FUNDAMENTA
MATHEMATICAE
141 (1992)

Sur deux espaces de fonctions non dérivables

par

Robert Cauty (Paris)

Abstract. Let $\mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{D}^*$) be the subspace of $\mathcal{C} = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ consisting of differentiable functions (resp. of functions differentiable at one point at least). We give topological characterizations of the pairs $(\mathcal{C},\mathcal{D})$ and $(\mathcal{C},\mathcal{D}^*)$ and use them to give some examples of spaces homeomorphic to $\mathcal{C}\setminus\mathcal{D}$ or to $\mathcal{C}\setminus\mathcal{D}^*$.

1. Introduction.

Soit $\mathcal{C}$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme, soit $\mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{D}^*$) le sous-espace de $\mathcal{C}$ formé des fonctions partout dérivables (resp. dérivables en au moins un point). Dans [5], nous avons caractérisé topologiquement les espaces $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}^*$. Nous allons ici donner des exemples d'espaces homéomorphes à $\mathcal{C}\setminus\mathcal{D}$ ou $\mathcal{C}\setminus\mathcal{D}^*$.

Nous noterons X^∞ le produit d'une infinité dénombrable de copies de X.

1.1. Théorème. (a) $(\mathcal{C}\setminus\mathcal{D})^\infty$ *est homéomorphe à* $\mathcal{C}\setminus\mathcal{D}$.
(b) $(\mathcal{C}\setminus\mathcal{D}^*)^\infty$ *est homéomorphe à* $\mathcal{C}\setminus\mathcal{D}^*$.

Soit $I=[0,1]$, et soit $\mathcal{H}$ le sous-espace de l'hyperespace 2^I formé des fermés dénombrables. Nous avons démontré dans [5] que $\mathcal{H}$ est homéomorphe à $\mathcal{D}$. Le théorème suivant complète ce résultat.

1.2. Théorème. $2^I\setminus\mathcal{H}$ *est homéomorphe à* $\mathcal{C}\setminus\mathcal{D}$.

Soit $\mathcal{L}^1_{2\pi}$ l'espace des (classes de) fonctions 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont la restriction à $[-\pi,\pi]$ est intégrable, avec la norme $\|f\|_1 = (2\pi)^{-1}\times \int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|\,dt$. Soit $\mathcal{N}_c$ le sous-espace de $\mathcal{L}^1_{2\pi}$ formé des fonctions dont la série de Fourier ne converge en aucun point.

1.3. Théorème. $\mathcal{N}_c$ *est homéomorphe à* $\mathcal{C}\setminus\mathcal{D}^*$.

Nous ne disposons malheureusement d'aucune caractérisation topologique des espaces $\mathcal{C}\setminus\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}\setminus\mathcal{D}^*$. Nous fonderons donc nos démonstrations sur des caractérisations des couples $(\mathcal{C},\mathcal{D})$ et $(\mathcal{C},\mathcal{D}^*)$ développées aux sections 2 et 3.

Cet article est une suite de [5], dont la connaissance est indispensable à sa compréhension. Nous utiliserons donc sans les répéter toutes les définitions, notations et conventions introduites dans [5].

2. Équivalence de plongements d'ensembles absorbants. Soit $\mathcal{K}$ une classe d'espaces métriques séparables vérifiant

(I) si K et K' sont homéomorphes et si K appartient à $\mathcal{K}$, alors K' appartient à $\mathcal{K}$,

(II) tout espace qui est réunion de deux fermés appartenant à $\mathcal{K}$ appartient à $\mathcal{K}$, et

(III) tout fermé d'un espace appartenant à $\mathcal{K}$ appartient à $\mathcal{K}$.

Si X et Y sont deux sous-ensembles $\mathcal{K}$-absorbants (voir [4], section 3) d'une ℓ^2-variété E, alors X et Y sont homéomorphes ([4], théorème 3.1), mais il n'existe pas toujours d'homéomorphisme de E sur E envoyant X sur Y. Nous allons donner ici une condition suffisante pour l'existence d'un tel homéomorphisme.

Soit $\mathcal{M}$ la classe des espaces métriques séparables topologiquement complets. Un couple (X, X'), où X est un rétracte absolu de voisinage, est dit $(\mathcal{M}, \mathcal{K})$-*universel* si, pour tout couple (M, C) où M appartient à $\mathcal{M}$ et C à $\mathcal{K}$, toute fonction continue f de M dans X et tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X, il existe un Z-plongement g de M dans X qui est $\mathcal{U}$-proche de f et vérifie $f^{-1}(X') = C$. Le couple (X, X') est dit *fortement* $(\mathcal{M}, \mathcal{K})$-*universel* si, pour tout couple (M, C) où M appartient à $\mathcal{M}$ et C à $\mathcal{K}$, tout fermé D de M, toute fonction continue f de M dans X dont la restriction à D est un Z-plongement vérifiant $(f|D)^{-1}(X') = D \cap C$ et tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X, il existe un Z-plongement g de M dans X qui est $\mathcal{U}$-proche de f et vérifie $g|D = f|D$ et $g^{-1}(X') = C$.

2.1. Théorème. *Soient E une ℓ^2-variété et X, Y deux ensembles $\mathcal{K}$-absorbants dans E. Si les couples (E, X) et (E, Y) sont fortement $(\mathcal{M}, \mathcal{K})$-universels, alors, pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de E, il existe un homéomorphisme h de (E, X) sur (E, Y) qui est $\mathcal{U}$-proche de* id_E.

Démonstration. Si $\mathcal{V}$ est un recouvrement ouvert de E, nous notons $\overline{\mathrm{St}}\,\mathcal{V}$ la collection des fermetures des éléments de $\mathrm{St}\,\mathcal{V}$ et, pour $n > 1$, nous définissons par récurrence $\mathrm{St}^n\,\mathcal{V}$ par $\mathrm{St}^n\,\mathcal{V} = \{\mathrm{St}(V, \mathrm{St}^{n-1}\,\mathcal{V}) \mid V \in \mathcal{V}\}$. Par définition d'un ensemble $\mathcal{K}$-absorbant, nous pouvons écrire $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$, où X_n (resp. Y_n) appartient à $\mathcal{K}$ et est un Z-ensemble dans X (resp. Y); nous pouvons supposer $X_n \subset X_{n+1}$ et $Y_n \subset Y_{n+1}$ pour tout n. Supposant E muni d'une distance complète, prenons une suite $\{\mathcal{U}_n\}$, $n \geq 1$, de recouvrements ouverts de E vérifiant

(1) $\overline{\mathrm{St}}\,\mathcal{U}_1$ est plus fin que $\mathcal{U}$,

(2) $\overline{\mathrm{St}}\,\mathcal{U}_{n+1}$ est plus fin que $\mathcal{U}_n$ pour tout $n \geq 1$,

(3) le diamètre de chaque élément de $\mathcal{U}_n$ est inférieur à 2^{-n}.

Posant $X_0 = Y_0 = \emptyset$ et $f_0 = \mathrm{id}_E$, nous allons construire par récurrence une suite d'homéomorphismes $\{f_n\}$ de E sur E vérifiant, pour tout $n \geq 1$,

(4) f_n est $\mathcal{U}_n$-proche de f_{n-1},

(4′) f_n^{-1} est $\mathcal{U}_n$-proche de f_{n-1}^{-1},

(5) $f_{2n-1}(\overline{X}_n) \cap Y = f_{2n-1}(X_n)$,

(5′) $f_{2n}^{-1}(\overline{Y}_n) \cap X = f_{2n}^{-1}(Y_n)$,

(6) $f_{2n+1}|\overline{X}_n = f_{2n}|\overline{X}_n = f_{2n-1}|\overline{X}_n$,

(6′) $f_{2n+2}|f_{2n}^{-1}(\overline{Y}_n) = f_{2n+1}|f_{2n}^{-1}(\overline{Y}_n) = f_{2n}|f_{2n}^{-1}(\overline{Y}_n)$.

Soit $n \geq 0$; supposons f_k construit pour $k \leq 2n$. Soit $\mathcal{V}_1$ un recouvrement ouvert de E tel que $\mathrm{St}^4\,\mathcal{V}_1$ soit plus fin que $\mathcal{U}_{2n+1}$ et que $f_{2n}(\mathcal{U}_{2n+1})$. Puisque E est un rétracte absolu de voisinage, nous pouvons trouver un recouvrement ouvert $\mathcal{W}_1$ de E tel que, pour tout espace A, deux fonctions $\mathcal{W}_1$-proches de A dans E soient $\mathcal{V}_1$-homotopes.

Puisque X_n est un Z-ensemble dans X et que $E \setminus X$ est localement homotopiquement négligeable, $\overline{X}_n$ est un Z-ensemble dans E (voir [5], lemme 2.6); de même, $\overline{Y}_n$ est un Z-ensemble dans E. Par suite, $\overline{Y}_n \cup f_{2n}(\overline{X}_n)$ est un Z-ensemble dans E. D'après (5′), $f_{2n}^{-1}(Y_n)$ est fermé dans X, donc $C = X_{n+1} \cup f_{2n}^{-1}(Y_n)$ est réunion des deux sous-ensembles X_{n+1} et $f_{2n}^{-1}(Y_n)$ qui sont fermés dans C et appartiennent à $\mathcal{K}$; par suite, C appartient à $\mathcal{K}$, donc aussi $f_{2n}(C) = Y_n \cup f_{2n}(X_{n+1})$. La $(\mathcal{M}, \mathcal{K})$-universalité forte de (E, Y) permet alors de trouver un Z-plongement $g_1 : \overline{Y}_n \cup f_{2n}(\overline{X}_{n+1}) \to E$ vérifiant les conditions suivantes (qui sont compatibles d'après (5), (5′) et (6)) :

(7) g_1 est $\mathcal{W}_1$-proche de l'inclusion,

(8) $g_1|\overline{Y}_n \cup f_{2n}(\overline{X}_n) = \mathrm{id}$,

(9) $g_1(\overline{Y}_n \cup f_{2n}(\overline{X}_{n+1})) \cap Y = Y_n \cup (g_1 \circ f_{2n}(X_{n+1}))$.

D'après (7) et le choix de $\mathcal{W}_1$, g_1 est $\mathcal{V}_1$-homotope à l'inclusion, donc, d'après le théorème 4.2 de [1], il y a un homéomorphisme h_1 qui prolonge g_1 et est $\mathrm{St}^4\,\mathcal{V}_1$-proche de id_E. Posons $f_{2n+1} = h_1 \circ f_{2n}$. Puisque $\mathrm{St}^4\,\mathcal{V}_1$ est plus fin que $\mathcal{U}_{2n+1}$, (4) est vérifiée. Puisque $\mathrm{St}^4\,\mathcal{V}_1$ est plus fin que $f_{2n}(\mathcal{U}_{2n+1})$, h_1 est $f_{2n}(\mathcal{U}_{2n+1})$-proche de id_E, donc il en est de même de h_1^{-1}; alors, $f_{2n+1}^{-1} = f_{2n}^{-1} \circ h_1^{-1}$ est $\mathcal{U}_{2n+1}$-proche de f_{2n}^{-1}.

Les parties des conditions (5), (6) et (6′) relatives à f_{2n+1} résultent de (8), (9) et du fait que $h_1|\overline{Y}_n \cup f_{2n}(\overline{X}_{n+1}) = g_1$.

Soit $\mathcal{V}_2$ un recouvrement ouvert de E tel que $\mathrm{St}^4\,\mathcal{V}_2$ soit plus fin que $\mathcal{U}_{2n+1}$ et que $f_{2n+2}^{-1}(\mathcal{U}_{2n+2})$. Soit $\mathcal{W}_2$ un recouvrement ouvert de E tel que, pour tout espace A, deux fonctions $\mathcal{W}_2$-proches de A dans E soient $\mathcal{V}_2$-homotopes.

Comme plus haut, $\overline{X}_{n+1} \cup f_{2n+1}^{-1}(\overline{Y}_n)$ est un Z-ensemble dans E. D'après (5), $f_{2n+1}(X_{n+1})$ est fermé dans Y, d'où l'on déduit encore que $X_{n+1} \cup f_{2n+1}^{-1}(Y_{n+1})$ appartient à $\mathcal{K}$. La $(\mathcal{M},\mathcal{K})$-universalité forte de (E,X) permet alors de trouver un Z-plongement $g_2 : \overline{X}_{n+1} \cup f_{2n+1}^{-1}(\overline{Y}_{n+1}) \to E$ vérifiant

(7′) g_2 est $\mathcal{W}_2$-proche de l'inclusion,

(8′) $g_2|\overline{X}_{n+1} \cup f_{2n+1}^{-1}(\overline{Y}_n) = \mathrm{id}$,

(9′) $g_2(\overline{X}_{n+1} \cup f_{2n+1}^{-1}(\overline{Y}_{n+1})) \cap X = X_{n+1} \cup (g_2 \circ f_{2n+1}^{-1}(Y_{n+1}))$.

Alors g_2 est $\mathcal{V}_2$-homotope à l'inclusion, donc il y a un homéomorphisme h_2 de E sur E qui prolonge g_2 et est $\mathrm{St}^4\,\mathcal{V}$-proche de id_E. Posons $f_{2n+2} = f_{2n+1} \circ h_2^{-1}$; alors f_{2n+2}^{-1} est $\mathrm{St}^4\,\mathcal{V}_2$-proche, donc $\mathcal{U}_{n+2}$-proche de f_{2n+1}^{-1}. Puisque $\mathrm{St}^4\,\mathcal{V}_2$ est plus fin que $f_{2n+1}^{-1}(\mathcal{U}_{2n+2})$, h_2 est $f_{2n+1}^{-1}(\mathcal{U}_{2n+2})$-proche de id_E, donc il en est de même de h_2^{-1}; alors $f_{2n+2} = f_{2n+1} \circ h_2^{-1}$ est $\mathcal{U}_{n+2}$-proche de f_{2n+1}.

Les parties des conditions (5′), (6) et (6′) relatives à f_{2n+2} résultent de (8′), (9′) et du fait que $h_2|\overline{X}_{n+1} \cup f_{2n+1}^{-1}(\overline{Y}_{n+1}) = g_2$. Ceci achève la construction par récurrence.

Les conditions (3), (4) et (4′) garantissent que les suites $\{f_n\}$ et $\{f_n^{-1}\}$ convergent uniformément vers des fonctions f et f' qui sont des homéomorphismes inverses l'un de l'autre; de plus, f est $\overline{\mathrm{St}}\,\mathcal{U}_1$-proche, donc $\mathcal{U}$-proche, de id_E. Les relations (5) et (6) garantissent que $f(X_n) = f_{2n-1}(X_n) \subset Y$, d'où $f(X) \subset Y$. Les relations (5′) et (6′) garantissent que $f^{-1}(Y_n) = f_{2n}^{-1}(Y_n) \subset X$, d'où $Y \subset f(X)$. Ceci montre que $f(X) = Y$, donc que f est un homéomorphisme entre les couples (E,X) et (E,Y).

Mentionnons quelques faits élémentaires, concernant la $(\mathcal{M},\mathcal{K})$-universalité, dont nous aurons besoin dans la suite.

2.2. Lemme. *Soit* (X,Y) *un couple, où* X *est un rétracte absolu de voisinage. Si* (X,Y) *est fortement* $(\mathcal{M},\mathcal{K})$*-universel, alors, pour tout ouvert* U *de* X, $(U, U \cap Y)$ *est fortement* $(\mathcal{M},\mathcal{K})$*-universel.*

Ce lemme est analogue à la proposition 2.1 de [4]; la démonstration de cette proposition s'applique à sa vérification.

Considérons la propriété suivante, relative à la classe $\mathcal{K}$:

(IV) Tout ouvert d'un espace appartenant à $\mathcal{K}$ appartient à $\mathcal{K}$.

2.3. Lemme. *Soit* $\mathcal{K}$ *une classe d'espaces vérifiant les conditions* (I) *à* (IV). *Soit* (X,Y) *un couple où* X *est un rétracte absolu de voisinage. Si tout* Z*-ensemble dans* X *est un* Z*-ensemble au sens fort et si, pour tout* *ouvert U de X, $(U, U \cap Y)$ est $(\mathcal{M}, \mathcal{K})$-universel, alors (X, Y) est fortement $(\mathcal{M}, \mathcal{K})$-universel.*

Ce lemme est l'analogue de la proposition 2.2 de [4], dont la démonstration s'applique encore à sa vérification.

2.4. LEMME. *Soit $\mathcal{K}$ une classe vérifiant les conditions* (I) *à* (IV). *Soit X un rétracte absolu de voisinage topologiquement complet dans lequel tout Z-ensemble est un Z-ensemble au sens fort, et soit Y un sous-espace de X tel que $X \setminus Y$ soit localement homotopiquement négligeable dans X. Si (X, Y) est fortement $(\mathcal{M}, \mathcal{K})$-universel, alors Y est fortement $\mathcal{K}$-universel.*

Démonstration. Puisque X est un rétracte absolu de voisinage et $X \setminus Y$ localement homotopiquement négligeable dans X, Y est un rétracte absolu de voisinage ([11], théorème 3.1). Il résulte du lemme 2.6 de [5] que tout Z-ensemble dans Y est un Z-ensemble au sens fort, donc, d'après la proposition 2.2 de [4], il suffit de montrer que tout ouvert U de Y est $\mathcal{K}$-universel. Soient C un espace appartenant à $\mathcal{K}$, f une fonction continue de C dans U et $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ un recouvrement ouvert de U. Pour tout α dans A, soit U'_α un ouvert de X tel que $U'_\alpha \cap Y = U_\alpha$. Soit $U' = \bigcup_{\alpha \in A} U'_\alpha$; c'est un ouvert de X vérifiant $U' \cap Y = U$. Puisque X est topologiquement complet, nous pouvons trouver un espace topologiquement complet C' contenant C et une fonction continue $f' : C' \to U'$ prolongeant f ([9], §31, I). D'après le lemme 2.2, il y a alors un Z-plongement $g' : C' \to U'$ qui est $\mathcal{U}'$-proche de f' ($\mathcal{U}' = \{U'_\alpha \mid \alpha \in A\}$) et vérifie $g'(C') \cap U = g'(C)$. D'après le lemme 2.6 de [5], $g'(C') \cap U$ est un Z-ensemble dans U; par suite, $g = g'|C$ est un Z-plongement de C dans U qui est $\mathcal{U}$-proche de $f'|C = f$, d'où le lemme.

3. Caractérisation des couples $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ et $(\mathcal{C}, \mathcal{D}^*)$ et démonstration du théorème 1.1. Nous avons montré dans [5] que $\mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{D}^*$) est $\mathcal{L}_2$-absorbant (resp. $\mathcal{L}_1$-absorbant) dans $\mathcal{C}$. Compte-tenu du théorème 2.1, la proposition suivante fournit une caractérisation topologique du couple $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ (resp. $(\mathcal{C}, \mathcal{D}^*)$) parmi les couples (E, X) tels que E soit homéomorphe à ℓ^2 et X $\mathcal{L}_2$-absorbant (resp. $\mathcal{L}_1$-absorbant) dans E.

3.1. PROPOSITION. (a) $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ *est fortement* $(\mathcal{M}, \mathcal{L}_2)$*-universel.*

(b) $(\mathcal{C}, \mathcal{D}^*)$ *est fortement* $(\mathcal{M}, \mathcal{L}_1)$*-universel.*

La démonstration utilise les lemmes suivants, analogues au lemme 3.4 de [5].

3.2. LEMME. *Pour tout espace X appartenant à $\mathcal{M}$ et tout sous-espace coanalytique Y de X, il existe un plongement fermé $\overline{\varphi}$ de X dans $\mathcal{C}$ vérifiant*

(i) $\overline{\varphi}^{-1}(\mathcal{D}) = Y$,

(ii) $\overline{\varphi}(x)(0) = \overline{\varphi}(x)(1) = 0$ *quel que soit* x,
(iii) $0 \leq \overline{\varphi}(x)(t) \leq 1$ *quels que soient* x *et* t,
(iv) $\overline{\varphi}(x)'(0) = \overline{\varphi}(x)'(1) = 0$ *quel que soit* x.

3.2′. LEMME. *Pour tout espace* X *appartenant à* $\mathcal{M}$ *et tout sous-espace analytique* Y *de* X, *il existe un plongement fermé* $\overline{\varphi}$ *de* X *dans* $\mathcal{C}$ *vérifiant*

(i) $\overline{\varphi}^{-1}(\mathcal{D}^*) = Y$,
(ii) $\overline{\varphi}(x)(0) = \overline{\varphi}(x)(1) = 0$ *quel que soit* x,
(iii) $0 \leq \overline{\varphi}(x)(t) \leq 1$ *quels que soient* x *et* t,
(iv) *si* $x \in Y$, *il y a un* $t \neq 0$ *tel que* $\overline{\varphi}(x)$ *soit dérivable en* t.

Une fois ces lemmes prouvés, la démonstration de la proposition 3.1 suit celle du lemme 3.5 de [5]. Il faut montrer que, pour tout ouvert U de $\mathcal{C}$ et tout couple (X, Y) où X appartient à $\mathcal{M}$ et Y à $\mathcal{L}_2$ (resp. $\mathcal{L}_1$), toute fonction continue de X dans U peut être approximée par des Z-plongements G vérifiant $G^{-1}(\mathcal{D}) = Y$ (resp. $G^{-1}(\mathcal{D}^*) = Y$), et il suffit pour cela de remplacer, dans la démonstration du lemme 3.5 de [5], le plongement φ du lemme 3.4 de [5] par le plongement $\overline{\varphi}$ du lemme 3.2 (resp. 3.2′). (Dans le cas de $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, la fonction μ_ε utilisée pour construire G est définie par la formule (6) de la démonstration du lemme 3.5 de [5] et la fonction h est supposée continûment dérivable, tandis que, dans le cas de $(\mathcal{C}, \mathcal{D}^*)$, la fonction μ_ε est définie par la formule (6′) de cette démonstration, et h est prise dans $\mathcal{C} \setminus \mathcal{D}^*$).

Démonstration du lemme 3.2. Nous pouvons supposer X contenu dans le cube de Hilbert Q. Alors, $Q \setminus X$ est un F_σ; soit $Q \setminus X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ où F_n est fermé dans Q. Pour $n \geq 1$, définissons $d_n : Q \to I$ par $d_n(x) = \min(1, d(x, F_n))$.

Nous allons construire une fonction continue $\theta : X \to \mathcal{D}$ vérifiant

(1) si $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ est une suite de points de X convergeant vers un point de $Q \setminus X$, alors la suite $\{\theta(x_i)\}$ n'a pas de limite dans $\mathcal{C}$,

(2) $\theta(x)(0) = \theta(x)(1) = 0$ quel que soit x,

(3) $0 \leq \theta(x)(t) \leq 1$ quels que soient x et t,

(4) $\theta(x)'(0) = \theta(x)'(1) = 0$ quel que soit x.

Pour cela, prenons une fonction continûment dérivable $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$0 \leq h(t) \leq 1 \quad \text{pour tout } t, \tag{5}$$

$$h(t) = 0 \quad \text{si } t \leq 0 \text{ ou si } t \geq 1, \tag{6}$$

$$h(1/2) = 1. \tag{7}$$

Pour $n \geq 1$ et x dans X, définissons une fonction continûment dérivable $\theta_n(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\theta_n(x)(t) = 2^{-2n} h(2^n (d_n(x))^{-1}(t - 2^{-n}))$. Il est clair que

$\theta_n(x)$ dépend continûment de x et, d'après (5) et (6), vérifie

$$0 \le \theta_n(x)(t) \le 2^{-2n}, \qquad \forall\, t, \tag{8}$$

$$\theta_n(x)(t) = 0 \quad \text{si } t \le 2^{-n} \text{ ou si } t \ge 2^{-n}(1 + d_n(x)), \tag{9}$$

$$\theta_n(x)(2^{-n}(1 + \tfrac{1}{2}d_n(x))) = 2^{-2n}. \tag{10}$$

Puisque $d_n(x) \le 1$, $2^{-n}(1 + d_n(x)) \le 2^{-(n-1)}$, donc (9) entraîne

$$\theta_n(x)'(2^{-n}) = \theta_n(x')(2^{-(n-1)}) = 0. \tag{11}$$

Définissons $\theta(x)$ par

$$\theta(x)(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0, \\ \theta_n(x)(t) & \text{si } t \in [2^{-n},\, 2^{-(n-1)}],\ n \ge 1. \end{cases} \tag{12}$$

Il résulte de (11) que $\theta(x)$ est dérivable en tout point $t \ne 0$. D'après (8) et (12), pour $t \in [2^{-n}, 2^{-(n-1)}]$, nous avons $\theta_n(x)(t) \le 2^{-2n} \le t^2$, ce qui entraîne que $\theta(x)$ a une dérivée nulle en 0, donc appartient à $\mathcal{D}$. Il est clair que $\theta(x)$ dépend continûment de x et que les conditions (2) à (4) sont vérifiées.

Soit $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ une suite de points de X qui converge vers un point x de $Q \setminus X$, et soit n tel que F_n contienne x. Alors $\{d_n(x_i)\}_{i=1}^{\infty}$ tend vers 0, donc, d'après (9) et (12), la suite de fonctions $\{\theta(x_i)\}$ tend vers 0 en tout point de $[2^{-n}, 2^{-(n-1)}]$. Mais, puisque $2^{-n} \le 2^{-n}(1 + \frac{1}{2}d_n(x_i)) \le 2^{-(n-1)}$, il résulte de (10) et (12) que cette suite ne peut converger uniformément vers zéro sur $[2^{-n}, 2^{-(n-1)}]$; la condition (1) en résulte.

Dans la démonstration du lemme 3.4 de [5], nous avons construit un plongement φ de Q dans $\mathcal{C}$ vérifiant

(13) $\varphi(x)(0) = \varphi(x)(1) = 0$ pour tout x dans Q,

(14) $0 \le \varphi(x)(t) \le 1$ quels que soient x et t,

(15) pour tout x dans Q, $\varphi(x)$ est dérivable en 0 et en 1 et $\varphi(x)'(0) = \varphi(x)'(1) = 0$,

(16) $\varphi^{-1}(\mathcal{D}) = Y$.

D'après (2) et (13), nous pouvons définir une fonction continue $\overline{\varphi} : X \to \mathcal{C}$ par

$$\overline{\varphi}(x)(t) = \begin{cases} \theta(x)(2t), & 0 \le t \le 1/2, \\ \varphi(x)(2t - 1), & 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$$

Alors $\overline{\varphi}$ est un plongement fermé car, si $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ est une suite de points de X telle que la suite $\{\overline{\varphi}(x_i)\}$ converge dans $\mathcal{C}$, alors les deux suites $\{\theta(x_i)\}$ et $\{\varphi(x_i)\}$ convergent dans $\mathcal{C}$, donc $\{x_i\}$ converge vers un point x de Q puisque φ est un plongement, et ce point x appartient à X d'après (1). D'après (4) et (15), $\overline{\varphi}(x)$ est dérivable si, et seulement si, $\varphi(x)$ l'est; la condition (i) résulte donc de (16). Les trois autres conditions résultent de (2)–(4) et (13)–(15).

Démonstration du lemme 3.2′. Cette fois, il nous faut une fonction $\theta : X \to \mathcal{C} \setminus \mathcal{D}^*$ vérifiant les conditions (1)–(3) ci-dessus. Pour la construire, rebaptisons θ_0 la fonction construite plus haut, et prenons une fonction f dans $\mathcal{C} \setminus \mathcal{D}^*$ vérifiant

$$0 \le f(t) \le 1 \quad \text{pour tout } t, \tag{17}$$

$$f(0) = f(1) = 0. \tag{18}$$

La fonction θ peut alors être définie par $\theta(x) = \frac{1}{2}(\theta_0(x) + f)$.

La démonstration du lemme 3.4 de [5] nous donne un plongement φ de Q dans $\mathcal{C}$ vérifiant (13), (14), ainsi que

$$\varphi^{-1}(\mathcal{D}^*) = Y, \tag{16′}$$

(19) si $x \in Y$, il y a un $t \neq 0$, 1 tel que $\varphi(x)$ soit dérivable en t.

(Pour cette dernière condition, voir (1′) à la fin de la démonstration du lemme 3.4 de [5]). La démonstration s'achève alors comme précédemment, (19) garantissant que $\overline{\varphi}(x)$ est dans $\mathcal{D}^*$ si x appartient à Y et impliquant (iv) du lemme 3.2′.

Démonstration du théorème 1.1. Nous prouverons (a) en montrant que $\mathcal{C}^\infty \setminus (\mathcal{C} \setminus \mathcal{D})^\infty$ est $\mathcal{L}_2$-absorbant dans $\mathcal{C}^\infty$ et que $(\mathcal{C}^\infty, \mathcal{C}^\infty \setminus (\mathcal{C} \setminus \mathcal{D})^\infty)$ est fortement $(\mathcal{M}, \mathcal{L}_2)$-universel, ce qui, d'après le théorème 2.1 et la proposition 3.1, entraîne que les couples $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ et $(\mathcal{C}^\infty, \mathcal{C}^\infty \setminus (\mathcal{C} \setminus \mathcal{D})^\infty)$ sont homéomorphes, d'où, a fortiori, le résultat cherché. La démonstration de (b), étant identique, sera omise.

Puisque $\mathcal{C} \setminus \mathcal{D}$ est localement homotopiquement négligeable dans $\mathcal{C}$, $(\mathcal{C} \setminus \mathcal{D})^\infty$ est localement homotopiquement négligeable dans $\mathcal{C}^\infty$. Pour $n \ge 1$, posons

$$L_n = \mathcal{C}_1 \times \ldots \times \mathcal{C}_{n-1} \times \mathcal{D}_n \times \prod_{i=n+1}^{\infty} \mathcal{C}_i,$$

où $\mathcal{C}_i = \mathcal{C}$ pour tout i et $\mathcal{D}_n = \mathcal{D}$. Alors, L_n est un ensemble coanalytique et $\mathcal{C}^\infty \setminus (\mathcal{C} \setminus \mathcal{D})^\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$. Puisque $\mathcal{D}$ est réunion dénombrable de Z-ensembles, L_n est réunion dénombrable de Z-ensembles Z_n^k, $k \ge 1$; alors, les $\overline{Z_n^k} \cap (\mathcal{C}^\infty \setminus (\mathcal{C} \setminus \mathcal{D})^\infty)$ $(n, k \ge 1)$ sont des Z-ensembles dont la réunion est $\mathcal{C}^\infty \setminus (\mathcal{C} \setminus \mathcal{D})^\infty$ (utiliser le lemme 2.6 de [5]). D'après le lemme 2.4, il ne reste donc plus qu'à vérifier que $(\mathcal{C}^\infty, \mathcal{C}^\infty \setminus (\mathcal{C} \setminus \mathcal{D})^\infty)$ est fortement $(\mathcal{M}, \mathcal{L}_2)$-universel. Puisque le complémentaire d'un ensemble analytique dans un espace complet est coanalytique et réciproquement, il est clair qu'un couple (X, Y) est fortement $(\mathcal{M}, \mathcal{L}_2)$-universel si, et seulement si, $(X, X \setminus Y)$ est fortement $(\mathcal{M}, \mathcal{L}_1)$-universel. Le lemme suivant achèvera donc la démonstration.

3.3. Lemme. *Le couple* $(\mathcal{C}^\infty, (\mathcal{C} \setminus \mathcal{D})^\infty)$ *est fortement* $(\mathcal{M}, \mathcal{L}_1)$*-universel.*

Regardant $\mathcal{C}$ comme $\mathcal{C} \times \{\text{point}\} \subset \mathcal{C}^\infty$, nous déduisons du lemme 3.2 l'existence, pour tout couple (X, Y) où X appartient à $\mathcal{M}$ et Y à L_1, d'un plongement fermé g de X dans $\mathcal{C}^\infty$ tel que $g^{-1}((\mathcal{C} \setminus \mathcal{D})^\infty) = Y$. Il suffit alors, pour prouver le lemme, de répéter la démonstration de la proposition 2.5 de [4] en y utilisant de tels plongements (en prenant $* \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{D}$).

4. Démonstration du théorème 1.2. Soit Q_f le sous-ensemble du cube de Hilbert Q formé des points $q = (q_n)$ tels que $q_n = 0$ pour presque tout n. Soit $\mathcal{F}$ $(\subset \mathcal{H})$ le sous-espace de 2^I formé des sous-ensembles finis. D'après le corollaire 5.2 de [7], les couples (Q, Q_f) et $(2^I, \mathcal{F})$ sont homéomorphes, donc (voir [3], théorème V.5.1), $2^I \setminus \mathcal{F}$ est homéomorphe à ℓ^2. Alors, puisque $\mathcal{H} \setminus \mathcal{F}$ est coanalytique, les lemmes 4.1, 4.2 et 4.3 ci-dessous, combinés avec les résultats des sections 2 et 3, montreront que les couples $(2^I \setminus \mathcal{F}, \mathcal{H} \setminus \mathcal{F})$ et $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ sont homéomorphes, d'où, a fortiori, le théorème 1.2.

4.1. Lemme. *Il existe des déformations instantanées de* $2^I \setminus \mathcal{F}$ *en* $2^I \setminus \mathcal{H}$ *et en* $\mathcal{H} \setminus \mathcal{F}$.

Démonstration. La fonction $\Phi : (2^I \setminus \mathcal{F}) \times I \to 2^I \setminus \mathcal{F}$ définie par

$$\Phi(K, t) = \{x \in I \mid d(x, K) \leq t\},$$

où d est la distance usuelle de I, est une déformation instantanée de $2^I \setminus \mathcal{F}$ en $2^I \setminus \mathcal{H}$.

Soit $\Psi : 2^I \times I \to 2^I$ une déformation instantanée de 2^I en $\mathcal{F}$. Soit $q(K, t)$ la borne inférieure de $\Psi(K, t)$; $q(K, t)$ dépend continûment de (K, t). Soit $A_0 = \{0\} \cup \{\pm 2^{-n} \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$. Pour (K, t) dans $2^I \times I$, soit $u(K, t)$ la fonction de $[-1, 1]$ dans I qui envoie $[-1, 0]$ linéairement sur $[\max(0, q(K, t) - t), q(K, t)]$ et $[0, 1]$ linéairement sur $[q(K, t), \min(1, q(K, t) + t)]$ (de sorte que $u(K, t)(0) = q(K, t)$). Alors, la fonction Θ définie par

$$\Theta(K, t) = \Psi(K, t) \cup [u(K, t)(A_0)]$$

est une déformation instantanée de 2^I en $\mathcal{H} \setminus \mathcal{F}$.

4.2. Lemme. $\mathcal{H} \setminus \mathcal{F}$ *est réunion dénombrable de* Z*-ensembles.*

Démonstration. D'après le lemme 5.6 de [5], $\mathcal{H}$ est réunion dénombrable de Z-ensembles (au sens fort) Z_n, $n \geq 1$. D'après la démonstration précédente, il y a une déformation instantanée de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{H} \setminus \mathcal{F}$, donc le résultat découle du lemme 2.6 de [5].

4.3. Lemme. *Le couple* $(2^I \setminus \mathcal{F}, \mathcal{H} \setminus \mathcal{F})$ *est fortement* $(\mathcal{M}, \mathcal{L}_2)$*-universel.*

Pour prouver ce lemme, nous avons besoin de deux résultats auxiliaires.

4.4. Lemme. *Soient* X *un sous-espace topologiquement complet du cube de Hilbert* Q *et* F *un sous-espace analytique de* X. *Il existe une fonction continue* $\xi : Q \to 2^I$ *vérifiant*

(i) $F = \xi^{-1}(2^I \setminus \mathcal{H})$,
(ii) $Q \setminus X = \xi^{-1}(\mathcal{F})$.

Démonstration. La démonstration est essentiellement celle du lemme 5.3 de [5]. Nous nous bornerons donc à indiquer les modifications nécessaires :

1) La fonction A va ici de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathcal{F}(Q)$, et les fonctions λ_σ sont définies sur Q.

Soit $Q \setminus X = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$, où les H_n sont fermés dans Q et vérifient $H_n \subset H_{n+1}$ pour tout n; pour x dans Q, posons $d_n(x) = \min(1, d(x, H_n))$.

2) Les nombres $a_{\pm n}$, $b_{\pm n}$ étant choisis comme dans [5], définissons, pour x dans Q et n entier ≥ 1, des nombres $a_{\pm n}(x)$ et $b_{\pm n}(x)$ par

$$\begin{aligned} a_{-n}(x) &= d_n(x) a_{-n}, \qquad & a_n(x) &= 1 - d_n(x)(1 - a_n), \\ b_{-n}(x) &= d_n(x) b_{-n}, \qquad & b_n(x) &= 1 - d_n(x)(1 - b_n). \end{aligned}$$

Puisque $d_{n+1}(x) \leq d_n(x)$, nous avons

$$\begin{aligned} 0 \leq b_{-(n+1)}(x) \leq a_{-n}(x) \leq b_{-n}(x) \leq \ldots \\ \ldots \leq b_{-1}(x) \leq a_1(x) \leq \ldots \leq a_n(x) \leq b_n(x) \leq a_{n+1}(x) \leq 1. \end{aligned}$$

Si $x \in X$, toutes ces inégalités sont strictes tandis que, si $x \in Q \setminus X$, il y a un entier N tel que $b_{-n}(x) = a_{-n}(x) = 0$ et $b_n(x) = a_n(x) = 1$ pour tout $n \geq N$. Pour $\alpha = \langle m \rangle$ de longueur un, posons $I_\alpha(x) = [a_n(x), b_n(x)]$.

3) Pour $|\alpha| = k$, soit $u_\alpha(x)$ l'application linéaire de I dans I telle que $u_\alpha(x)(0) = a_\alpha(x)$ et $u_\alpha(x)(1) = a_\alpha(x) + d_k(x)\lambda_{\bar{\alpha}}(x) l_\alpha(x)$. $I_\beta(x)$ ($\beta = \langle \alpha, m \rangle$), $\xi_n(x)$ et $\xi(x)$ sont définis comme dans [5]. Par récurrence sur n, on vérifie que si $x \in Q \setminus X$, alors $\xi_n(x)$ est réunion d'un nombre fini d'intervalles (certains dégénérés); de plus, si $x \in H_n$, alors $\xi(x) = \xi_{n+1}(x)$ est un ensemble fini. Par contre, si $x \in X$, chacun des intervalles disjoints $I_m(x)$ ($m \neq 0$) contient au moins un point de $\xi(x)$, d'où la condition (ii).

Pour $x \in X$, l'intervalle $I_\beta(x)$ ($\beta = \langle \alpha, m \rangle$) est dégénéré si, et seulement si, $\lambda_{\bar{\alpha}} l_\alpha(x) = 0$, la même condition que dans [5], donc l'argument de [5] s'applique pour vérifier la condition (i).

4.5. Lemme. *Soient* X *un espace topologiquement complet et* F *un sous-espace analytique de* X. *Il existe un plongement fermé* φ *de* X *dans* $2^I \setminus \mathcal{F}$ *vérifiant* $F = \varphi^{-1}(2^I \setminus \mathcal{H})$.

Démonstration. Supposons X plongé dans le cube de Hilbert Q; soit $Q \setminus X = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$, où H_n est fermé dans Q et $H_n \subset H_{n+1}$ pour tout n. Posons, pour q dans Q, $d_n(q) = \min(1, d(q, H_n))$. Définissons d'abord une fonction $\psi : Q \to \mathcal{H}$ en posant, pour $q = (q_n)$ dans Q,

$$\psi(q) = \{0\} \cup \{2^{-(n+1)} d_n(q) \mid n = 1, 2, \ldots\} \\ \cup \{2^{-(n+1)} d_n(q)(1 - \tfrac{1}{3} q_n) \mid n = 1, 2, \ldots\}.$$

Cette fonction est évidemment continue et vérifie

$$\psi(q) \subset [0, 1/2], \qquad \forall q, \tag{1}$$

$$\psi^{-1}(\mathcal{F}) = Q \setminus X, \tag{2}$$

$$\psi | X \text{ est injective.} \tag{3}$$

Les propriétés (1) et (2) sont évidentes. Soit $q \in X$; nous avons $0 < d_{n+1}(q) \le d_n(q)$ pour tout n. Alors, d'aprés la définifion de $\psi(q)$, $\frac{1}{2} d_1(q)$ est la borne supérieure de $\psi(q)$ et, pour tout n, $2^{-(n+2)} d_{n+1}(q)$ est la borne supérieure de $\psi(q) \cap [0,\, 2^{-(n+2)} d_n(q)]$; par récurrence sur n, nous constatons que la connaissance de $\psi(q)$ détermine les nombres $d_n(q)$. En outre, l'intervalle $]2^{-(n+2)} d_{n+1}(q),\, 2^{-(n+1)} d_n(q)[$ ne contient aucun point de $\psi(q)$ si $q_n = 0$ et contient le seul point $2^{-(n+1)} d_n(q)(1 - \frac{1}{3} q_n)$ de $\psi(q)$ si $q_n \ne 0$. Connaissant $\psi(q)$, donc $d_n(q)$, nous en déduisons donc q_n; la propriété (3) en résulte.

Soit $\xi : Q \to 2^I$ vérifiant les conditions du lemme précédent et telle que

$$\xi(q) \subset [2/3, 1] \qquad \text{pour tout } q \in Q. \tag{4}$$

Définissons alors $\overline{\varphi} : Q \to 2^I$ par

$$\overline{\varphi}(q) = \psi(q) \cup \xi(q).$$

Il est clair que $\overline{\varphi}$ est continue et vérifie $\overline{\varphi}^{-1}(\mathcal{F}) = Q \setminus X$, $\overline{\varphi}^{-1}(2^I \setminus \mathcal{H}) = F$. De plus, les conditions (1), (3) et (4) garantissent que $\overline{\varphi}|X$ est injective. Alors, $\varphi = \overline{\varphi}|X$ est le plongement cherché.

Pour démontrer le lemme 4.3, il suffit maintenant de répéter la démonstration du lemme 5.5 de [5], en y remplaçant le plongement φ du lemme 5.4 de [5] par celui du lemme précédent.

5. Démonstration du théorème 1.3. Soit $R = \mathcal{L}^1_{2\pi} \setminus \mathcal{N}_c$. Nous démontrerons le théorème 1.3 en prouvant que les couples $(\mathcal{L}^1_{2\pi}, R)$ et $(\mathcal{C}, \mathcal{D}^*)$ sont homéomorphes, ce qui, d'après les sections 2 et 3, résultera du théorème suivant.

5.1. THÉORÈME. *R est $\mathcal{L}_1$-absorbant dans $\mathcal{L}^1_{2\pi}$ et le couple $(\mathcal{L}^1_{2\pi}, R)$ est fortement $(\mathcal{M}, \mathcal{L}_1)$-universel.*

Par abus de langage, nous identifierons les éléments de $\mathcal{L}^1_{2\pi}$ à des fonctions f de $[-\pi,\pi]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(-\pi)=f(\pi)$. Lorsque nous dirons qu'un élément f de $\mathcal{L}^1_{2\pi}$ a une certaine propriété (par exemple, est positif sur un certain intervalle), cela signifiera que le représentant particulier de f que nous construisons ou utilisont a cette propriété. Nous notons $\|f\|_1$ la norme d'un élément dans $\mathcal{L}^1_{2\pi}$; si cet élément a un représentant continu (nécessairement unique), encore noté f par abus de langage, nous posons $\|f\| = \sup_{-\pi\le t\le\pi}|f(t)|$.

Pour f dans $\mathcal{L}^1_{2\pi}$, nous notons $S(f)$ la série de Fourier formelle de f et $S(f,t)\sim a_0/2+\sum_{n=1}^\infty(a_n\cos nt+b_n\sin nt)$ la série de Fourier formelle de f au point t. Pour $N\ge 1$, nous posons $S_N(f,t)=a_0/2+\sum_{n=1}^N(a_n\cos nt+b_n\sin nt)$.

Nous aurons besoin des résultats suivants de la théorie des séries de Fourier.

(A) Si f est à variation bornée sur un intervalle $]a,b[$, alors sa série de Fourier converge en tout point de $]a,b[$ (voir [2], page 114).

(B) Si f est de classe C^k, ses coefficients de Fourier vérifient $a_n=o(1/n^k)$ et $b_n=o(1/n^k)$ (voir [2], pages 79–80).

(C) Soit λ une fonction dont les coefficients de Fourier sont des $O(1/n^3)$ et soit $f\in\mathcal{L}^1_{2\pi}$. La série de Fourier du produit λf converge en tout point t tel que $\lambda(t)=0$. En un point où $\lambda(t)\ne 0$, $S(\lambda f,t)$ converge si, et seulement si, $S(f,t)$ converge (voir [2], pages 196 à 199, en particulier la note en bas de la page 197 et le corollaire 1, page 199).

Nous noterons $\mathcal{E}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}^1_{2\pi}$ formé des éléments dont la série de Fourier converge partout.

5.2. Lemme. *$\mathcal{N}_c$ est localement homotopiquement négligeable dans $\mathcal{L}^1_{2\pi}$.*

Démonstration. Puisque $\mathcal{E}$ est dense dans $\mathcal{L}^1_{2\pi}$, il y a une déformation instantanée de $\mathcal{L}^1_{2\pi}$ en $\mathcal{E}\subset R$, d'où le résultat.

5.3. Lemme. *Soit F un sous-espace analytique d'un espace métrique complet X. Il existe une fonction continue $\xi: X\to\mathcal{L}^1_{2\pi}\setminus\mathcal{E}$ vérifiant*

(i) $\xi^{-1}(R)=F$,

(ii) $\xi(x)$ *est paire*, $\forall x\in X$.

La démonstration qui suit est à comparer à celle de la section 5 de [8] où est construite une fonction borélienne $g: X\to\mathcal{L}^1_{2\pi}$ telle que $g^{-1}(R)=F$.

Démonstration. Il existe (voir [9], §35, II et [5], lemme 1.5) une fonction $A:\mathbb{N}^*\to\mathcal{F}(X)$ vérifiant

$$A(\tau)\subset \operatorname{Int} A(\tau') \quad \text{si } \tau'<\tau, \tag{1}$$

$$F = \bigcup_{\sigma \in J} \bigcap_{n} A(\sigma|n). \tag{2}$$

Pour σ dans $\mathbb{N}^*$, soit $\mu_\sigma : X \to I$ une fonction continue vérifiant

(3) $\mu_\sigma(x) = 0$ si $x \in A(\sigma)$,

(4) $\mu_\sigma(x) = 1$ si $x \notin \operatorname{Int} A(\sigma|n-1)$ pour $|\sigma| = n \geq 2$.

Par récurrence sur $|\sigma|$, prenons des intervalles non dégénérés $I(\sigma) = [a(\sigma), b(\sigma)]$ de façon que, notant $\mathring{I}(\sigma) =]a(\sigma), b(\sigma)[$, les conditions suivantes soient vérifiées :

$$]0, \pi[= \bigcup_{p=1}^{\infty} I(\langle p \rangle), \tag{5}$$

$$\mathring{I}(\sigma) = \bigcup_{p=1}^{\infty} I(\langle \sigma, p \rangle), \tag{6}$$

(7) si σ et σ' sont deux éléments distincts de $\mathbb{N}^*$ de même longueur, $\mathring{I}(\sigma) \cap \mathring{I}(\sigma') = \emptyset$.

Soit q une bijection de $\mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{N}$. Pour σ dans $\mathbb{N}^*$, définissons la fonction $\psi_\sigma : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ par

$$\psi_\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin \mathring{I}(\sigma), \\ 2^{-q(\sigma)}(t - a(\sigma))^4 (b(\sigma) - t)^4 & \text{si } t \in I(\sigma). \end{cases}$$

Pour x dans X, posons

$$\pi(x) = \sum_{\sigma \in \mathbb{N}^*} \mu_\sigma(x) \psi_\sigma.$$

Puisque μ_σ est continue et que $\|\mu_\sigma(x)\psi_\sigma\|_1 \leq \|\psi_\sigma\|_1$, π est somme d'une série normalement convergente de fonctions continues de X dans $\mathcal{L}^1_{2\pi}$, donc est continue. Il est facile de vérifier que la fonction ψ_σ, $\sigma \in \mathbb{N}^*$, est de classe C^3 et que, pour tout x dans X, les dérivées troisièmes des fonctions $\mu_\sigma(x)\psi_\sigma$ forment une série normalement convergente. Par suite, $\pi(x)$ est de classe C^3.

Soient $D^+ = \{0, \pi\} \cup (\bigcup_{\sigma \in \mathbb{N}^*} \{a(\sigma), b(\sigma)\})$, $D^- = \{-t \mid t \in D^+\}$ et $D = D^+ \cup D^-$. Il est clair que $\pi(x)$ s'annule sur $[-\pi, 0] \cup D^+$.

Affirmation 1. *$(\pi(x)^{-1}(0)) \cap ([0, \pi] \setminus D^+) \neq \emptyset$ si, et seulement si, $x \in F$.*

En effet, il résulte de (5)–(7) que si t est un point de $[0, \pi] \setminus D^+$, il y a un unique τ dans J tel que $t \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathring{I}(\tau|n)$ et que si σ est un élément de $\mathbb{N}^*$ tel que $\sigma \neq \tau|n$ pour tout n, alors $t \notin I(\sigma)$, donc $\psi_\sigma(t) = 0$. Comme $\psi_{\tau|n}(t) \neq 0$ pour tout n, $\pi(x)(t) = 0$ si, et seulement si, $\mu_{\tau|n}(x) = 0$ pour tout n, ce qui, d'après (1), (3) et (4), équivaut à $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A(\tau|n)$. L'affirmation résulte alors de (2).

Fixons un élément f de $\mathcal{N}_c$ et définissons deux fonctions ϱ_+ et ϱ_- de X dans $\mathcal{L}^1_{2\pi}$ par

$$\varrho_+(x) = f\pi(x), \qquad \varrho_-(x)(t) = \varrho_+(x)(-t).$$

La continuité de ϱ_+ et ϱ_- se vérifie facilement. De plus, nous avons

$$S(\varrho_-(x), t) = S(\varrho_+(x), -t). \tag{8}$$

D'après (B) et (C), l'ensemble des points où la série de Fourier de $\varrho_+(x)$ converge est $\pi(x)^{-1}(0)$. Puisque $\pi(x)^{-1}(0)$ contient $[-\pi, 0] \cup D^+$, il résulte de (8) que la série de Fourier de $\varrho_+(x) + \varrho_-(x)$ converge en tout point de D et qu'elle converge en un point t de $[-\pi, \pi] \setminus D$ si, et seulement si, $S(\varrho_+(x))$ converge au point $|t|$ de $[0, \pi] \setminus D^+$. L'affirmation 1 entraîne alors la suivante :

Affirmation 2. *Il existe un point t de $[-\pi, \pi] \setminus D$ en lequel $S(\varrho_+(x) + \varrho_-(x), t)$ converge si, et seulement si, $x \in F$.*

Soit g une fonction continue définie sur $[-\pi, \pi]$ et vérifiant

(9) g est paire,

(10) l'ensemble des points en lesquels $S(g)$ converge est $[-\pi, \pi] \setminus D$.

L'existence d'une fonction continue vérifiant (10) est prouvée par N. K. Bary ([2], chapitre IV, §21, p. 346–348). Pour obtenir en plus la condition (9), il suffit de faire les rajouts suivants à sa démonstration.

(a) Remarquer que la fonction continue dont la série de Fourier diverge en 0 et converge en tout point de $[-\pi, \pi] \setminus \{0\}$ construite pages 127–128 dans [2] est paire. Soit φ cette fonction.

(b) Soient $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ une énumération des points de D^+ et $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ une suite de nombres > 0 telle que $\sum_{n=1}^\infty \varepsilon_n < \infty$. Alors la fonction

$$g(t) = \sum_{n=1}^\infty \varepsilon_n(\varphi(t - t_n) + \varphi(t + t_n))$$

est paire et l'argument pages 347–348 de [2] montre qu'elle vérifie (10).

Définissons alors $\xi : X \to \mathcal{L}^1_{2\pi}$ par

$$\xi(x) = g + \varrho_+(x) + \varrho_-(x).$$

Il est clair que $\xi(x)$ est paire. Si t est un point de D, $S(\varrho_+(x) + \varrho_-(x), t)$ converge, mais $S(g, t)$ diverge, donc $S(\xi(x), t)$ diverge. Par suite, $\xi(x)$ n'est pas dans $\mathcal{E}$ et elle appartient à R si, et seulement si, il y a un $t \in [-\pi, \pi] \setminus D$ tel que $S(\xi(x), t)$ converge; en un tel point, $S(g, t)$ converge, donc cela équivaut à la convergence de $S(\varrho_+(x) + \varrho_-(x), t)$. La propriété (i) résulte alors de l'affirmation 2.

Soit $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des réels ≥ 0. Nous dirons qu'une fonction f d'un intervalle $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ est *en escalier* s'il y a une partition de $[a, b]$ en un nombre fini de sous-intervalles sur chacun desquels f est constante.

5.4. LEMME. *Il existe un plongement fermé α de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathcal{L}^1([0,1])$ vérifiant*

(i) $\forall s \in \mathbb{R}^+$, $\alpha(s)$ *est une fonction en escalier*,
(ii) $|\alpha(s)(t)| = 1$ *quels que soient* s *et* t.

Démonstration. Posons $\alpha(0) = 1$. Soit $n \geq 0$ et supposons α définie sur $[0, n]$ de façon que la restriction de $\alpha(n)$ à chacun des intervalles $]i/2^n, (i+1)/2^n[$, $0 \leq i < 2^n$, soit constante. Définissont alors $\alpha|[n, n+1]$ par

$$\alpha(n+u)(t) = \begin{cases} \alpha(n)(t) & \text{si } t \in \left[\dfrac{i}{2^n}, \dfrac{i}{2^n} + (2-u)\dfrac{1}{2^{n+1}}\right], \\ -\alpha(n)(t) & \text{si } t \in \left]\dfrac{i}{2^n} + (2-u)\dfrac{1}{2^{n+1}}, \dfrac{i+1}{2^n}\right[, \\ & 0 \leq i < 2^n,\ 0 \leq u \leq 1. \end{cases}$$

Evidemment, α est continue et vérifie (i) et (ii). Il est clair que la restriction de α à $[n, n+1]$ est injective. Si $s \in [n, n+1]$, $\alpha(s)$ est constante sur $]0, 1/2^{n+1}[$ tandis que, si $s > n+1$, $\alpha(s)$ n'est pas constante sur cet intervalle. Tout cela montre que α est injective.

Pour s, s' dans $\mathbb{R}$, soit $\Delta(s, s') = \{t \in [0,1] \mid \alpha(s)(t) \neq \alpha(s')(t)\}$. Nous notons $m(E)$ la mesure d'un sous-ensemble E de $[0,1]$.

AFFIRMATION. *Si* $|s - s'| > 2$, *alors* $m(\Delta(s, s')) \geq 1/4$.

D'après (ii), $|\alpha(s)(t) - \alpha(s')(t)| = 2$ pour tout t dans $\Delta(s, s')$, donc l'affirmation entraîne que $\int_0^1 |\alpha(s)(t) - \alpha(s')(t)|\, dt \geq 1/2$ si $|s - s'| > 2$. Alors, si $\{s_n\}$ est une suite tendant vers l'infini dans $\mathbb{R}^+$, $\{\alpha(s_n)\}$ n'a pas de limite dans $\mathcal{L}^1([0,1])$; puisque α est injective, c'est donc un plongement fermé.

Pour vérifier l'affirmation, supposons $s' > s+2$. Soient $s = n+u$ et $s' = n+p+u'$ avec $0 \leq u, u' < 1$; alors $p \geq 2$. Par construction, $\alpha(s)$ est constante sur chacun des intervalles $I_i =]i/2^n, (2i+1)/2^{n+1}[$, $0 \leq i < 2^n$. Pour $0 \leq i < 2^n$ et $0 \leq j < 2^{p-1}$, posons $J_i^j =]i/2^n + j/2^{n+p}, i/2^n + (j+1)/2^{n+p}[$. Pour tout k avec $0 \leq k < 2^{p-2}$, $\alpha(n+p)$ est égale à $\alpha(s)$ sur l'un des deux intervalles J_i^{2k}, J_i^{2k+1}, et à $-\alpha(s)$ sur l'autre, d'où

$$m(\Delta(s, n+p) \cap I_i) = \tfrac{1}{2} m(I_i), \qquad 0 \leq i < 2^n.$$

Le passage de $\alpha(n+p)$ à $\alpha(n+p+u')$ change le signe de $\alpha(n+p)$ sur un intervalle de longueur $u'/2^{n+p+2}$ dans chacun des intervalles J_i^j; il y a donc compensation entre les changements de signe dans J_i^{2k} et dans J_i^{2k+1}, d'où

$$m(\Delta(s, n+p+u') \cap I_i) = m(\Delta(s, n+p) \cap I_i), \qquad 0 \leq i < 2^n,$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned} m(\Delta(s,s')) &\ge \sum_{i=0}^{2^n-1} m(\Delta(s,s')\cap I_i) \\ &= \sum_{i=0}^{2^n-1} m(\Delta(s,n+p)\cap I_i) = \sum_{i=0}^{2^n-1} \tfrac{1}{2} m(I_i) = \tfrac14, \end{aligned}$$

d'où l'affirmation et le lemme.

5.5. Lemme. *Soit X un espace topologiquement complet. Il existe une fonction continue $\Lambda : X\times\,]0,1] \to \mathcal{E}$ vérifiant*

(i) $\Lambda(x,\delta)$ *est impaire*,
(ii) $|\Lambda(x,\delta)(t)| \le 1$ *quel que soit* t,
(iii) $\Lambda(x,\delta)(t) = 0$ *si* $|t| \le \pi-\delta$,
(iv) $\Lambda(x,\delta)(t) < 0$ *si* $\pi - \frac14\delta < t < \pi$,
(v) $\Lambda(x,\delta)(t) \ge 0$ *si* $\pi - \frac12\delta \le t \le \pi - \frac14\delta$,
(vi) *si* $\Lambda(x,\delta)|[\pi-\delta,\pi] = \Lambda(x',\delta)|[\pi-\delta,\pi]$, *alors* $x = x'$,
(vii) *si* $\{(x_i,\delta_i)\}$ *est une suite de points de* $X\times\,]0,1]$ *telle que la suite* $\{\Lambda(x_i,\delta_i)\}$ *converge dans* $\mathcal{L}^1_{2\pi}$ *et que* $\{\delta_i\}$ *tende vers* $\delta_0 > 0$, *alors la suite* $\{x_i\}$ *converge dans* X.

Démonstration. Supposons X plongé dans le cube de Hilbert Q. Alors, $Q\setminus X$ est un F_σ; soit $Q\setminus X = \bigcup_{n=1}^\infty F_n$, où les F_n sont des fermés vérifiant $F_n \subset F_{n+1}$ pour tout n. Pour x dans Q et $n\ge 1$, posons $d_n(x) = \min(1, d(x,F_n))$.

Soient $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ et $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ deux suites croissantes convergeant vers zéro et vérifiant $-1 < a_n < b_n < a_{n+1}$ pour tout n. Le lemme 5.4 nous permet de trouver un plongement fermé α_n de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathcal{L}^1([a_n,b_n])$ vérifiant

(1) $\forall s\in\mathbb{R}^+$, $\alpha_n(s)$ est une fonction en escalier,

(2) $|\alpha_n(s)(t)| = 1$ pour tout $t\in[a_n,b_n]$.

Définissons une fonction continue β de X dans $\mathcal{L}^1([-1,0])$ par

$$\beta(x)(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin \bigcup_{n=1}^\infty [a_n,b_n], \\ \alpha_n((d_n(x))^{-1})(t) & \text{si } t\in[a_n,b_n],\ n\ge 1. \end{cases}$$

Définissons une fonction continue γ de Q dans $\mathcal{L}^1([0,1])$ en posant, pour $q = (q_n)$ dans Q,

$$\gamma(q)(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0, \\ t-1 & \text{si } 1/2 < t \le 1, \\ q_n & \text{si } 2^{-(n+1)} < t \le 2^{-n},\ n\ge 1. \end{cases}$$

Soit enfin $\theta : X \to \mathcal{L}^1([-1,1])$ la fonction continue définie par

$$\theta(x)(t) = \begin{cases} t^3(\beta(x)(t)) & \text{si } -1 \le t \le 0, \\ t^3(\gamma(x)(t)) & \text{si } 0 \le t \le 1. \end{cases}$$

La fonction γ est évidemment injective; cela entraîne

(3) θ est injective.

Si $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ est une suite de points de X convergeant vers $x_0 \in F_n$, alors $\{d_n(x_i)\}$ tend vers zéro; comme α_n est un plongement fermé de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathcal{L}^1([a_n, b_n])$, nous déduisons des définitions de β et de θ que

(4) si $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ est une suite de points de X qui converge vers un point x_0 de F_n, alors $\{\theta(x_i)|[a_n, b_n]\}$ n'a pas de limite dans $\mathcal{L}^1([a_n, b_n])$.

Pour $0 < \delta \le 1$, soit u_δ l'application linéaire qui envoie $\pi - \delta$ sur -1 et π sur $+1$. Nous pouvons maintenant définir $\Lambda : X \times]0,1] \to \mathcal{L}^1_{2\pi}$ par

$$\Lambda(x,\delta)(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |t| \le \pi - \delta, \\ \theta(x)(u_\delta(t)) & \text{si } \pi - \delta \le t \le \pi, \\ -\theta(x)(u_\delta(-t)) & \text{si } -\pi \le t \le -\pi + \delta. \end{cases}$$

Il est clair que Λ est continue et vérifie (i) à (v). Pour (x, δ) dans $X \times]0,1[$, nous avons

$$\theta(x) = \Lambda(x,\delta) \circ (u_\delta^{-1}|[-1,1]), \tag{5}$$

donc (vi) résulte de (3).

Soit $\{(x_i, \delta_i)\}_{i=1}^{\infty}$ une suite de points de $x \times]0,1]$ telle que la suite $\{\Lambda(x_i, \delta_i)\}$ converge vers un élément g de $\mathcal{L}^1_{2\pi}$ et que $\{\delta_i\}$ tende vers $\delta_0 > 0$. Pour vérifier (vii), il suffit de montrer que si $\{x_{i_j}\}$ est une sous-suite de $\{x_i\}$ qui converge vers un point x_0 de Q, alors $x_0 \in X$. En effet, $\{\Lambda(x_{i_j}, \delta_{i_j})\}$ converge alors vers $\Lambda(x_0, \delta_0) = g$, et (vi) montre que x_0 ne dépend pas de la sous-suite $\{x_{i_j}\}$, ce qui entraîne la convergence de $\{x_i\}$. En utilisant (5) et la définition de Λ, il est facile de vérifier que $\{\theta(x_{i_j})\}$ converge vers $g \circ (u_{\delta_0}^{-1}|[-1,1])$ dans $\mathcal{L}^1([-1,1])$; d'après (4), x_0 ne peut pas appartenir à F_n, quel que soit $n \ge 1$, donc $x_0 \in X$.

Enfin, $\Lambda(X \times]0,1]) \subset \mathcal{E}$. En effet, la convergence de $S(\Lambda(x,\delta), t)$ en un point $t \ne \pm(\pi - \frac{1}{2}\delta)$ résulte de (A), et la convergence de cette série aux points $\pm(\pi - \frac{1}{2}\delta)$ résulte de (C) en raison de la présence de t^3 dans la définition de θ.

5.6. Lemme. *Il existe une déformation instantanée Φ de $\mathcal{L}^1_{2\pi}$ en $\mathcal{E}$ vérifiant*

(i) $\forall (f, \delta) \in \mathcal{L}^1_{2\pi} \times]0,1[$, $\Phi(f,\delta)(t) = 0$ *si* $\pi - 2\delta \le |t| \le \pi$,

(ii) *si* $\{(f_i, t_i)\}_{i=1}^{\infty}$ *est une suite dans* $\mathcal{L}^1_{2\pi} \times]0,1[$ *telle que* $\{\Phi(f_i, t_i)\}$ *converge vers un élément* g *de* $\mathcal{L}^1_{2\pi}$ *et que* $\{t_i\}$ *tende vers zéro, alors* $\{f_i\}$ *tend aussi vers* g.

D é m o n s t r a t i o n. Soit $\mathcal{A}$ le sous-espace de $\mathcal{L}^1_{2\pi}$ formé des éléments ayant un représentant continu périodique f pour lequel il existe une subdivision de $[-\pi,\pi]$ en un nombre fini de sous-intervalles sur chacun desquels f est linéaire; c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}^1_{2\pi}$ qui est contenu dans $\mathcal{E}$ d'après (A). Nous pouvons en fait construire Φ de façon que $\Phi(\mathcal{L}^1_{2\pi}\times\,]0,1]) \subset \mathcal{A}$. La construction est semblable à celle du lemme 3.5 de [6], donc sera omise.

5.7. LEMME. *Pour tout ouvert U de $\mathcal{L}^1_{2\pi}$, $(U, U\cap R)$ est fortement $(\mathcal{M},\mathcal{L}_1)$-universel.*

D é m o n s t r a t i o n. Soient X un espace topologiquement complet, Y un sous-espace analytique de X, F une fonction continue de X dans U et $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de U. Prenons une fonction continue $\omega : U \to\,]0,1]$ vérifiant

(1) quelles que soient f dans U et g dans $\mathcal{L}^1_{2\pi}$, si $\|f-g\|_1 < 3\omega(f)$, il y a un élément de $\mathcal{U}$ contenant à la fois f et g.

Soit Φ la déformation du lemme 5.6. Prenons une fonction continue $\varepsilon : U \to\,]0,1]$ vérifiant, $\forall f \in U$,

$$\|f - \Phi(f,\varepsilon(f))\|_1 < \omega(f), \tag{2}$$

$$\varepsilon(f) < \omega(f). \tag{3}$$

D'après le lemme 5.3, il y a une fonction continue $\xi : X \to \mathcal{L}^1_{2\pi}\setminus\mathcal{E}$ vérifiant

$$\xi^{-1}(R) = Y, \tag{4}$$

$$\xi(x) \text{ est paire pour tout } x \in X. \tag{5}$$

Quitte à multiplier $\xi(x)$ par $[\max(1,\|\xi(x)\|_1)]^{-1}$, nous pouvons supposer que

$$\|\xi(x)\|_1 \le 1, \qquad \forall x \in X. \tag{6}$$

Soit $\Lambda : X\times\,]0,1] \to \mathcal{E}$ la fonction du lemme 5.5. Posant, pour simplifier, $\varepsilon(x) = \varepsilon(F(x))$, définissons $G : X \to \mathcal{L}^1_{2\pi}$ par

$$G(x) = \Phi(F(x),\varepsilon(x)) + \varepsilon(x)\xi(x) + \Lambda(x,\varepsilon(x)).$$

D'après (6), $\|\varepsilon(x)\xi(x)\|_1 \le \varepsilon(x)$; d'après les propriétés (ii) et (iii) de Λ, $\|\Lambda(x,\varepsilon(x))\|_1 \le \varepsilon(x)$; d'où

$$\|G(x) - \Phi(F(x),\varepsilon(x))\|_1 < 2\varepsilon(x). \tag{7}$$

Les relations (2), (3) et (7) entraînent $\|F(x)-G(x)\|_1 < 3\omega(f)$; d'après (1), G est $\mathcal{U}$-proche de F; en particulier, G est à valeurs dans U.

Puisque $\varepsilon(x) > 0$, $\Phi(F(x),\varepsilon(x))$ et $\Lambda(x,\varepsilon(x))$ appartiennent à $\mathcal{E}$, donc $G(x)$ appartient à R, si, et seulement si, $\xi(x)$ appartient à R, donc, d'après (4), $G^{-1}(R) = Y$.

Pour x dans X, définissons $H(x)$ par

$$H(x)(t) = \frac{1}{2}(G(x)(t) - G(x)(-t)).$$

Puisque $\xi(x)$ est paire, $\Lambda(x, \varepsilon(x))$ impaire et que $\Phi(F(x), \varepsilon(x))$ s'annule sur $[\pi - 2\varepsilon(x), \pi] \cup [-\pi, -\pi + 2\varepsilon(x)]$, nous avons

$$(8) \qquad H(x)|[\pi - 2\varepsilon(x), \pi] = \Lambda(x, \varepsilon(x))|[\pi - 2\varepsilon(x), \pi].$$

Soient x, x' deux points de X tels que $G(x) = G(x')$; alors $H(x) = H(x')$ dans $\mathcal{L}^1_{2\pi}$. Il résulte de (8) et des propriétés (iv) et (v) de Λ que $H(x)$ (resp. $H(x')$) est < 0 sur $]\pi - \frac{1}{4}\varepsilon(x), \pi[$ (resp. $]\pi - \frac{1}{4}\varepsilon(x'), \pi[$) et ≥ 0 sur $[\pi - \frac{1}{2}\varepsilon(x), \pi - \frac{1}{4}\varepsilon(x)]$ (resp. $[\pi - \frac{1}{2}\varepsilon(x'), \pi - \frac{1}{4}\varepsilon(x')]$). Puisque $H(x)$ et $H(x')$ sont égales presque partout, $\varepsilon(x) = \varepsilon(x')$. Alors, il résulte de (8) que $\Lambda(x, \varepsilon(x))|[\pi - 2\varepsilon(x), \pi] = \Lambda(x', \varepsilon(x))|[\pi - 2\varepsilon(x), \pi]$, d'où $x = x'$ d'après la propriété (vi) de Λ, donc G est injective.

Puisque G est injective, pour prouver que c'est un plongement fermé dans U, il suffit de montrer que si $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ est une suite de points de X telle que la suite $\{G(x_i)\}$ converge vers un élément g de U, alors $\{x_i\}$ a une sous-suite qui converge vers un point x_0 de X. Posant $\varepsilon_i = \varepsilon(x_i)$, nous pouvons supposer que $\{\varepsilon_i\}$ tend vers $\varepsilon_0 \in [0, 1]$. Alors $\varepsilon_0 > 0$. En effet, dans le cas contraire, $\{\Phi(F(x_i), \varepsilon_i)\}$ tend aussi vers g d'après (7), donc $\{F(x_i)\}$ aussi d'après la propriété (ii) de Φ. Mais alors, ε étant continue, $\{\varepsilon_i\}$ tend vers $\varepsilon(g) > 0$, ce qui est contradictoire.

Puisque $\varepsilon_0 > 0$, nous pouvons supposer que $3\varepsilon_0/4 < \varepsilon_i < 3\varepsilon_0/2$ pour tout i. La suite $\{H(x_i)\}$ converge vers h où $h(t) = \frac{1}{2}(g(t) - g(-t))$, donc (8) entraîne que $\{\Lambda(x_i, \varepsilon_i)|[\pi - 3\varepsilon_0/2, \pi]\}$ converge vers $h|[\pi - 3\varepsilon_0/2, \pi]$ dans $\mathcal{L}^1([\pi - 3\varepsilon_0/2, \pi])$; par raison de parité, $\{\Lambda(x_i, \varepsilon_i)|[-\pi, -\pi + 3\varepsilon_0/2]\}$ converge dans $\mathcal{L}^1([-\pi, -\pi + 3\varepsilon_0/2])$. Puisque $\varepsilon_i < \varepsilon_0/2$, $\Lambda(x_i, \varepsilon_i)$ est nulle sur $[-\pi + 3\varepsilon_0/2, \pi - 3\varepsilon_0/2]$. Il résulte de tout cela que $\{\Lambda(x_i, \varepsilon_i)\}$ converge dans $\mathcal{L}^1_{2\pi}$. La propriété (vii) de Λ entraîne alors la convergence de la suite $\{x_i\}$.

Puisque $\Phi(F(x), \varepsilon(x))$ et $\Lambda(x, \varepsilon(x))$ sont dans $\mathcal{E}$, mais pas $\xi(x)$, $G(X) \subset \mathcal{L}^1_{2\pi} \backslash \mathcal{E}$. Ce dernier ensemble étant localement homotopiquement négligeable, $G(X)$ est un Z-ensemble dans $\mathcal{L}^1_{2\pi}$.

Il résulte des lemmes 5.7, 2.3 et 2.4 que $(\mathcal{L}^1_{2\pi}, R)$ est fortement $(\mathcal{M}, \mathcal{L}_1)$-universel et que R est fortement $\mathcal{L}_1$-universel. Puisque R est analytique (voir [8]), le lemme suivant achève la démonstration du théorème 1.3.

5.8. LEMME. *R est réunion dénombrable de Z-ensembles.*

D é m o n s t r a t i o n. Pour tout $m \geq 1$, soit Z_m l'ensemble des éléments f de $\mathcal{L}^1_{2\pi}$ pour lesquels il existe un t tel que $|S_N(f, t)| \leq m$ pour tout N. Puisque $S_N(f, t)$ dépend continûment de (f, t), Z_m est fermé. Si $S(f)$ converge en un point, alors f appartient à Z_m pour tout m assez grand, donc $R \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} Z_m$. Il suffit donc de montrer que Z_m est un Z-ensemble dans

$\mathcal{L}^1_{2\pi}$, car alors $R \cap Z_m$ est un Z-ensemble dans R ([5], lemme 2.6). Soit φ une déformation instantanée de $\mathcal{L}^1_{2\pi}$ en $\mathcal{E}$. Fixons un élément f_0 de $\mathcal{L}^1_{2\pi}$ vérifiant

$$\limsup_{n\to\infty} |S_n(f_0, t)| = \infty, \qquad \forall t.$$

(L'existence d'une telle fonction f_0 est prouvée dans [2], chapitre V, §20). Alors, la fonction $\psi : \mathcal{L}^1_{2\pi} \times I \to \mathcal{L}^1_{2\pi}$ définie par

$$\psi(f, s) = \varphi(f, s) + sf_0$$

est une déformation instantanée de $\mathcal{L}^1_{2\pi}$ en $\mathcal{L}^1_{2\pi} \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} Z_m$, d'où le lemme.

Bibliographie

[1] R. D. Anderson and J. D. McCharen, *On extending homeomorphisms to Fréchet manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. 25 (1970), 283–289.

[2] N. K. Bary, *A Treatise on Trigonometric Series*, Vol. I, Pergamon Press, Oxford 1964.

[3] C. Bessaga and A. Pełczyński, *Selected Topics in Infinite-Dimensional Topology*, PWN, Warszawa 1975.

[4] M. Bestvina and J. Mogilski, *Characterizing certain incomplete infinite dimensional absolute retracts*, Michigan Math. J. 33 (1986), 291–313.

[5] R. Cauty, *Caractérisation topologique de l'espace des fonctions dérivables*, Fund. Math. 138 (1991), 35–58.

[6] —, *Les fonctions continues et les fonctions intégrables au sens de Riemann comme sous-espaces de $\mathcal{L}^1$*, ibid. 139 (1991), 23–36.

[7] D. Curtis and Nguyen To Nhu, *Hyperspaces of finite subsets which are homeomorphic to $\aleph_0$-dimensional linear metric spaces*, Topology Appl. 19 (1985), 251–260.

[8] A. S. Kechris, *Sets of everywhere singular functions*, in: Recursion Theory Week, H.D. Ebbinghaus *et al.* (eds.), Lecture Notes in Math. 1141, Springer, Berlin 1985, 233–244.

[9] C. Kuratowski, *Topologie I*, 4e édition, PWN, Warszawa 1958.

[10] S. Mazur und L. Sternbach, *Über die Borelschen Typen von linearen Mengen*, Studia Math. 4 (1933), 48–53.

[11] H. Toruńczyk, *Concerning locally homotopy negligible sets and characterization of l_2-manifolds*, Fund. Math. 101 (1978), 93–110.

22, RUE JOUVENET
75016 PARIS, FRANCE

Received 25 June 1990;
in revised form 9 April 1992