resp.* Y), $f_n : C_n \to D_n$ *continues et ouvertes*, B *la réunion* $\bigcup_{n\in\omega\setminus\{0\}} \mathrm{Gr}(f_n)$, *et* A *un borélien de* $X \times Y$ *contenant* B; *si* $\overline{B} \setminus A$ *contient* $\mathrm{Gr}(f_0)$, *alors* A *n'est pas* $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Pi}^0_1)$.

Démonstration. Sinon, soit F (resp. G) un G_δ dense de X (resp. Y) sur lequel les topologies (initiales et fournies par le fait que A soit $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Pi}^0_1)$) coïncident (on montre leur existence comme dans la preuve du théorème 3.3); on a $A \cap (F \times G) \in \boldsymbol{\Pi}^0_1\lceil F \times G$.

Montrons que $\mathrm{Gr}(f_n) \subseteq \overline{\mathrm{Gr}(f_n) \cap (F \times G)}$. Soit U (resp. V) un ouvert de X (resp. Y) tels que $(U \times V) \cap \mathrm{Gr}(f_n) \neq \emptyset$. Alors $D_n \cap V \cap G$ est un G_δ dense de $D_n \cap V$, donc $f_n^{-1}(V \cap G)$ est un G_δ dense de $f_n^{-1}(V)$. Donc $F \cap f_n^{-1}(V)$, puis $F \cap f_n^{-1}(V \cap G)$, sont des G_δ denses de $f_n^{-1}(V)$;

ce dernier rencontre donc $U \cap f_n^{-1}(V)$ en au moins $\{x\}$; alors $(x, f_n(x))$ est dans $(U \times V) \cap (F \times G) \cap \mathrm{Gr}(f_n) \neq \emptyset$.

$\mathrm{Gr}(f_0)$ est non vide, donc par ce qui précède on trouve (x, y) dans $(F \times G) \cap \mathrm{Gr}(f_0)$, et on a $(x, y) \in \overline{(F \times G) \cap \overline{B}} \setminus A$; il suffit donc de voir que $(F \times G) \cap \overline{B} \subseteq (F \times G) \cap \overline{B \cap (F \times G)}$. On applique alors le fait que $\mathrm{Gr}(f_n) \subseteq \overline{\mathrm{Gr}(f_n) \cap (F \times G)}$ pour avoir la contradiction cherchée. ∎

EXEMPLE 3.6. *Soit* $D_0 := \{(\alpha, \beta) \in \mathbf{2}^\omega \times \mathbf{2}^\omega : \exists! p \in \omega,\ \alpha(p) \neq \beta(p)\}$. *Alors* D_0 *n'est pas* $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Pi}_1^0)$.

En effet, on applique le lemme précédent à $X = Y = C_n = D_n = \mathbf{2}^\omega$, $f_0(\alpha) = \alpha$, $f_n(\alpha)(p) = \alpha(p) \Leftrightarrow p \neq n - 1$ si $n > 0$, et $A = B$.

THÉORÈME 3.7. *Il n'existe pas de classe de fonctions $\mathcal{C}$ telle que l'inclusion de Γ_A dans Γ_B soit équivalente à l'existence de f dans $\mathcal{C}$ telle que $A = f^{-1}(B)$.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde; si B est $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}_1^0)$ et f dans $\mathcal{C}$, comme $\Gamma_B \subseteq \boldsymbol{\Sigma}_1^0$, $\Gamma_{f^{-1}(B)} \subseteq \boldsymbol{\Sigma}_1^0$, donc $f^{-1}(B)$ est $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}_1^0)$. Donc si $\mathcal{C}$ existe, $\mathcal{C}$ est une sous-classe de C_0.

Comme on l'a vu avant le lemme 3.2, $\Gamma_{\Delta(\mathbf{2}^\omega)} = \boldsymbol{\Pi}_1^0$, et par 3.6, $\check{D}_0$ n'est pas $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}_1^0)$, donc $\boldsymbol{\Pi}_1^0 \subseteq \Gamma_{\check{D}_0}$ et $\Gamma_{\Delta(\mathbf{2}^\omega)} \subseteq \Gamma_{\check{D}_0}$. Il suffit donc de voir que $\Delta(\mathbf{2}^\omega) \not\leq_P \check{D}_0$ pour avoir la contradiction cherchée.

Raisonnons par l'absurde : il existe f dans C_0 telle que $\Delta(\mathbf{2}^\omega) = f^{-1}(\check{D}_0)$. Alors $f''(\Delta(\mathbf{2}^\omega))$ est non dénombrable, sinon par la remarque 2.1, $f''(\Delta(\mathbf{2}^\omega))$ serait $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}_1^0)$, et par suite $\Delta(\mathbf{2}^\omega) = f^{-1}(f''(\Delta(\mathbf{2}^\omega)))$ aussi, ce qui est exclus.

On peut donc trouver une copie P de $\mathbf{2}^\omega$ dans $\Delta(\mathbf{2}^\omega)$ sur laquelle f est injective; $f''P$ est donc un borélien non dénombrable, et ses coupes sont dénombrables : si par exemple une de ses coupes verticales C est non dénombrable, soit $(f''P)(\alpha_0)$, $\{\alpha_0\} \times C$ est un rectangle borélien, donc est $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}_1^0)$; $f^{-1}(\{\alpha_0\} \times C)$ est alors aussi $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}_1^0)$, non dénombrable car $\{\alpha_0\} \times C \subseteq f''(\mathbf{2}^\omega \times \mathbf{2}^\omega)$, et contenu dans $\Delta(\mathbf{2}^\omega)$, ce qui est contradictoire.

$f''P$ n'est donc pas réunion dénombrable de rectangles boréliens dont l'un des côtés soit un singleton, sinon les côtés seraient dénombrables comme les coupes, et P aussi. Par le théorème 2.3, il existe un homéomorphisme ψ de $\mathbf{2}^\omega$ sur un compact L, et une injection continue g définie sur L, dont le graphe est contenu dans $f''P$.

Alors si $B := D_0 \cap (L \times g''L)$, B est borélien à coupes dénombrables de $L \times g''L$, donc est maigre relativement à $L \times g''L$. Donc, si l'on pose $E := (\psi \times (g \circ \psi))^{-1}(B)$, E est maigre relativement à $\mathbf{2}^\omega \times \mathbf{2}^\omega$, et par la proposition 1.6, il existe M homéomorphe à $\mathbf{2}^\omega$ tel que si α et β sont distincts dans M, alors (α, β) n'est pas dans E.

Soit $R := \psi''M \times (g \circ \psi)''M$; alors $R \subseteq \check{D}_0$, sinon soit (α, β) dans $R \cap D_0$; on a alors $\alpha = \psi(\theta)$ et $\beta = g(\psi(\varepsilon))$, où θ, ε sont dans M, et $\theta \neq \varepsilon$, sinon $(\alpha, \beta) \in \mathrm{Gr}(g) \subseteq f''P \subseteq \check{D}_0$. Donc $(\theta, \varepsilon) \notin E$ et $(\alpha, \beta) \notin B$, une contradiction.

De plus, $\mathrm{Gr}(g\lceil \psi''M) \subseteq R \cap f''P$, donc $R \cap f''P$ est non dénombrable, et $f^{-1}(R)$ est $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)$ comme R, est contenu dans $\Delta(\mathbf{2}^\omega)$, et est non dénombrable, ce qui est exclus. ■

4. Résultats de type "Hurewicz". Dans [Lo-SR], il est démontré le résultat suivant :

Théorème 4.1. *Si ξ est un ordinal dénombrable non nul, il existe un compact de dimension* 0, P_ξ, *et un vrai $\boldsymbol{\Sigma}^0_\xi$ de P_ξ, A_ξ, tels que si A est un borélien de l'espace polonais X, on ait : A n'est pas $\boldsymbol{\Pi}^0_\xi$ de X si et seulement s'il existe une injection continue f de P_ξ dans X telle que $A_\xi = f^{-1}(A)$.*

En fait $P_\xi = \mathbf{2}^\omega$, sauf si $\xi = 1$, auquel cas P_1 est constitué d'une suite convergente infinie et de sa limite. Ceci implique, avec $B = f''P_\xi$, que A n'est pas $\boldsymbol{\Pi}^0_\xi$ si et seulement s'il existe un fermé B de X tel que $A \cap B$ soit un vrai $\boldsymbol{\Sigma}^0_\xi$ de B. L'ensemble A_ξ est dit "test d'Hurewicz".

Dans la suite, on cherchera à établir un analogue à ces résultats dans le cas où $\xi = 1$. On y parviendra partiellement; dans cet esprit, voici la

Définition 4.2. Si Γ est une classe, on dira que $P_1(\Gamma)$ est vérifiée si, pour tout A dans Γ, A n'est pas $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Pi}^0_1)$ si et seulement s'il existe un $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Pi}^0_1)$, B, et un $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)$, C, tels que $B \cap C = B \cap A$ ne soit pas $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Pi}^0_1)$.

En apparence, cette propriété n'explique pas ce que signifie "A n'est pas $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Pi}^0_1)$". Mais elle ramène le problème au cas où A est $\mathrm{Pot}(D_2(\boldsymbol{\Sigma}^0_1))$, et on va voir que sous l'hypothèse "A est $\mathrm{Pot}(F_\sigma)$", on sait caractériser quand A n'est pas $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Pi}^0_1)$. Mais il nous faut la

Définition 4.3. Si X et Y sont des espaces topologiques, une partie A de $X \times Y$ sera dite *localement à projections ouvertes* (ou l.p.o.) si pour tout ouvert U de $X \times Y$, les projections de $A \cap U$ sont ouvertes.

Lemme 4.4. *Soient X et Y des espaces polonais, F et G des G_δ denses de X et Y, et A un G_δ l.p.o. non vide de $X \times Y$; alors $A \cap (F \times G)$ est non vide.*

Démonstration. Soient (U_n) et (V_n) des suites d'ouverts denses, de X et Y, telles que $F = \bigcap_{n\in\omega} U_n$, $G = \bigcap_{n\in\omega} V_n$, et (F_n) une suite de fermés de $X \times Y$ telle que $A = \bigcap_{n\in\omega} \check{F}_n$. On construit par récurrence sur n des suites d'ouverts non vides (O_n) et (T_n) de X et Y vérifiant :

(i) $\delta(O_n), \delta(T_n) < 2^{-n}$,

(ii) $O_n \times T_n \subseteq (U_n \times V_n) \setminus F_n$,
(iii) $A \cap (O_n \times T_n) \neq \emptyset$,
(iv) $\overline{O}_{n+1} \subseteq O_n$, $\overline{T}_{n+1} \subseteq T_n$.

Admettons avoir construit ces objets; $(\overline{O}_n)$ et $(\overline{T}_n)$ sont des suites décroissantes de fermés non vides dont les diamètres tendent vers 0, donc leurs intersections sont $\{x\}$ et $\{y\}$; mais $(x, y) \in O_n \times T_n \subseteq \check{F}_n \cap (U_n \times V_n)$, donc $(x, y) \in A \cap (F \times G) \neq \emptyset$.

Admettons avoir construit $(O_p)_{p<n}$ et $(T_p)_{p<n}$ vérifiant les conditions demandées; alors par (iii), $\Pi''_X(A \cap (O_{n-1} \times T_{n-1}))$ est un ouvert non vide de X, donc rencontre U_n : l'ensemble $A \cap [(O_{n-1} \cap U_n) \times T_{n-1}]$ est non vide, donc sa projection sur Y est un ouvert non vide de Y, donc rencontre V_n. L'ensemble $A \cap [(O_{n-1} \cap U_n) \times (T_{n_1} \cap V_n)]$ est non vide, donc contient (x_n, y_n); il reste à choisir deux ouverts O_n et T_n de diamètre au plus 2^{-n} vérifiant la double inclusion suivante :

$$(x_n, y_n) \in O_n \times T_n \subseteq \overline{O_n \times T_n} \subseteq [(O_{n-1} \cap U_n) \times (T_{n-1} \cap V_n)] \setminus F_n \, . \ \blacksquare$$

On remarquera que ce résultat est faux si on ne suppose pas que A est un G_δ. Désignons par P_∞ l'ensemble des suites de 0 et de 1 comportant une infinité de termes égaux à 1. Si maintenant A désigne $(\mathbf{2}^\omega \times \mathbf{2}^\omega) \setminus (P_\infty \times P_\infty)$, A est un K_σ qui vérifie les autres conditions du lemme et ne rencontre pas $P_\infty \times P_\infty$!

THÉORÈME 4.5. (a) *Soit A un* $\mathrm{Pot}(F_\sigma)$ *d'un produit d'espaces polonais $X \times Y$; alors A n'est pas* $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Pi}^0_1)$ *si et seulement s'il existe des espaces polonais de dimension* 0, *Z et T, une suite de fermés de $Z \times T$, (F_n), et des fonctions injectives continues, f, de Z dans X, et g, de T dans Y, tels que si $C := \bigcup_{n\in\omega} F_n$, on ait :*

(i) $\overline{C} \setminus C \neq \emptyset$,
(ii) $C = (f \times g)^{-1}(A)$,
(iii) $\overline{C} \setminus C$ *et* F_n *sont l.p.o.*

(b) *Soit A un* $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Delta}^0_2)$ *d'un produit d'espaces polonais $X \times Y$; alors A n'est pas* $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Pi}^0_1)$ *si et seulement s'il existe des espaces polonais de dimension* 0, *Z et T, un $\boldsymbol{\Delta}^0_2$ de $Z \times T$, C, et des fonctions injectives continues, f, de Z dans X, et g, de T dans Y, tels que :*

(i) $\overline{C} \setminus C \neq \emptyset$,
(ii) $C = (f \times g)^{-1}(A)$,
(iii) $\overline{C} \setminus C$ *et* C *sont l.p.o.*

Démonstration. (a) Raisonnons par l'absurde : si A est $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Pi}^0_1)$, C aussi et on trouve des G_δ denses F et G de Z et T tels que $C \cap (F \times G)$ soit dans $\boldsymbol{\Pi}^0_1 \lceil F \times G$.

On applique le lemme précédent à Z, T, F, G, et $\overline{C} \setminus C$, et on a $[(F \times G) \cap \overline{C}] \setminus C \neq \emptyset$. Il suffit alors de voir que ce dernier ensemble est égal à $[(F \times G) \cap \overline{C \cap (F \times G)}] \setminus C$ pour avoir la contradiction cherchée; et il suffit de voir que $F_n \subseteq \overline{F_n \cap (F \times G)}$.

Si U et V sont des ouverts de Z et T tels que $F_n \cap (U \times V)$ soit non vide, on applique le lemme précédent à U, V, $F \cap U, G \cap V$, et $F_n \cap (U \times V)$ pour voir que $F_n \cap [(F \cap U) \times (G \cap V)]$ est lui aussi non vide.

Inversement, on peut supposer que X et Y sont des fermés de ω^ω, et pour simplifier l'écriture qu'ils sont $\varDelta^1_1$, ainsi que la suite (G_n) de fermés pour $\varDelta^2$ dont A est la réunion (on applique la remarque 1.5(b)).

Comme $\varDelta \subseteq \varSigma$, et par une double application du théorème de séparation, on voit que $\overline{A}^{\varSigma^2} = \overline{A}^{\varDelta^2}$; par suite, puisque $\varDelta$ est polonaise, $\overline{A}^{\varSigma^2} \setminus A$ est un $\varSigma^1_1$ non vide, ainsi que $(\overline{A}^{\varSigma^2} \setminus A) \cap \varOmega_{\omega^\omega \times \omega^\omega}$; et puisque $\varOmega_{\omega^\omega \times \omega^\omega} \subseteq \varOmega^2_{\omega^\omega}$, $(\overline{A}^{\varSigma^2} \setminus A) \cap \varOmega^2_{\omega^\omega}$ est lui aussi non vide; posons $Z := (X \cap \varOmega_{\omega^\omega}, \varSigma\lceil X \cap \varOmega_{\omega^\omega})$, $T := (Y \cap \varOmega_{\omega^\omega}, \varSigma\lceil Y \cap \varOmega_{\omega^\omega})$, $F_n := G_n \cap (Z \times T)$, et prenons pour f et g les applications identiques.

Alors $(\overline{A}^{\varSigma^2} \setminus A) \cap \varOmega^2_{\omega^\omega} = \overline{A \cap (Z \times T)}^{\varSigma^2} \cap (Z \times T) \setminus (A \cap (Z \times T))$, donc ces objets conviennent : $\overline{C} \setminus C$ et F_n sont $\varSigma^1_1$ et un ouvert de $Z \times T$ est réunion de rectangles $\varSigma^1_1$ (les projections des traces de ces rectangles seront donc $\varSigma^1_1$).

(b) Si A n'est pas $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\varPi}^0_1)$, on raisonne comme dans (a), à ceci près qu'on pose $C := A \cap (Z \times T)$.

La réciproque est analogue à celle de (a), à ceci près que pour montrer l'égalité entre $[(F \times G) \cap \overline{C}] \setminus C$ et $[(F \times G) \cap \overline{C \cap (F \times G)}] \setminus C$, il suffit de voir que $C \subseteq \overline{C \cap (F \times G)}$; si U et V sont des ouverts de Z et T tels que $C \cap (U \times V)$ soit non vide, on applique le lemme 4.4 à U, V, $F \cap U$, $G \cap V$, et $C \cap (U \times V)$. ■

On introduit maintenant une propriété, qui est du type Hurewicz au sens de l'introduction; à ceci près que pour comparer la complexité, on n'a pas de réduction sur tout l'espace de départ, mais seulement sur un fermé.

Définition 4.6. Si $\varGamma$ est une classe, on dira que $P_2(\varGamma)$ est vérifiée si pour tout A dans $\varGamma\lceil X \times Y$, A n'est pas $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\varPi}^0_1)$ si et seulement s'il existe des espaces polonais de dimension 0, Z et T, une $D_2(\varSigma^0_1)$ de $Z \times T$, D, et des fonctions injectives continues, f, de Z dans X, et g, de T dans Y, tels que :

(i) $\overline{D} \setminus D \neq \emptyset$,
(ii) $\overline{D} \cap (f \times g)^{-1}(A) = D$,
(iii) D et $\overline{D} \setminus D$ sont l.p.o.

Proposition 4.7. *$P_1(\varGamma)$ équivaut à $P_2(\varGamma)$.*

D é m o n s t r a t i o n. Supposons $P_1(\Gamma)$; si $A \in \Gamma \setminus \mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Pi}^0_1)$, soient B et C fournis par $P_1(\Gamma)$, σ et τ rendant B fermé. Alors comme dans la preuve du théorème 4.5(b) on trouve Z, T, et D comme indiqué et des injections continues F, de Z dans (X, σ), et G, de T dans (Y, τ), tels que l'on ait l'égalité $D = (F \times G)^{-1}(A) \cap (F \times G)^{-1}(B)$ (ceci parce que $B \cap C$ est $\mathrm{Pot}(D_2(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)))$. D'où $\overline{D} \cap (F \times G)^{-1}(A) = D$, et il ne reste qu'à revenir aux topologies initiales pour obtenir f et g.

Inversement, si $A \in \mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Pi}^0_1)$, D aussi, ce qui est exclus, comme dans la preuve du théorème 4.5(b).

Supposons maintenant $P_2(\Gamma)$; $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Pi}^0_1)$ étant stable par intersection finie, A n'est pas $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Pi}^0_1)$ si B et C existent.

Inversement, si A n'est pas $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Pi}^0_1)$, soient Z, T, D, f, et g fournis par $P_2(\Gamma)$; $D = U \cap \overline{D}$, où U est ouvert de $Z \times T$, donc $B := (f \times g)''\overline{D}$ et $C := (f \times g)''U$ répondent au problème, par injectivité de f et g : on a $B \cap A = (f \times g)''D = C \cap B$. ■

Cette proposition permet de comprendre pourquoi, indirectement, la propriété P_1 permet de mieux connaître les boréliens non potentiellement fermés. On établit maintenant cette propriété pour certaines familles de boréliens.

PROPOSITION 4.8. *La propriété P_1 est vérifiée par chacune des classes suivantes* :

(i) *les ensembles potentiellement $\boldsymbol{\Delta}^0_2$*,
(ii) *les boréliens à coupes verticales co-dénombrables*,
(iii) *les relations d'équivalence boréliennes.*

Avant de démontrer cette proposition, on donne la définition suivante :

DÉFINITION 4.9. Si Γ est une classe, on dira que $P_3(\Gamma)$ est vérifiée si pour tout A dans Γ, A n'est pas $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)$ si et seulement s'il existe B dans $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Pi}^0_1)$ tel que $A \cap B$ soit $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Pi}^0_1)$, et tel que pour tout C dans $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)$, $A \cap B \neq C \cap B$.

Il est clair, en raison des formules $B \setminus A = B \setminus (A \cap B)$ et $B \cap A = B \setminus (B \setminus A)$ que $P_1(\Gamma)$ équivaut à $P_3(\Gamma)$ si Γ est auto-duale; mais cette dernière est plus maniable quand il est question de réunions dénombrables.

D é m o n s t r a t i o n d e l a p r o p o s i t i o n 4.8. On a démontré le "si" dans le cas général; on montre donc la réciproque dans chacun des trois cas.

(i) On montre la chose plus précise suivante : si Γ est un contre-exemple minimal (pour l'ordre de Wadge) à $P_3(\mathrm{Pot}(\Gamma))$, Γ est non auto-duale et est de niveau au moins deux.

Si Γ est auto-duale, traitons le premier cas de l'alternative évoquée dans la preuve du théorème 3.3 (l'autre cas étant plus simple) : on trouve une partition (U_n) de $X \times Y$ en $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Delta}^0_1)$ et A_n dans $\mathrm{Pot}(\Gamma_n)$, où $\Gamma_n \not\!\!\!\psi\, \Gamma$, avec $A \cap U_n = A_n \cap U_n$; $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n \cap U_n$, donc il existe n tel que $A_n \cap U_n$ ne soit pas $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)$. Puisque $A_n \cap U_n$ est $\mathrm{Pot}(\Gamma_n)$, par minimalité de Γ, il existe donc B' dans $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Pi}^0_1)$ tel que $A_n \cap U_n \cap B'$ soit $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Pi}^0_1)$ et pour tout C dans $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)$, $A_n \cap U_n \cap B' \neq B' \cap C$. Il reste à poser $B := B' \cap U_n$.

Si Γ est non auto-duale et de niveau au plus un, Γ est de niveau un car Γ contient les fermés, donc est de la forme $SD_\eta(\Delta, \Gamma_*)$: $A = E \cup F$, où

$$E = \bigcup_{\xi<\eta, n\in\omega} A_{\xi,n} \cap V_{\xi,n} \cap^c \Big(\bigcup_{\theta<\xi, p\in\omega} V_{\theta,p} \Big) \quad \text{et} \quad F = A_* \cap^c \Big(\bigcup_{\xi<\eta, n\in\omega} V_{\xi,n} \Big),$$

$A_{\xi,n}$ étant $\mathrm{Pot}(\Delta)$, $(V_{\xi,n})_{n\in\omega}$ étant une suite de $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)$ deux à deux disjoints, et A_* étant $\mathrm{Pot}(\Gamma_*)$, où $\check{\Gamma}_* \neq \Gamma_* \subseteq \Delta$.

P r e m i e r   c a s : *E n'est pas* $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)$. Soient $(V_{\xi,n,p})_{p\in\omega}$ une partition de $V_{\xi,n}$ en ensembles $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Delta}^0_1)$,

$$V^\xi_{n,p} := V_{\xi,n,p} \cap \Big[\bigcup_{\theta<\xi, q\in\omega} A_{\theta,q} \cap V_{\theta,q} \cap^c \Big(\bigcup_{\varrho<\theta, r\in\omega} V_{\varrho,r} \Big) \Big], \quad \text{et}$$

$$D^\xi_{n,p} := \Big[A_{\xi,n} \cap V_{\xi,n,p} \cap^c \Big(\bigcup_{\theta<\xi, q\in\omega} V_{\theta,q} \Big) \Big] \cup V^\xi_{n,p}\,.$$

Alors $E = \bigcup_{\xi<\eta; n,p\in\omega} D^\xi_{n,p}$, donc on trouve ξ minimal tel qu'il existe n et p tels que $D^\xi_{n,p}$ ne soit pas $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)$. Comme $V^\xi_{n,p} = V_{\xi,n,p} \cap \bigcup_{\theta<\xi; q,r\in\omega} D^\theta_{q,r}$, $V^\xi_{n,p}$ est $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)$ par la minimalité de ξ; or

$$\Delta = \begin{cases} \Gamma_0 \cup \check{\Gamma}_0\,, \\ \bigcup_{n\in\omega} \Gamma_n\,, \end{cases}$$

où (Γ_n) est une suite strictement croissante de classes de Wadge de niveau différent de un, donc sauf si

(1) "$\Gamma_0 = \{\emptyset\}$ et $\Delta = \Gamma_0 \cup \check{\Gamma}_0$",

il existe $\Gamma' \not\!\!\!\psi\, \Gamma$ telle que $D^\xi_{n,p}$ soit $\mathrm{Pot}(\Gamma')$.

Mais si on a (1), $D^\xi_{n,p} = G \cup V^\xi_{n,p}$, où $G := D^\xi_{n,p} \setminus V^\xi_{n,p}$ est $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Pi}^0_1)$; alors si on pose $B' := \check{V}^\xi_{n,p}$, B' est $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Pi}^0_1)$, $D^\xi_{n,p} \cap B' = G$ aussi, et si C est $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)$ et $C \cap B' = B' \cap D^\xi_{n,p}$, $D^\xi_{n,p} = (C \cap B') \cup V^\xi_{n,p} = C \cup V^\xi_{n,p}$ est $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)$; par conséquent, B' vérifie les conclusions de la propriété P_3 avec $A := D^\xi_{n,p}$.

Dans l'autre cas, par minimalité de Γ, on trouve aussi un B' vérifiant ces conclusions. Il reste à poser $B := B' \cap V_{\xi,n,p}$, puisque $A \cap B = B' \cap D^\xi_{n,p}$.

S e c o n d   c a s : *E est* $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)$. Dans ce cas F n'est pas $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)$, et sauf si on a (1), on trouve $\Gamma' \not\!\!\!\psi\, \Gamma$ de niveau au moins deux telle que F soit $\mathrm{Pot}(\Gamma')$, donc telle que A soit $\mathrm{Pot}(\Gamma')$, et l'hypothèse de minimalité s'applique. Si on a (1), F est $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Pi}^0_1)$, ce qu'on a traité au premier cas.

Si maintenant A est Pot($\boldsymbol{\Delta}^0_2$), il existe un ordinal dénombrable $\eta > 1$ tel que $\check{A}$ soit Pot($D_\eta(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)$), par le théorème de Hausdorff. Comme Γ est de niveau au moins deux, $D_\eta(\boldsymbol{\Sigma}^0_1) \not\!\!\psi\ \boldsymbol{\Delta}^0_2 \subseteq \Gamma$. Par ce qui précède, il existe B dans Pot($\boldsymbol{\Pi}^0_1$) tel que $B \setminus A$ soit Pot($\boldsymbol{\Pi}^0_1$) et pour tout H dans Pot($\boldsymbol{\Sigma}^0_1$), $B \setminus A \neq B \cap H$. Alors $C := A \cup B$ répond à la question.

(ii) Soit A un borélien à coupes verticales co-dénombrables; on montre bien plus que la propriété P_1 :

(2) *Il existe des copies P et Q de $\mathbf{2}^\omega$, et un homéomorphisme ϕ de P dans Q tels que* $\mathrm{Gr}(\phi) = (P \times Q) \setminus A$.

Comme dans la démonstration du théorème 2.3, $\check{A} = \bigcup_{n\in\omega} \mathrm{Gr}(f_n)$, où les fonctions f_n sont boréliennes et définies sur des boréliens B_n et on trouve un homéomorphisme ϕ_0 de $\mathbf{2}^\omega$ sur $R \subseteq B_0$, avec $f_0\lceil R$ injective continue. Posons

$$E(\alpha,\beta) \Leftrightarrow \text{il existe } n > 0 \text{ tel que } \phi_0(\alpha) \in B_n \text{ et } f_0(\phi_0(\beta)) = f_n(\phi_0(\alpha)).$$

Alors E est borélien à coupes verticales dénombrables de $\mathbf{2}^\omega \times \mathbf{2}^\omega$, donc est maigre relativement à $\mathbf{2}^\omega \times \mathbf{2}^\omega$ et par la proposition 1.6 il existe dans $\mathbf{2}^\omega$ une copie L de $\mathbf{2}^\omega$ telle que si α et β sont distincts dans L, (α,β) n'est pas dans E.

Si α et β sont distincts dans $\phi_0''L$, alors pour tout $n > 0$, $\beta \notin B_n$ ou $f_0(\alpha) \neq f_n(\beta)$. Il reste à poser $P := \phi_0''L$, $Q := (f_0 \circ \phi_0)''L$, $\phi := f_0\lceil P$.

L'ensemble $(P\times Q)\setminus\mathrm{Gr}(\phi)$ n'est pas Pot($\boldsymbol{\Pi}^0_1$), sinon $\mathrm{Gr}(\phi)$ serait Pot($\boldsymbol{\Sigma}^0_1$) ainsi que $\Delta(\mathbf{2}^\omega) = (\mathrm{Id} \times \phi)^{-1}(\mathrm{Gr}(\phi))$. Les ensembles $B := P \times Q$ et $C := \check{\mathrm{G}}\mathrm{r}(\phi)$ répondent donc au problème.

(iii) Par le théorème de Harrington, Kechris, et Louveau (cf. [HKL]), on trouve une injection continue f de $\mathbf{2}^\omega$ dans X telle que $E_0 = (f \times f)^{-1}(A)$ (E_0 étant l'ensemble des couples de suites infinies de 0 et de 1 égales à partir d'un certain rang).

Il suffit donc de regarder le cas où $A = E_0$. Posons, si $\alpha \in \mathbf{2}^\omega$,

$$g_0(\alpha)(p) = 1 - \alpha(p)\,,$$

et

$$g_n(\alpha)(p) = \alpha(p) \Leftrightarrow p > n-1 \qquad \text{si } n > 0\,;$$

la suite (g_n) est une suite d'homéomorphismes, et converge simplement vers g. Posons également $B := \bigcup_{n\in\omega} \mathrm{Gr}(g_n)$, $C := \check{\mathrm{G}}\mathrm{r}(g_0)$; par ce qui précède B est borélien à coupes compactes, donc est Pot($\boldsymbol{\Pi}^0_1$); C est ouvert, et on a la double égalité $B \cap A = C \cap B = \bigcup_{n\in\omega\setminus\{0\}} \mathrm{Gr}(g_n)$. Ce dernier ensemble n'est pas Pot($\boldsymbol{\Pi}^0_1$), à cause du lemme 3.5 appliqué à $X = Y = C_n = D_n = \mathbf{2}^\omega$, (g_n), et $A = B$. ∎

On donne maintenant un résultat qui est une condition suffisante pour obtenir la conclusion du (2) de la preuve précédente, mais sans borne sur la classe de Wadge potentielle de A (par la remarque 1.5(a), un borélien à coupes verticales co-dénombrables est $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Pi}^0_2)$).

Ce résultat se rattache aussi au théorème 2.3, qui implique que si A n'est pas $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)$, A contient un graphe de fonction injective continue définie sur une copie de $\mathbf{2}^\omega$ (la réciproque étant fausse : prendre $A = \mathbf{2}^\omega \times \mathbf{2}^\omega$!). Cependant, la réciproque est vraie si la trace de A sur un rectangle parfait est un tel graphe, comme on l'a vu dans la preuve du (ii) de la proposition 4.8.

Théorème 4.10. *Soient X et Y des espaces polonais et A un borélien à coupes horizontales maigres de $X \times Y$ tel que $\Pi''_X A$ soit non maigre; alors il existe une copie P (resp. Q) de $\mathbf{2}^\omega$ dans X (resp. Y), et un homéomorphisme ϕ de P sur Q tels que* $\mathrm{Gr}(\phi) = (P \times Q) \cap A$.

Rappelons un lemme démontré dans [Ke] :

Lemme 4.11. *Si X et Y sont des espaces polonais et A est borélien à coupes horizontales maigres de $X \times Y$, A est contenu dans une réunion dénombrable de boréliens à coupes fermées rares de $X \times Y$.*

Lemme 4.12. *Soient G et Y des espaces polonais, f une fonction continue "meager-to-one" de G dans Y, O un ouvert à coupes horizontales denses de $G \times Y$, $\varepsilon > 0$, et pour $i = 0, 1$, M_i (resp. N_i) des ouverts non vides de G (resp. Y) tels que $M_i \subseteq f^{-1}(N_i)$. Alors il existe des ouverts non vides M'_i (de G) et N'_i (de Y) tels que :*

(1) $\overline{M'_i \times N'_i} \subseteq M_i \times N_i$,
(2) $\delta(M'_i \times N'_i) < \varepsilon$,
(3) $N'_0 \cap N'_1 = \emptyset$,
(4) $M'_i \times N'_{1-i} \subseteq O$,
(5) $M'_i \subseteq f^{-1}(N'_i)$.

Démonstration. f est "meager-to-one", donc on peut trouver y_i dans $f'' M_i$, $y_0 \neq y_1$, et des ouverts O_i de Y avec $y_i \in O_i \subseteq \overline{O}_i \subseteq N_i$ et $O_0 \cap O_1 = \emptyset$.

Posons $R_0 := (M_0 \cap f^{-1}(O_0)) \times \Pi''_Y[(M_1 \times O_1) \cap \mathrm{Gr}(f)]$; remarquons que R_0 est non vide : en effet, si x_0 est un antécédent de y_0 dans M_0, (x_0, y_1) est dans R_0. On trouve alors (x, y) dans $R_0 \cap O$: en effet, $R_0 \setminus O$ est fermé de R_0 à coupes rares relativement à $M_0 \cap f^{-1}(O_0)$ (qui est ouvert de G), donc est fermé rare de R_0. Soient L_1 et N'_1 des ouverts de diamètre au plus ε tels que $(x, y) \in L_1 \times N'_1 \subseteq \overline{L}_1 \times N'_1 \subseteq [(M_0 \cap f^{-1}(O_0)) \times O_1] \cap O$.

Alors posons $R_1 := (M_1 \cap f^{-1}(N'_1)) \times \Pi''_Y[(L_1 \times O_0) \cap \mathrm{Gr}(f)]$; là encore, R_1 est non vide : en effet, si x_1 est un antécédent de y dans M_1, $(x_1, f(x))$ est dans R_1. On trouve (x', y') dans $R_1 \cap O$, comme avant, et aussi des ouverts M_1', N_0', de diamètre au plus ε, tels que l'on ait

$$(x', y') \in M_1' \times N_0' \subseteq \overline{M}_1' \times N_0' \subseteq [(M_1 \cap f^{-1}(N_1')) \times O_0] \cap O\,.$$

Il reste à poser $M_0' := L_1 \cap f^{-1}(N_0')$. ∎

D é m o n s t r a t i o n d u t h é o r è m e 4.10. Soit N un ouvert non vide de X sur lequel l'analytique $\Pi''_X A$ est co-maigre. On peut alors appliquer le lemme 4.11 à N, Y, et $A \cap (N \times Y)$, ce qui fournit une suite croissante (F_n) de boréliens à coupes fermées rares de $N \times Y$, dont la réunion contient $A \cap (N \times Y)$. Par le rappel 1.1(b) on trouve une topologie polonaise τ sur Y affinant la topologie initiale de sorte que F_n soit fermé de $N \times (Y, \tau)$.

Par le théorème de von Neumann, on trouve une fonction f Baire-mesurable uniformisant $A \cap (N \times Y)$ sur $N \cap \Pi''_X A$; soit alors G un G_δ dense de N, contenu dans $N \cap \Pi''_X A$, sur lequel f est continue (G existe car $N \cap \Pi''_X A$ est co-maigre dans N).

On construit des ouverts non vides $(V_s)_{s \in 2^{<\omega}}$ de G et $(W_s)_{s \in 2^{<\omega}}$ de (Y, τ) vérifiant, si $U_s := V_s \times W_s$,

(i) $\overline{U}_{s^\frown i} \subseteq U_s$,
(ii) $\delta(U_s) < |s|^{-1}$ si $s \neq \emptyset$,
(iii) $W_{s^\frown 0} \cap W_{s^\frown 1} = \emptyset$,
(iv) $\forall s \neq t \in 2^{n+1}$, $V_s \times W_t \subseteq \check{F}_n$,
(v) $V_s \subseteq f^{-1}(W_s)$.

Si on a construit ces objets, posons

$$\{(x_\alpha, y_\alpha)\} := \bigcap_{n \in \omega} U_{\alpha \lceil n} = \bigcap_{n \in \omega} \overline{U}_{\alpha \lceil n}\,.$$

Alors $\{(x_\alpha, y_\alpha) : \alpha \in \mathbf{2}^\omega\}$ est une copie de $\mathbf{2}^\omega$ qui est le graphe d'une injection partielle ϕ (ceci résulte de (iii) et (v), qui assure la disjonction de $V_{s^\frown 0}$ et $V_{s^\frown 1}$ si s est dans $2^{<\omega}$). Les projections de ce graphe définissent les copies P et Q de $\mathbf{2}^\omega$ annoncées. Par (v), ϕ est la restriction de f à P, qui est contenu dans G, donc ϕ est un homéomorphisme de P sur Q. L'inclusion du graphe de ϕ dans $(P \times Q) \cap A$ est alors claire. Inversement, si (x_α, y_β) est dans $(P \times Q) \setminus \mathrm{Gr}(\phi)$, $\alpha \neq \beta$, donc par (iv) on trouve $n > 0$ tel que $\alpha \lceil n \neq \beta \lceil n$; par conséquent, (x_α, y_β) n'est pas dans F_m si $n \leq m + 1$ et (x_α, y_β) n'est pas dans A.

Montrons donc que la construction est possible. On pose $V_\emptyset := G$ et $W_\emptyset := Y$. Admettons avoir construit U_s pour s dans $2^{\leq n}$ vérifiant les conditions (i)–(v).

On va appliquer plusieurs fois le lemme 4.12, à f et à des ouverts de G et (Y, τ), ce qui est licite puisque f est "meager-to-one" sur N, donc sur G qui est co-maigre dans N.

On commence à appliquer ce lemme 4.12 à $\varepsilon = (n+1)^{-1}$ et aux ouverts $O = (G\times Y)\setminus F_n$, $M_0 = M_1 = V_s$ et $N_0 = N_1 = W_s$, de sorte qu'on a assuré (i)–(iii) et (v), ainsi que (iv) pour les couples de la forme $(s^\frown i, s^\frown(1-i))$, avec s dans 2^n et i dans 2 (on obtient ainsi $\widetilde{V}_{s^\frown 0}$, $\widetilde{V}_{s^\frown 1}$, $\widetilde{W}_{s^\frown 0}$, $\widetilde{W}_{s^\frown 1}$). Si jamais, pour u et v distincts dans 2^{n+1}, $\widetilde{V}_u \times \widetilde{W}_v \cap F_n$ est non vide, on diminue à l'aide du lemme 4.12 appliqué à $M_0 = \widetilde{V}_u$, $M_1 = \widetilde{V}_v$, $N_0 = \widetilde{W}_u$, $N_1 = \widetilde{W}_v$, $\widetilde{V}_u$ et $\widetilde{W}_v$ de manière à éviter F_n tout en conservant (v). On réalise ainsi (iv) au bout d'un nombre fini de changements éventuels (majoré par $(2^{n+1})^2$). ■

Par le (i) de la proposition 4.8, on a $P_1(\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Delta}^0_2))$, donc a fortiori $P_1(\mathrm{Pot}(\check{D}_2(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)))$; on va donner une nouvelle preuve de ceci mais sous une forme beaucoup plus forte, du type du théorème rappelé au début du paragraphe.

Comme il résulte de la preuve du (ii) de la proposition 4.8, si D est à coupes dénombrables et est non $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)$, on trouve des injections continues ϕ et ψ telles que $\Delta(\mathbf{2}^\omega) = (\phi\times\psi)^{-1}(D)$, donc en particulier $\Delta(\mathbf{2}^\omega) \leq_P A$. Mais dans la preuve du théorème 3.7, on a vu que $\Delta(\mathbf{2}^\omega) \not\leq_P \check{D}_0$, et par 3.6, $\check{D}_0$ n'est pas $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)$; mais pour montrer que $\Delta(\mathbf{2}^\omega) \not\leq_P \check{D}_0$, on a utilisé le fait que D_0 est à coupes co-dénombrables. Or il se trouve que les $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Pi}^0_1)$ non $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)$ à coupes co-dénombrables n'existent pas : sinon soit τ une topologie sur Y rendant les coupes d'un tel A fermées; $\Pi''_Y(\check{A})$ serait ouvert de (Y,τ) et on aurait $\Pi''_Y(\check{A}) = \bigcup_{x\in X}\check{A}(x) = \bigcup_{n\in\omega}\check{A}(x_n)$ car $\Pi''_Y(\check{A})$ est un espace de Lindelöf; comme $\check{A}(x_n)$ est dénombrable, $\Pi''_Y(\check{A})$ le serait aussi et par la remarque 2.1, A serait $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Delta}^0_1)$. On peut donc se demander si on n'a pas là une caractérisation des “vrais” $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Pi}^0_1)$, à savoir : si B est $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Pi}^0_1)$, B n'est pas $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)$ si et seulement si $\Delta(\mathbf{2}^\omega) \leq_P B$. On va voir que c'est bien le cas. On note $L_0 := \{(\alpha,\beta)\in \mathbf{2}^\omega\times\mathbf{2}^\omega : \alpha \leq_{\mathrm{lex}} \beta\}$.

Théorème 4.13. *Si A est $\mathrm{Pot}(D_2(\boldsymbol{\Sigma}^0_1))$ dans un produit de deux espaces polonais, les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) *A n'est pas $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)$.*

(ii) *Il existe des fonctions injectives continues ϕ, de $\mathbf{2}^\omega$ dans X, et ψ, de $\mathbf{2}^\omega$ dans Y, telles que $\Delta(\mathbf{2}^\omega) = (\phi\times\psi)^{-1}(A)$ ou $L_0 = (\phi\times\psi)^{-1}(A)$.*

Démonstration. Montrons que (ii) implique (i). On a vu au chapitre 2 que $\Delta(\mathbf{2}^\omega)$ n'est pas $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)$, donc si $\Delta(\mathbf{2}^\omega) = (\phi\times\psi)^{-1}(A)$, A n'est pas $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)$. Il suffit donc de voir que L_0 n'est pas $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)$, et il suffit de montrer que $\Delta(\mathbf{2}^\omega) \leq_P L_0$. Posons donc

$$f(\alpha,\beta) = \begin{cases} (\alpha,\beta) & \text{si } \alpha \geq \beta,\\ (\beta,\alpha) & \text{sinon.}\end{cases}$$

Alors $\Delta(\mathbf{2}^\omega) = f^{-1}(L_0)$, et f est dans C_0 :

$$\begin{aligned} f(\alpha,\beta)\in C\times D \Leftrightarrow\ & (\alpha\geq\beta \text{ et } \alpha\in C \text{ et } \beta\in D) \text{ ou}\\ & (\alpha<\beta \text{ et } \alpha\in D \text{ et } \beta\in C)\\ \Leftrightarrow\ & (\alpha\in C\cap D \text{ et } \beta\in C\cap D) \text{ ou}\\ & (\alpha>\beta \text{ et } \alpha\in C \text{ et } \beta\in D) \text{ ou}\\ & (\alpha<\beta \text{ et } \alpha\in D \text{ et } \beta\in C)\,. \end{aligned}$$

Montrons maintenant que (i) implique (ii) : A est $\mathrm{Pot}(D_2(\boldsymbol{\Sigma}^0_1))$, donc par la proposition 2.2 on a $A = (\bigcup_{n\in\omega} C_n\times D_n)\setminus V$, avec C_n, D_n boréliens, V dans $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)$, et la réunion disjointe.

En effet, on peut supposer cette réunion des rectangles disjointe : si $E=\bigcup_{n\in\omega} A_n\times B_n$, et si $I\subseteq n$, posons $C_{n,I} := A_n\cap\bigcap_{i\in I}[A_i\setminus\bigcup_{j\in n\setminus I} A_j]$, $D_{n,I} := B_n\setminus\bigcup_{i\in I} B_i$. Alors on vérifie facilement que $E=\bigcup_{n,I\subseteq n} C_{n,I}\times D_{n,I}$, cette réunion étant disjointe.

On trouve alors n tel que $(C_n\times D_n)\setminus V$ ne soit pas $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)$; or $(C_n\times D_n)\setminus V$ est $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Pi}^0_1)$, donc si on admet le résultat pour A dans $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Pi}^0_1)$, on a le théorème, par disjonction de la réunion (en effet, ϕ (resp. ψ) est à valeurs dans C_n (resp. D_n)).

Quitte à affiner les topologies, on peut supposer que A est fermé, puisque la continuité de ϕ et ψ avec des topologies plus fines entraînera la continuité avec les topologies initiales.

On construit par récurrence sur $|s|$, où $s\in 2^{<\omega}$, des ouverts-fermés non vides $V_s\subseteq X$, $W_s\subseteq Y$ tels que si $U_s := V_s\times W_s$,

(i) $U_{s^\frown i}\subseteq U_s$,
(ii) $\delta(U_s)<|s|^{-1}$ si $s\neq\emptyset$,
(iii) $V_{s^\frown 0}\cap V_{s^\frown 1} = W_{s^\frown 0}\cap W_{s^\frown 1}=\emptyset$,
(iv) $U_s\cap A\notin\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)$,
(v) $V_{s^\frown 0}\times W_{s^\frown 1}\subseteq \check{A}$.

Posons $U_\emptyset := X\times Y$, et admettons avoir construit $(U_s)_{s\in 2^{\leq n}}$ vérifiant (i)–(v). Recouvrons V_s et W_s par des ouverts-fermés de diamètre au plus $(|s|+1)^{-1}$, soient (V_n) et (W_p). On a $A\cap U_s=\bigcup_{n,p\in\omega} A\cap(V_n\times W_p)$, donc l'un des $A\times(V_n\times W_p)$ n'est pas $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)$. Posons $V:=V_n$, $W:=W_p$; on a $U:=V\times W\subseteq U_s$, $A\cap U\notin\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)$, et $\delta(U)<(|s|+1)^{-1}$.

Posons $C:=\bigcup\{B : B\in\boldsymbol{\Sigma}^0_1\lceil U \text{ et } A\cap B\in\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)\}$, $A' := (A\cap U)\setminus C$. Comme C est de Lindelöf, $A\cap C$ est $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)$.

Montrons qu'il existe (x,x',y,y') dans $V^2\times W^2$ tels que (x,y) et (x',y') soient dans A' et $(x',y)\notin A$. Si tel n'est pas le cas, $\Pi''_X A'\times\Pi''_Y A'\subseteq U\cap A$, donc comme V, W, et A sont fermés, $\overline{\Pi''_X A'}\times\overline{\Pi''_Y A'}\subseteq U\cap A$, d'où l'égalité

$$A\cap U = [\overline{\Pi''_X A'}\times\overline{\Pi''_Y A'}]\cup[A\cap(V\setminus\overline{\Pi''_X A'}\times W)]\cup[A\cap(V\times W\setminus\overline{\Pi''_Y A'})]\,.$$

Le premier terme du membre de droite est un rectangle borélien, donc est $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)$; le deuxième est contenu dans C, et vaut $A\cap C\cap[(V\setminus\overline{\Pi''_X A'})\times W]$, donc est $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)$, ainsi que le troisième. Donc $A\cap U$ est $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)$, ce qui est exclus.

Comme $U\setminus A$ est ouvert, soient Z, T des ouverts tels que (x',y) soit dans $Z\times T\subseteq U\setminus A$; on peut poser $V_{s\frown 0}:=Z$, $V_{s\frown 1}:=V\setminus Z$, $W_{s\frown 0}:=W\setminus T$, $W_{s\frown 1}:=T$.

Vérifions (iv) : (x',y') est dans $U_{s\frown 0}\cap A=(Z\times W)\cap A$, donc $U_{s\frown 0}\cap A$ n'est pas $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)$. De même pour $U_{s\frown 1}\cap A$, avec (x,y).

Soit Φ, de $\mathbf{2}^\omega$ dans $X\times Y$, définie par $\{\Phi(\alpha)\}=\bigcap_{n\in\omega}U_{\alpha\lceil n}$; alors on a $\Phi''\mathbf{2}^\omega=\mathrm{Gr}(f)$, où f est une injection continue définie sur la copie $\Pi''_X\mathrm{Gr}(f)$ de $\mathbf{2}^\omega$. De plus $\mathrm{Gr}(f)\subseteq A$ car par (iv), il existe $(\gamma^\alpha_n,\beta^\alpha_n)$ dans $U_{\alpha\lceil n}\cap A$, et la suite $((\gamma^\alpha_n,\beta^\alpha_n))_{n\in\omega}$ converge vers $\Phi(\alpha)$, donc $\Phi(\alpha)$ est dans A qui est fermé. Enfin, si $\alpha<_{\mathrm{lex}}\beta$, $((\Pi_X\circ\Phi)(\alpha),(\Pi_Y\circ\Phi)(\beta))$ n'est pas dans A, par (v). Posons donc $E:=((\Pi_X\circ\Phi)\times(\Pi_Y\circ\Phi))^{-1}(A)$; on a :

(a) $\Delta(\mathbf{2}^\omega)\subseteq E$,
(b) $\alpha<_{\mathrm{lex}}\beta\Rightarrow(\alpha,\beta)\notin E$.

Montrons que $\mathbf{2}^\omega$ contient une copie Z de $\mathbf{2}^\omega$ telle que $E\cap Z^2$ soit égal à $\Delta(\mathbf{2}^\omega)\cap Z^2$ ou à $L_0\cap Z^2$.

Premier cas : *Pour toute suite de* $2^{<\omega}$, $N^2_s\setminus E$ *n'est pas antisymétrique.* On construit alors par récurrence sur $|s|$ une suite (V_s) d'ouverts-fermés non vides de $\mathbf{2}^\omega$ vérifiant :

(1) $V_{s\frown i}\subseteq V_s$,
(2) $\delta(V_s)<|s|^{-1}$ si $s\neq\emptyset$,
(3) $(V_{s\frown 0}\times V_{s\frown 1})\cup(V_{s\frown 1}\times V_{s\frown 0})\subseteq\check{E}$.

Ceci ne pose aucun problème puisque E est fermé dans $\mathbf{2}^\omega\times\mathbf{2}^\omega$ et que $V^2_s\setminus E$ n'est pas antisymétrique. La formule $\{g(\alpha)\}:=\bigcap_{n\in\omega}V_{\alpha\lceil n}$ définit une injection continue g, qui est un homéomorphisme de $\mathbf{2}^\omega$ sur son image Z, qui par (a) vérifie $E\cap Z^2=\Delta(\mathbf{2}^\omega)\cap Z^2$.

Second cas : *Il existe s dans* $2^{<\omega}$ *telle que* $N^2_s\setminus E$ *soit antisymétrique.* Alors par (a) et (b), $Z:=N_s$ vérifie $E\cap Z^2=L_0\cap Z^2$.

Soit alors f un homéomorphisme décroissant de $\mathbf{2}^\omega$ sur Z; les fonctions composées $\phi:=\Pi_X\circ\Phi\circ f$ et $\psi:=\Pi_Y\circ\Phi\circ f$ répondent au problème. ∎

Corollaire 4.14. (a) *Sous les hypothèses du théorème* 4.13, *A n'est pas* $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)$ *si et seulement si* $\Delta(\mathbf{2}^\omega)\leq_P A$.

(b) *On ne peut pas trouver A_0 tel que si A est borélien d'un produit de deux espaces polonais, on ait : A n'est pas* $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Pi}^0_1)$ *si et seulement si* $A_0\leq_P A$.

(c) *Soit A un borélien d'un produit de deux espaces polonais. Alors A est* $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Delta}^0_1)$ *si et seulement si* $A <_P \Delta(\mathbf{2}^\omega)$.

D é m o n s t r a t i o n. (a) Si A n'est pas $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)$, par le théorème 4.13, $\Delta(\mathbf{2}^\omega) \leq_P A$ ou $L_0 \leq_P A$, et on a vu dans la preuve que $\Delta(\mathbf{2}^\omega) \leq_P L_0$, donc $\Delta(\mathbf{2}^\omega) \leq_P A$. La réciproque résulte du chapitre 2.

(b) Avec $A := \check{\Delta}(\mathbf{2}^\omega)$, on voit que si A_0 existait, A_0 serait $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)$. Avec $A := A_0$, on voit que A_0 serait $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)$ non $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Pi}^0_1)$. Par (a), on aurait donc $\check{\Delta}(\mathbf{2}^\omega) \leq_P A_0$. Avec $A := D_0$, on aurait $A_0 \leq_P D_0$, donc $\Delta(\mathbf{2}^\omega) \leq_P \check{D}_0$, ce qui est exclus par la preuve du théorème 3.7.

(c) Si A est $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Delta}^0_1)$, et si

$$f(x,y) := \begin{cases} (0^\omega, 0^\omega) & \text{si } (x,y) \in A, \\ (0^\omega, 1^\omega) & \text{sinon,} \end{cases}$$

f est dans C_0 et réduit A à $\Delta(\mathbf{2}^\omega)$; $\Delta(\mathbf{2}^\omega) \not\leq_P A$ car $\Delta(\mathbf{2}^\omega)$ n'est pas $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)$.

Réciproquement, $A \leq_P \Delta(\mathbf{2}^\omega)$, donc A est $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Pi}^0_1)$; si A n'était pas $\mathrm{Pot}(\boldsymbol{\Sigma}^0_1)$, par (a) on aurait $\Delta(\mathbf{2}^\omega) \leq_P A$, ce qui est exclus. ∎

Le contre-exemple $\check{D}_0$ prouve que l'hypothèse "$A \in \mathrm{Pot}(D_2(\boldsymbol{\Sigma}^0_1))$" du théorème 4.13 et du corollaire 4.14(a) est optimale du point de vue classe de Wadge.

On ne peut pas se ramener à un seul exemple typique dans le théorème 4.13, avec des réductions rectangulaires : si

$$C \leq_R D \Leftrightarrow \text{il existe } f, g \text{ boréliennes telles que } C = (f \times g)^{-1}(D),$$

alors $\Delta(\mathbf{2}^\omega) \perp_R L_0$, comme on le vérifie immédiatement.

5. Uniformisation partielle des G_δ. On va montrer dans ce paragraphe des théorèmes d'uniformisation partielle des G_δ, dont le but est d'essayer de trouver une réciproque au lemme 3.5. Ces théorèmes sont à rapprocher d'une part de résultats dans [GM] et [Ma], où au lieu de considérer la catégorie, il est question d'ensembles de mesure 1 sur chacun des facteurs; et d'autre part de résultats de G. Debs et J. Saint Raymond, où il est question de fonctions totales et injectives, avec des hypothèses de compacité sur chacun des facteurs (cf. [D-SR]).

Lemme 5.1. *Soient X' un ouvert-fermé non vide de ω^ω, Y un espace polonais, Y' un ouvert non vide de Y, $\varepsilon > 0$, et O un ouvert dense de $X' \times Y'$ dont la projection est X'; il existe des suites (U_k) (d'ouvert-fermés non vides de ω^ω) et (V_k) (d'ouverts non vides de Y) telles que :*

(1) $\bigcup_{k\in\omega} U_k$ *(resp.* $\bigcup_{k\in\omega} \overline{V}_k$*) est dense dans X' (resp. Y'),*
(2) $U_k \times V_k \subseteq O$,
(3) $\delta(U_k), \delta(V_k) < \varepsilon$,

(4) $U_p \cap U_q = \emptyset$ *si* $p \neq q$.

Démonstration. Soit (W_m) une partition de X' en ouvert-fermés, avec $\delta(W_m) < \varepsilon$ et $W_m \neq \emptyset$ (c'est possible car X' est homéomorphe à ω^ω). Soit (T_m) une base de la topologie de Y'. Par densité de O, on trouve (x_m, y_m) dans $(W_m \times T_m) \cap O$, et un ouvert-fermé X_m de X', un ouvert Y_m de Y' tels que $\delta(Y_m) < \varepsilon$, et $(x_m, y_m) \in X_m \times \overline{Y}_m \subseteq (W_m \times T_m) \cap O$. Si $\bigcup_{m\in\omega} X_m$ est dense dans X', on a construit, en prenant $U_k := X_k$ et $V_k := Y_k$, les ouverts cherchés; en effet, ils vérifient bien (1)–(4).

Sinon, si $x \in X' \setminus \overline{\bigcup_{m\in\omega} X_m}$, on trouve un ouvert-fermé Z_x de X', y_x dans $O(x)$, et un ouvert R_x de Y tels que l'on ait $\delta(Z_x), \delta(R_x) < \varepsilon$, et également l'inclusion $(x, y_x) \in Z_x \times \overline{R}_x \subseteq O \cap [(X' \setminus \overline{\bigcup_{m\in\omega} X_m}) \times Y']$. On a

$$X' \setminus \overline{\bigcup_{m\in\omega} X_m} = \bigcup Z_x = \bigcup_{n\in\omega} Z_{x_n} = \bigcup_{n\in\omega} \Big[Z_{x_n} \setminus \bigcup_{p<n} Z_{x_p} \Big],$$

puisque l'espace $X' \setminus \overline{\bigcup_{m\in\omega} X_m}$ est de Lindelöf. Posons $\widetilde{Z}_n := Z_{x_n} \setminus \bigcup_{p<n} Z_{x_p}$; s'il y a une infinité de $\widetilde{Z}_n$ non vides, on note (Z_n) la suite formée de ces ouverts-fermés (on trouve donc n_k tel que $Z_k = \widetilde{Z}_{n_k}$).

Sinon, on partitionne un $\widetilde{Z}_{n_0}$ non vide en une suite d'ouverts-fermés non vides de X', et on note (Z_n) la suite formée des $\widetilde{Z}_n$ non vides (pour $n \neq n_0$) et de la partition de $\widetilde{Z}_{n_0}$; on a encore $Z_k \subseteq \widetilde{Z}_{n_k}$, avec éventuellement $n_k = n_{k'}$.

Il reste à poser $R_k = R_{x_{n_k}}$, puis $U_{2k} := X_k$, $U_{2k+1} := Z_k$, $V_{2k} := Y_k$, $V_{2k+1} := R_k$. ∎

Théorème 5.2. *Soient* X, Y *des espaces polonais non vides*, X *étant parfait*, A *un* G_δ *dense de* $X \times Y$. *Alors il existe des* G_δ *denses* F (*dans* X) *et* G (*dans* Y) *et une surjection continue ouverte* f *de* F *sur* G *dont le graphe est contenu dans* A (*avec de plus* F *homéomorphe à* ω^ω).

Démonstration. On peut supposer A à coupes verticales co-maigres : $\check{A}$ est maigre, donc a ses coupes verticales maigres, sauf sur un ensemble maigre (théorème de Kuratowski–Ulam). A a donc ses coupes verticales co-maigres sur un G_δ dense H de X, qui comme X est polonais parfait.

On peut supposer également que $X = \omega^\omega$ (de sorte que si F est G_δ dense de X, F est homéomorphe à ω^ω) : en effet, on procède comme dans la preuve du corollaire 1.7.

Soit (O_n) une suite d'ouverts denses de $X \times Y$ telle que $A = \bigcap_{n\in\omega} O_n$, ϕ_0 de ω dans $\{\emptyset\}$ et, si $n > 0$, ϕ_n une bijection de ω sur ω^n. On construit une suite $(U_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ d'ouverts-fermés non vides de X, et une suite $(V_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ d'ouverts non vides de Y vérifiant :

(i) $\bigcup_{n\in\omega} U_{s^\frown n}$ (resp. $\bigcup_{n\in\omega} \overline{V}_{s^\frown n}$) est dense dans U_s (resp. V_s),

(ii) $U_s \times V_s \subseteq O_{|s|-1}$ si $s \neq \emptyset$,

(iii) $\delta(U_s), \delta(V_s) < |s|^{-1}$ si $s \neq \emptyset$,

(iv) $U_{s^\frown n} \cap U_{s^\frown m} = \emptyset$ si $n \neq m$,

(v) $(\bigcup_{k\in\omega} V_{\phi_n(k)}) \cap \bigcup_{m+p<n} [V_{\phi_m(p)} \setminus \bigcup_{l\in\omega} V_{\phi_m(p)^\frown l}] = \emptyset$.

On pose $U_\emptyset := \omega^\omega$, $V_\emptyset := Y$; admettons avoir construit $(U_s)_{|s|\leq n}$ et $(V_s)_{|s|\leq n}$, ainsi que $(U_{\phi_n(p)^\frown k})_{p<m,k\in\omega}$, $(V_{\phi_n(p)^\frown k})_{p<m,k\in\omega}$ vérifiant (i)–(v).

On construit, si ce n'est déjà fait, $(U_{\phi_n(m)^\frown k})_{k\in\omega}$, $(V_{\phi_n(m)^\frown k})_{k\in\omega}$ en appliquant le lemme précédent à $\varepsilon := (n+1)^{-1}$,

$$X' := U_{\phi_n(m)}, \qquad Y' := V_{\phi_n(m)} \setminus \overline{\bigcup_{q+p<n} [V_{\phi_q(p)} \setminus \bigcup_{l\in\omega} V_{\phi_q(p)^\frown l}]}\,,$$

et $O := O_n \cap (X' \times Y')$; les conditions demandées sont vérifiées, la densité ne posant pas de problème car l'adhérence ci-dessus est rare.

Posons $F := \bigcap_{n\in\omega} \bigcup_{s\in\omega^n} U_s$, $G := \bigcap_{n\in\omega} \bigcup_{s\in\omega^n} V_s$; F et G sont clairement des G_δ denses de X et Y.

Si x est dans F, on trouve pour tout n une unique suite s_n de ω^n telle que $x \in U_{s_n}$ et aussi $s_n \prec s_{n+1}$; alors $(\overline{V}_{s_n})$ définit $f(x)$ dans G, et f est clairement continue car $f''(F \cap U_s) \subseteq G \cap V_s$. Montrons l'inclusion inverse, ce qui achèvera la preuve.

Soit donc y dans $G \cap V_s$, et p tel que $s = \phi_{|s|}(p)$; alors il existe un entier $\alpha(|s|)$ tel que $y \in V_{s^\frown \alpha(|s|)}$, sinon $y \notin G$ car par (v), on aurait alors $y \notin \bigcup_{k\in\omega} V_{\phi_{|s|+p+1}(k)}$; on construit comme ceci par récurrence α dans N_s tel que $\{y\} = \bigcap_{n\in\omega} V_{\alpha\lceil n}$; mais alors $(U_{\alpha\lceil n})$ définit x dans $F \cap U_s$ tel que $f(x) = y$. ■

On ne peut pas supprimer complètement une des hypothèses, ni espérer mieux avec ces hypothèses, dans le sens suivant :

Si on ne suppose pas X parfait, prendre $X = \omega$ et $Y = \mathbf{2}^\omega$.

Si on ne suppose pas A G_δ, prendre $X = Y = \mathbf{2}^\omega$ et

$$A = (\mathbf{2}^\omega \times \mathbf{2}^\omega) \setminus (P_\infty \times P_\infty)\,.$$

Si on ne suppose pas A dense, prendre $X = Y = \mathbf{2}^\omega$ et $A = \{(0^\omega, 0^\omega)\}$.

On ne peut pas avoir f totale ou surjective sur Y : prendre $X = Y = \mathbf{2}^\omega$ et $A = P_\infty^2$.

Enfin, on ne peut pas avoir f injective : prendre $X = \mathbf{2}^\omega$ et $Y = \omega$.

Lemme 5.3. *Soient $\varepsilon > 0$, U et V des ouverts non vides de ω^ω, et O un ouvert dense de $U \times V$; on trouve alors des suites (Z_n) et (T_n) d'ouverts-fermés non vides de ω^ω vérifiant :*

(i) $\delta(Z_n), \delta(T_n) < \varepsilon$,

(ii) $Z_n \times T_n \subseteq O$,

(iii) $Z_n \cap Z_m = T_n \cap T_m = \emptyset$ *si* $n \neq m$,

(iv) $\bigcup_{n\in\omega} Z_n$ *est dense dans* U.

Démonstration. Soient (U_n) une base de la topologie de U et (V_n) une partition de V en ouverts-fermés non vides de diamètre au plus ε. Alors $O \cap (U_n \times V_n)$ est non vide, donc contient (x_n, y_n) et on trouve des suites (X_n) et (Y_n) d'ouverts-fermés de ω^ω, avec $\delta(X_n) < \varepsilon$ et $(x_n, y_n) \in X_n \times Y_n \subseteq O \cap (U_n \times V_n)$. Réduisons la suite (X_n), ce qui fournit (W_n). S'il y a une infinité de W_n non vides, c'est terminé. Sinon, on partitionne un W_{n_0} non vide et le Y_{n_0} correspondant en une suite infinie d'ouverts-fermés non vides. ■

Théorème 5.4. *Sous les hypothèses du théorème* 5.2, *si de plus Y est parfait*, *on peut avoir pour f un homéomorphisme.*

Démonstration. Comme dans la preuve du théorème 5.2, on peut supposer que $X = Y = \omega^\omega$.

Soit (O_n) une suite d'ouverts denses de $\omega^\omega \times \omega^\omega$ telle que $A = \bigcap_{n\in\omega} O_n$. On construit alors des suites d'ouverts-fermés non vides de ω^ω, $(Z_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ et $(T_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$, vérifiant :

(1) $\delta(Z_s), \delta(T_s) < |s|^{-1}$ si $s \neq \emptyset$,
(2) $Z_s \times T_s \subseteq O_{|s|-1}$ si $s \neq \emptyset$,
(3) $\bigcup_{n\in\omega} Z_{s^\frown n}$ (resp. $T_{s^\frown n}$) est dense dans Z_s (resp. T_s),
(4) $Z_{s^\frown n} \cap Z_{s^\frown m} = T_{s^\frown n} \cap T_{s^\frown m} = \emptyset$ si $n \neq m$.

On pose pour commencer $Z_\emptyset = T_\emptyset := \omega^\omega$. Admettons avoir construit $(Z_s)_{|s|\leq n}$ et $(T_s)_{|s|\leq n}$ vérifiant (1)–(4).

On applique le lemme 5.3 à $\varepsilon := (n+1)^{-1}$, $U := Z_s$, $V := T_s$, et $O := O_n \cap (U \times V)$. Deux cas se présentent : si $T := \bigcup_{m\in\omega} T_m$ est dense dans T_s, c'est terminé : on pose $Z_{s^\frown m} := Z_m$ et $T_{s^\frown m} := T_m$.

Sinon, on applique le lemme 5.3 à

$$O := \{(x,y) : (y,x) \in O_n \cap (Z_s \times (T_s \setminus \overline{T}))\},$$
$$U := T_s \setminus \overline{T}, \quad V := Z_s, \quad \varepsilon := (n+1)^{-1},$$

ce qui fournit (Z'_m) et (T'_m) vérifiant :

(i) $\delta(Z'_m), \delta(T'_m) < (n+1)^{-1}$,
(ii) $Z'_m \times T'_m \subseteq O_n \cap (Z_s \times (T_s \setminus \overline{T}))$,
(iii) $\bigcup_{m\in\omega} T'_m$ est dense dans $T_s \setminus \overline{T}$,
(iv) $Z'_p \cap Z'_m = T'_p \cap T'_m = \emptyset$ si $p \neq m$.

Posons, si $j \in \omega$, $n_j := \min\{m \in \omega : Z'_j \cap Z_m \neq \emptyset\}$; si $m \in \omega$,

$$I_m := \{j \in \omega : n_j = m\} \quad \text{et} \quad L_m := \overline{\bigcup_{j\in I_m} Z'_j \cap Z_m}\,.$$

Quatre cas se présentent.

Premier cas : $I_m = \emptyset$. On pose

$$Z_0^m := Z_m, \quad T_0^m := T_m, \quad Z_j^m = T_j^m := \emptyset \quad \text{si } j \geq 1\,.$$

Deuxième cas : $I_m \neq \emptyset$ *et* $Z_m = L_m$. Soit $j_m := \min I_m$; on partitionne $Z'_{j_m} \cap Z_m$ en deux ouverts-fermés non vides $\widetilde{Z}_0$ et $\widetilde{Z}_1$, et on pose

$$Z_0^m := \widetilde{Z}_0, \quad T_0^m := T_m\,,$$

$$Z_1^m := \widetilde{Z}_1, \quad T_1^m := T'_{j_m}$$

$$Z_{j+1}^m := Z_m \cap Z'_j, \quad T_{j+1}^m := T'_j \quad \text{si } j > j_m \text{ et } j \in I_m,$$

$$Z_j^m = T_j^m := \emptyset \quad \text{si } j > 1 \text{ et } (j-1 = j_m \text{ ou } j-1 \notin I_m).$$

Troisième cas : $I_m \neq \emptyset$ *est fini et* $L_m \boldsymbol{\psi}\ Z_m$. On pose

$$Z_0^m := Z_m \setminus L_m, \quad T_0^m := T_m\,,$$

$$Z_{j+1}^m := Z_m \cap Z'_j, \quad T_{j+1}^m := T'_j \quad \text{si } j \in I_m\,,$$

$$Z_j^m = T_j^m := \emptyset \quad \text{si } j > 1 \text{ et } j-1 \notin I_m\,.$$

Quatrième cas : I_m *est infini et* $L_m \boldsymbol{\psi}\ Z_m$. Soient ψ une bijection de ω sur I_m, et $(\widetilde{Z}_m)$, $(\widetilde{T}_m)$ des partitions en ouverts-fermés non vides de $Z_m \setminus L_m$ et T_m. On pose

$$Z_{2k}^m := \widetilde{Z}_{2k}, \quad T_{2k}^m := \widetilde{T}_k, \quad Z_{2k+1}^m := Z_m \cap Z'_{\psi(k)}, \quad T_{2k+1}^m := T'_{\psi(k)}.$$

On renumérote, de façon à ce que

$$\{Z_{s^\frown p} : p \in \omega\} = \{Z_j^i : i, j \in \omega \text{ et } Z_j^i \neq \emptyset\}\,;$$

on pose $T_{s^\frown p} := T_j^i$ si $Z_{s^\frown p} = Z_j^i$, et $(Z_{s^\frown p})$, $(T_{s^\frown p})$ répondent au problème, comme on le vérifie facilement.

Il est maintenant clair que $\bigcap_{n\in\omega} \bigcup_{s\in\omega^n} (Z_s \times T_s)$ est le graphe d'un homéomorphisme de $F := \bigcap_{n\in\omega} \bigcup_{s\in\omega^n} Z_s$ sur $G := \bigcap_{n\in\omega} \bigcup_{s\in\omega^n} T_s$. ∎

Pour pouvoir appliquer ces résultats aux classes de Wadge potentielles, il faudrait traiter le cas où le G_δ est rare.

Références

[D-SR] G. Debs et J. Saint Raymond, *Sélections boréliennes injectives*, Amer. J. Math. 111 (1989), 519–534.

[GM] S. Graf and R. D. Mauldin, *Measurable one-to-one selections and transition kernels*, ibid. 107 (1985), 407–425.

[HKL] L. A. Harrington, A. S. Kechris and A. Louveau, *A Glimm–Effros dichotomy for Borel equivalence relations*, Amer. Math. Soc. 3 (1990), 903–928.

[Ke] A. S. Kechris, *Measure and category in effective descriptive set theory*, Ann. Math. Logic 5 (1973), 337–384.

[Ku] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. 1, Academic Press, New York, 1966.

[Lo1] A. Louveau, livre à paraître.

[Lo2] A. Louveau, *Some results in the Wadge hierarchy of Borel sets*, in: Cabal Seminar 79–81, A. S. Kechris, D. A. Martin and Y. N. Moschovakis (eds.), Lecture Notes in Math. 1019, Springer, 1983, 28–55.

[Lo3] —, *A separation theorem for Σ_1^1 sets*, Trans. Amer. Math. Soc. 260 (1980), 363–378.

[Lo4] —, *Ensembles analytiques et boréliens dans les espaces produits*, Astérisque 78 (1980).

[Lo-SR] A. Louveau and J. Saint Raymond, *Borel classes and closed games*: *Wadge-type and Hurewicz-type results*, Trans. Amer. Math. Soc. 304 (1987), 431–467.

[Ma] R. D. Mauldin, *One-to-one selections*, *marriage theorems*, Amer. J. Math. 104 (1982), 823–828.

[Mo] Y. N. Moschovakis, *Descriptive Set Theory*, North-Holland, 1980.

[P] T. C. Przymusi/nski, *On the notion of n-cardinality*, Proc. Amer. Math. Soc. 69 (1978), 333–338.

[W] W. W. Wadge, thesis, Berkeley, 1984.

EQUIPE D'ANALYSE
UNIVERSITÉ PARIS 6
BOÎTE 186
4, PLACE JUSSIEU
F-75 252 PARIS CEDEX 05, FRANCE

Received 4 November 1992;
in revised form 24 June 1993