

Ensembles absorbants pour les classes projectives

par

Robert Cauty (Paris)

Abstract. We prove the existence, in the Hilbert space, of an absorbing set for the n th projective class.

1. Introduction. Nous nous intéressons ici à l'existence d'ensembles absorbants pour les classes projectives. La notion de sous-ensemble \mathcal{C} -absorbant de ℓ^2 , où \mathcal{C} est une classe d'espaces métriques séparables, a été introduite dans [2] par M. Bestvina et J. Mogilski, qui ont prouvé que deux tels ensembles sont homéomorphes (bien qu'il n'existe pas nécessairement d'homéomorphisme de ℓ^2 sur ℓ^2 envoyant l'un sur l'autre; voir [5] et [6] pour des exemples). Pour formuler nos résultats, rappelons quelques définitions.

Par un *couple* (X, Y) , nous entendons un espace X et un sous-espace Y de X . Soient \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 deux classes d'espaces métrisables et séparables. Un couple (X, X') , où X est un rétracte absolu de voisinage, est dit $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ -*universel* si, pour tout couple (C_1, C_2) où C_1 appartient à \mathcal{C}_1 et C_2 à \mathcal{C}_2 , toute fonction continue f de C_1 dans X et tout recouvrement ouvert \mathcal{U} de X , il existe un Z -plongement g de C_1 dans X qui est \mathcal{U} -proche de f et vérifie $g^{-1}(X') = C_2$. Le couple (X, X') est dit *fortement* $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ -*universel* si, pour tout couple (C_1, C_2) où C_1 appartient à \mathcal{C}_1 et C_2 à \mathcal{C}_2 , tout fermé D de C_1 , toute fonction continue f de C_1 dans X dont la restriction à D est un Z -plongement vérifiant $(f|D)^{-1}(X') = D \cap C_2$ et tout recouvrement ouvert \mathcal{U} de X , il existe un Z -plongement g de C_1 dans X qui est \mathcal{U} -proche de f et vérifie $g|D = f|D$ et $g^{-1}(X') = C_2$.

Nous noterons \mathcal{M} la classe des espaces (métrisables et séparables) topologiquement complets, \mathcal{K} celle des espaces compacts et, pour $n \geq 1$, \mathcal{L}_n la $n^{\text{ième}}$ classe projective.

Nous prouverons ci-dessous le résultat suivant.

THÉORÈME. *Soit $n \geq 1$. L'espace de Hilbert ℓ^2 contient un sous-espace vectoriel Π_n qui est \mathcal{L}_n -absorbant et tel que le couple (ℓ^2, Π_n) soit fortement $(\mathcal{M}, \mathcal{L}_n)$ -universel.*

D'après le théorème 2.1 de [4], ce théorème caractérise topologiquement le couple (ℓ^2, Π_n) . Nous avons donné dans [3] et [4] des modèles concrets des espaces Π_1 et Π_2 .

La terminologie utilisée ici est la même que dans [3] et [4]. Nous noterons I le segment $[0, 1]$.

2. Démonstration du théorème. La démonstration du théorème est identique à celle du théorème 4.2 de [6] une fois établi le lemme suivant.

LEMME. *Soit $n \geq 1$. Il existe un couple (A_n, B_n) vérifiant*

- (i) A_n est topologiquement complet,
- (ii) B_n appartient à \mathcal{L}_n et est dense dans A_n ,
- (iii) pour tout couple (X, Y) où X appartient à \mathcal{M} et Y à \mathcal{L}_n , il existe un plongement fermé ψ de X dans A_n tel que $\psi^{-1}(B_n) = Y$.

Démonstration. Pour $n \geq 1$, soit I^n le produit de n copies de I , et soit \mathcal{C}_n l'espace des fonctions continues de I^n dans \mathbb{R} avec la topologie de la convergence uniforme. Identifions I^{n+1} à $I^n \times I$; pour f dans \mathcal{C}_{n+1} et t dans I , nous notons f_t l'élément de \mathcal{C}_n défini par $f_t(a) = f(a, t)$. Définissons par récurrence des sous-ensembles M_{2n-1} et M_{2n} , $n \geq 1$, de \mathcal{C}_n comme suit. M_2 est l'ensemble des fonctions partout dérivables de I dans \mathbb{R} , $M_1 = \mathcal{C}_1 \setminus M_2$. Supposant M_{2n} défini, posons

$$M_{2n+1} = \{f \in \mathcal{C}_{n+1} : \exists t \in I \text{ tel que } f_t \in M_{2n}\},$$

$$M_{2n+2} = \mathcal{C}_{n+1} \setminus M_{2n+1}.$$

L'ensemble M_3 est un exemple, dû à Mazurkiewicz [9], d'espace exactement de troisième classe projective.

Nous allons montrer que $(A_{2n-1}, B_{2n-1}) = (\mathcal{C}_n, M_{2n-1})$ et $(A_{2n}, B_{2n}) = (\mathcal{C}_n, M_{2n})$ vérifient les conditions du lemme. C'est évident pour la condition (i).

Vérification de (ii). Il est connu que M_2 appartient à \mathcal{L}_2 (voir [8]), donc M_1 appartient à \mathcal{L}_1 . Supposons prouvé que M_{2n} appartient à \mathcal{L}_{2n} . Définissons une fonction ϱ de $\mathcal{C}_{n+1} \times I$ dans \mathcal{C}_n par $\varrho(f, t)(a) = f(a, t)$ ($a \in I^n$). Cette fonction est continue, donc $Z = \varrho^{-1}(M_{2n})$ appartient à \mathcal{L}_{2n} (voir [7], §34, III). Comme M_{2n+1} est la projection de Z sur \mathcal{C}_n , ceci montre que M_{2n+1} appartient à \mathcal{L}_{2n+1} ; son complémentaire M_{2n+2} appartient donc à \mathcal{L}_{2n+2} .

Pour $n \geq 1$, soit D_n le sous-ensemble de \mathcal{C}_n formé des fonctions différentiables en chaque point, et soit E_n le sous-ensemble des fonctions qui, en chaque point, n'ont de dérivée partielle par rapport à aucune des coordonnées. Alors, D_n est un sous-espace vectoriel partout dense de \mathcal{C}_n , donc $\mathcal{C}_n \setminus D_n$ est localement homotopiquement négligeable dans \mathcal{C}_n . Si φ est une déformation instantanée de \mathcal{C}_n en D_n et g un élément de E_n , la fonction

$\chi : \mathcal{C}_n \times I \rightarrow \mathcal{C}_n$ définie par $\chi(f, t) = \varphi(f, t) + g$ est une déformation instantanée de \mathcal{C}_n en E_n , donc $\mathcal{C}_n \setminus E_n$ est aussi localement homotopiquement négligeable dans \mathcal{C}_n . Nous avons $D_1 = M_2$ et $E_1 \subset M_1$, d'où $D_2 \subset M_3$ et $E_2 \subset M_4$. On vérifie alors par récurrence que, si n est impair, alors $D_n \subset M_{2n}$ et $E_n \subset M_{2n-1}$ tandis que, si n est pair, $D_n \subset M_{2n-1}$ et $E_n \subset M_{2n}$. Chacun des ensembles M_{2n-1} et M_{2n} contient donc un sous-ensemble de \mathcal{C}_n dont le complémentaire est localement homotopiquement négligeable dans \mathcal{C}_n ; ceci entraîne que M_{2n} et M_{2n-1} sont denses dans \mathcal{C}_n .

Vérification de (iii). Puisqu'un sous-ensemble d'un espace complet appartient à \mathcal{L}_{2n} si, et seulement si, son complémentaire appartient à \mathcal{L}_{2n-1} , il est clair que (\mathcal{C}_n, M_{2n}) vérifie la condition (iii) relativement à \mathcal{L}_{2n} si, et seulement si, $(\mathcal{C}_n, M_{2n-1})$ vérifie la condition (iii) relativement à \mathcal{L}_{2n-1} . Il est prouvé au lemme 3.2 de [4] que (\mathcal{C}_1, M_2) vérifie (iii). Supposons démontré que (\mathcal{C}_n, M_{2n}) vérifie (iii), et soit (X, Y) un couple où X appartient à \mathcal{M} et Y à \mathcal{L}_{2n+1} . Alors, Y est la projection sur X d'un sous-ensemble Z de $X \times I$ appartenant à \mathcal{L}_{2n} (voir [7], §34, IV). Puisque (\mathcal{C}_n, M_n) vérifie (iii) relativement à \mathcal{L}_{2n} , il existe un plongement fermé φ de $X \times I$ dans \mathcal{C}_n tel que $\varphi^{-1}(M_{2n}) = Z$. Définissons alors une fonction continue ψ de X dans $\mathcal{C}_{n+1} = \mathcal{C}(I^n \times I, \mathbb{R})$ par

$$\psi(x)(a, t) = \varphi(x, t)(a), \quad x \in X, (a, t) \in I^n \times I.$$

Il est facile de vérifier que ψ est un plongement fermé tel que $\psi^{-1}(M_{2n+1}) = Y$. Ceci montre que $(\mathcal{C}_n, M_{2n+1})$ vérifie (iii).

Remarque. Il y a un plongement canonique de Π_n dans le cube de Hilbert Q . Si φ est un homéomorphisme de ℓ^2 sur le pseudo-intérieur P de Q et si $\Pi'_n = \varphi(\Pi_n)$, on peut vérifier que le couple (Q, Π'_n) est fortement $(\mathcal{K}, \mathcal{L}_n)$ -universel; cette propriété caractérise topologiquement (Q, Π'_n) parmi les couples (X, Y) où X est homéomorphe à Q et Y à Π_n .

Bibliographie

- [1] C. Bessaga and A. Pełczyński, *Selected Topics in Infinite-Dimensional Topology*, PWN, Warszawa, 1975.
- [2] M. Bestvina and J. Mogilski, *Characterizing certain incomplete infinite dimensional absolute retracts*, Michigan Math. J. 33 (1986), 291–313.
- [3] R. Cauty, *Caractérisation topologique de l'espace des fonctions dérivables*, Fund. Math. 138 (1991), 35–58.
- [4] —, *Sur deux espaces de fonctions non dérivables*, ibid. 141 (1992), 195–214.
- [5] —, *Un exemple d'ensembles absorbants non équivalents*, ibid. 140 (1991), 49–61.
- [6] R. Cauty and T. Dobrowolski, *Applying coordinate products to the topological identification of normed spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 337 (1993), 625–649.
- [7] C. Kuratowski, *Topologie*, vol. I, 4ème édition, PWN, Warszawa, 1958.

- [8] S. Mazurkiewicz, *Über die Menge der differenzierbaren Funktionen*, Fund. Math. 27 (1936), 244–249.
- [9] —, *Eine projektive Menge der Klasse PCA im Funktionalraum*, *ibid.* 28 (1937), 7–10.

22, RUE JOUVENET
F-75016 PARIS, FRANCE

*Received 14 April 1992;
in revised form 22 March 1993*