FUNDAMENTA
MATHEMATICAE
143 (1993)

Ensembles absorbants pour les classes projectives

par

Robert Cauty (Paris)

Abstract. We prove the existence, in the Hilbert space, of an absorbing set for the nth projective class.

1. Introduction. Nous nous intéressons ici à l'existence d'ensembles absorbants pour les classes projectives. La notion de sous-ensemble $\mathcal{C}$-absorbant de ℓ^2, où $\mathcal{C}$ est une classe d'espaces métriques séparables, a été introduite dans [2] par M. Bestvina et J. Mogilski, qui ont prouvé que deux tels ensembles sont homéomorphes (bien qu'il n'existe pas nécessairement d'homéomorphisme de ℓ^2 sur ℓ^2 envoyant l'un sur l'autre; voir [5] et [6] pour des exemples). Pour formuler nos résultats, rappelons quelques définitions.

Par un *couple* (X, Y), nous entendons un espace X et un sous-espace Y de X. Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux classes d'espaces métrisables et séparables. Un couple (X, X'), où X est un rétracte absolu de voisinage, est dit $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$-*universel* si, pour tout couple (C_1, C_2) où C_1 appartient à $\mathcal{C}_1$ et C_2 à $\mathcal{C}_2$, toute fonction continue f de C_1 dans X et tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X, il existe un Z-plongement g de C_1 dans X qui est $\mathcal{U}$-proche de f et vérifie $g^{-1}(X') = C_2$. Le couple (X, X') est dit *fortement* $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$-*universel* si, pour tout couple (C_1, C_2) où C_1 appartient à $\mathcal{C}_1$ et C_2 à $\mathcal{C}_2$, tout fermé D de C_1, toute fonction continue f de C_1 dans X dont la restriction à D est un Z-plongement vérifiant $(f|D)^{-1}(X') = D \cap C_2$ et tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X, il existe un Z-plongement g de C_1 dans X qui est $\mathcal{U}$-proche de f et vérifie $g|D = f|D$ et $g^{-1}(X') = C_2$.

Nous noterons $\mathcal{M}$ la classe des espaces (métrisables et séparables) topologiquement complets, $\mathcal{K}$ celle des espaces compacts et, pour $n \geq 1$, $\mathcal{L}_n$ la $n^{\text{ième}}$ classe projective.

Nous prouverons ci-dessous le résultat suivant.

THÉORÈME. *Soit $n \geq 1$. L'espace de Hilbert ℓ^2 contient un sous-espace vectoriel Π_n qui est $\mathcal{L}_n$-absorbant et tel que le couple (ℓ^2, Π_n) soit fortement $(\mathcal{M}, \mathcal{L}_n)$-universel.*

D'après le théorème 2.1 de [4], ce théorème caractérise topologiquement le couple (ℓ^2, Π_n). Nous avons donné dans [3] et [4] des modèles concrets des espaces Π_1 et Π_2.

La terminologie utilisée ici est la même que dans [3] et [4]. Nous noterons I le segment $[0,1]$.

2. Démonstration du théorème. La démonstration du théorème est identique à celle du théorème 4.2 de [6] une fois établi le lemme suivant.

LEMME. *Soit $n \geq 1$. Il existe un couple (A_n, B_n) vérifiant*

(i) *A_n est topologiquement complet,*

(ii) *B_n appartient à $\mathcal{L}_n$ et est dense dans A_n,*

(iii) *pour tout couple (X, Y) où X appartient à $\mathcal{M}$ et Y à $\mathcal{L}_n$, il existe un plongement fermé ψ de X dans A_n tel que $\psi^{-1}(B_n) = Y$.*

Démonstration. Pour $n \geq 1$, soit I^n le produit de n copies de I, et soit $\mathcal{C}_n$ l'espace des fonctions continues de I^n dans $\mathbb{R}$ avec la topologie de la convergence uniforme. Identifions I^{n+1} à $I^n \times I$; pour f dans $\mathcal{C}_{n+1}$ et t dans I, nous notons f_t l'élément de $\mathcal{C}_n$ défini par $f_t(a) = f(a,t)$. Définissons par récurrence des sous-ensembles M_{2n-1} et M_{2n}, $n \geq 1$, de $\mathcal{C}_n$ comme suit. M_2 est l'ensemble des fonctions partout dérivables de I dans $\mathbb{R}$, $M_1 = \mathcal{C}_1 \setminus M_2$. Supposant M_{2n} défini, posons

$$M_{2n+1} = \{f \in \mathcal{C}_{n+1} : \exists t \in I \text{ tel que } f_t \in M_{2n}\},$$
$$M_{2n+2} = \mathcal{C}_{n+1} \setminus M_{2n+1}.$$

L'ensemble M_3 est un exemple, dû à Mazurkiewicz [9], d'espace exactement de troisième classe projective.

Nous allons montrer que $(A_{2n-1}, B_{2n-1}) = (\mathcal{C}_n, M_{2n-1})$ et $(A_{2n}, B_{2n}) = (\mathcal{C}_n, M_{2n})$ vérifient les conditions du lemme. C'est évident pour la condition (i).

Vérification de (ii). Il est connu que M_2 appartient à $\mathcal{L}_2$ (voir [8]), donc M_1 appartient à $\mathcal{L}_1$. Supposons prouvé que M_{2n} appartient à $\mathcal{L}_{2n}$. Définissons une fonction ϱ de $\mathcal{C}_{n+1} \times I$ dans $\mathcal{C}_n$ par $\varrho(f,t)(a) = f(a,t)$ $(a \in I^n)$. Cette fonction est continue, donc $Z = \varrho^{-1}(M_{2n})$ appartient à $\mathcal{L}_{2n}$ (voir [7], §34, III). Comme M_{2n+1} est la projection de Z sur $\mathcal{C}_n$, ceci montre que M_{2n+1} appartient à $\mathcal{L}_{2n+1}$; son complémentaire M_{2n+2} appartient donc à $\mathcal{L}_{2n+2}$.

Pour $n \geq 1$, soit D_n le sous-ensemble de $\mathcal{C}_n$ formé des fonctions différentiables en chaque point, et soit E_n le sous-ensemble des fonctions qui, en chaque point, n'ont de dérivée partielle par rapport à aucune des coordonnées. Alors, D_n est un sous-espace vectoriel partout dense de $\mathcal{C}_n$, donc $\mathcal{C}_n \setminus D_n$ est localement homotopiquement négligeable dans $\mathcal{C}_n$. Si φ est une déformation instantanée de $\mathcal{C}_n$ en D_n et g un élément de E_n, la fonction

$\chi : \mathcal{C}_n \times I \to \mathcal{C}_n$ définie par $\chi(f,t) = \varphi(f,t) + g$ est une déformation instantanée de $\mathcal{C}_n$ en E_n, donc $\mathcal{C}_n \setminus E_n$ est aussi localement homotopiquement négligeable dans $\mathcal{C}_n$. Nous avons $D_1 = M_2$ et $E_1 \subset M_1$, d'où $D_2 \subset M_3$ et $E_2 \subset M_4$. On vérifie alors par récurrence que, si n est impair, alors $D_n \subset M_{2n}$ et $E_n \subset M_{2n-1}$ tandis que, si n est pair, $D_n \subset M_{2n-1}$ et $E_n \subset M_{2n}$. Chacun des ensembles M_{2n-1} et M_{2n} contient donc un sous-ensemble de $\mathcal{C}_n$ dont le complémentaire est localement homotopiquement négligeable dans $\mathcal{C}_n$; ceci entraîne que M_{2n} et M_{2n-1} sont denses dans $\mathcal{C}_n$.

Vérification de (iii). Puisqu'un sous-ensemble d'un espace complet appartient à $\mathcal{L}_{2n}$ si, et seulement si, son complémentaire appartient à $\mathcal{L}_{2n-1}$, il est clair que $(\mathcal{C}_n, M_{2n})$ vérifie la condition (iii) relativement à $\mathcal{L}_{2n}$ si, et seulement si, $(\mathcal{C}_n, M_{2n-1})$ vérifie la condition (iii) relativement à $\mathcal{L}_{2n-1}$. Il est prouvé au lemme 3.2 de [4] que $(\mathcal{C}_1, M_2)$ vérifie (iii). Supposons démontré que $(\mathcal{C}_n, M_{2n})$ vérifie (iii), et soit (X,Y) un couple où X appartient à $\mathcal{M}$ et Y à $\mathcal{L}_{2n+1}$. Alors, Y est la projection sur X d'un sous-ensemble Z de $X \times I$ appartenant à $\mathcal{L}_{2n}$ (voir [7], §34, IV). Puisque $(\mathcal{C}_n, M_n)$ vérifie (iii) relativement à $\mathcal{L}_{2n}$, il existe un plongement fermé φ de $X \times I$ dans $\mathcal{C}_n$ tel que $\varphi^{-1}(M_{2n}) = Z$. Définissons alors une fonction continue ψ de X dans $\mathcal{C}_{n+1} = \mathcal{C}(I^n \times I, \mathbb{R})$ par

$$\psi(x)(a,t) = \varphi(x,t)(a), \qquad x \in X,\ (a,t) \in I^n \times I\,.$$

Il est facile de vérifier que ψ est un plongement fermé tel que $\psi^{-1}(M_{2n+1}) = Y$. Ceci montre que $(\mathcal{C}_n, M_{2n+1})$ vérifie (iii).

Remarque. Il y a un plongement canonique de Π_n dans le cube de Hilbert Q. Si φ est un homéomorphisme de ℓ^2 sur le pseudo-intérieur P de Q et si $\Pi'_n = \varphi(\Pi_n)$, on peut vérifier que le couple (Q, Π'_n) est fortement $(\mathcal{K}, \mathcal{L}_n)$-universel; cette propriété caractérise topologiquement (Q, Π'_n) parmi les couples (X,Y) où X est homéomorphe à Q et Y à Π_n.

Bibliographie

[1] C. Bessaga and A. Pełczyński, *Selected Topics in Infinite-Dimensional Topology*, PWN, Warszawa, 1975.

[2] M. Bestvina and J. Mogilski, *Characterizing certain incomplete infinite dimensional absolute retracts*, Michigan Math. J. 33 (1986), 291–313.

[3] R. Cauty, *Caractérisation topologique de l'espace des fonctions dérivables*, Fund. Math. 138 (1991), 35–58.

[4] —, *Sur deux espaces de fonctions non dérivables*, ibid. 141 (1992), 195–214.

[5] —, *Un exemple d'ensembles absorbants non équivalents*, ibid. 140 (1991), 49–61.

[6] R. Cauty and T. Dobrowolski, *Applying coordinate products to the topological identification of normed spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 337 (1993), 625–649.

[7] C. Kuratowski, *Topologie*, vol. I, 4ème édition, PWN, Warszawa, 1958.

[8] S. Mazurkiewicz, *Über die Menge der differenzierbaren Funktionen*, Fund. Math. 27 (1936), 244–249.
[9] —, *Eine projektive Menge der Klasse PCA im Funktionalraum*, ibid. 28 (1937), 7–10.

22, RUE JOUVENET
F-75016 PARIS, FRANCE

Received 14 April 1992;
in revised form 22 March 1993