FUNDAMENTA
MATHEMATICAE
140 (1991)

Un exemple d'ensembles absorbants non équivalents

par

Robert Cauty (Paris)

Abstract. We give an example in the Hilbert space ℓ^2 of two subsets which are absorbing for the class of topologically complete spaces, but for which there exists no homeomorphism of ℓ^2 onto itself mapping one of these subsets onto the other.

1. Introduction et notations. Soient E une ℓ^2-variété et $\mathcal{C}$ une classe d'espaces métriques séparables qui est (a) invariante par homéomorphisme, (b) héréditaire pour les fermés et (c) additive (i.e. si $C = C_1 \cup C_2$ où C_1 et C_2 sont des fermés appartenant à $\mathcal{C}$, alors C appartient à $\mathcal{C}$). M. Bestvina et J. Mogilski ont défini dans [2] la notion de sous-ensemble $\mathcal{C}$-absorbant de E (pour la définition, voir §2), et ont prouvé que si Ω_1 et Ω_2 sont deux tels sous-ensembles, alors Ω_1 et Ω_2 sont homéomorphes. Le problème se pose naturellement de savoir s'il existe toujours un homéomorphisme de E sur E envoyant Ω_1 sur Ω_2. Lorsque $\mathcal{C}$ est formée d'espaces compacts, la réponse est affirmative ([1], chapitre IV). Nous nous proposons ici de donner un contre-exemple à ce problème dans le cas de la classe $\mathcal{M}$ des espaces topologiquement complets.

Soit $\Sigma = \{(x_n) \in \ell^2 \mid \sum_{n=1}^{\infty}(nx_n)^2 < \infty\}$. L'exemple classique d'ensemble $\mathcal{M}$-absorbant dans l'espace de Hilbert est le sous-espace $\ell^2 \times \Sigma$ de $\ell^2 \times \ell^2$ (voir [9] et [2], p. 310). Nous regardons ℓ^1 comme un sous-espace de ℓ^2; soit $E = \{(x_n) \in \ell^1 \mid \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0\}$. Nous avons alors le résultat suivant.

Théorème 1. *E est $\mathcal{M}$-absorbant dans ℓ^2, mais les couples (ℓ^2, E) et $(\ell^2 \times \ell^2, \ell^2 \times \Sigma)$ ne sont pas homéomorphes. En fait, $\ell^2 \setminus E$ et $\ell^2 \times \ell^2 \setminus \ell^2 \times \Sigma$ ne sont pas homéomorphes.*

Il est aussi intéressant de comparer les couples (ℓ^1, E) et $(\ell^2 \times \ell^2 \times \Sigma, \ell^2 \times \Sigma \times \Sigma)$.

Théorème 2. *Les couples (ℓ^1, E) et $(\ell^2 \times \ell^2 \times \Sigma, \ell^2 \times \Sigma \times \Sigma)$ ne sont pas homéomorphes, mais les espaces ℓ^1, E, $\ell^1 \setminus E$, $\ell^2 \times \ell^2 \times \Sigma$, $\ell^2 \times \Sigma \times \Sigma$*

et $\ell^2 \times \ell^2 \times \Sigma \setminus \ell^2 \times \Sigma \times \Sigma$ *sont tous homéomorphes.*

Il est facile de voir que les couples (ℓ^2, E) et $(\ell^2 \times \ell^2, \ell^2 \times \Sigma)$ ne sont pas homéomorphes, ainsi que les couples (ℓ^1, E) et $(\ell^2 \times \ell^2 \times \Sigma, \ell^2 \times \Sigma \times \Sigma)$. En effet, $\ell^2 \times \Sigma$ est un F_σ dans ℓ^2, tandis que Mazur et Sternbach ont prouvé (voir [7], p. 53) que E n'est pas un F_σ dans ℓ^2. En particulier, l'espace $\ell^2 \setminus E$ n'est pas topologiquement complet, donc ne peut être homéomorphe à l'espace topologiquement complet $\ell^2 \times \ell^2 \setminus \ell^2 \times \Sigma$. Comme ℓ^1 est un F_σ dans ℓ^2, E ne peut pas être un F_σ dans ℓ^1, tandis que $\ell^2 \times \Sigma \times \Sigma$ est un F_σ dans $\ell^2 \times \ell^2 \times \Sigma$, donc les couples (ℓ^1, E) et $(\ell^2 \times \ell^2 \times \Sigma, \ell^2 \times \Sigma \times \Sigma)$ ne sont pas homéomorphes.

Le reste de cet article est consacré à la vérification des parties non évidentes des théorèmes 1 et 2 et à l'élaboration de caractérisations topologiques des couples (ℓ^2, E), (ℓ^1, E), $(\ell^2 \times \ell^2, \ell^2 \times \Sigma)$ et $(\ell^2 \times \ell^2 \times \Sigma, \ell^2 \times \Sigma \times \Sigma)$.

Rappelons que si f et g sont deux fonctions de Y dans X, et si $\mathcal{U}$ est un recouvrement ouvert de X, f est dite *$\mathcal{U}$-proche* de g si, pour tout y dans Y, il y a un élément de $\mathcal{U}$ contenant à la fois $f(y)$ et $g(y)$. Un sous-ensemble F d'un rétracte absolu de voisinage X est appelé un *Z-ensemble* dans X s'il est fermé et si, pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X, il existe une fonction continue f de X dans X, $\mathcal{U}$-proche de l'identité et telle que $f(X) \subset X \setminus F$; si, de plus, il est toujours possible de choisir cette fonction f de façon que $\overline{f(X)} \cap F = \emptyset$, alors F est appelé un *Z-ensemble au sens fort* dans X. Une fonction $f : Y \to X$ est appelée un *Z-plongement* si c'est un plongement et si $f(X)$ est un Z-ensemble dans X.

Un sous-espace A d'un espace X est dit *localement homotopiquement négligeable* dans X si, pour tout ouvert U de X, l'inclusion de $U \setminus A$ dans U est une équivalence homotopique faible. Il est connu que, si X est un rétracte absolu de voisinage, cela équivaut à l'existence d'une *déformation instantanée* de X en $X \setminus A$, i.e. d'une fonction $\varphi : X \times [0,1] \to X$ telle que $\varphi(x,0) = x$ et que $\varphi(X \times]0,1]) \subset X \setminus A$ (voir [8], théorème 2.4).

Nous regardons le cube de Hilbert comme le produit $Q = \prod_{n=1}^{\infty} I_n$, où $I_n = [0,1]$ pour tout n.

Tous les espaces considérés ici sont supposés métrisables et séparables. Par un *couple* (X, X'), nous entendons un espace X et un sous-espace X' de X.

2. Universalité forte et couples absorbants.

Soit $\mathcal{Q}$ une classe de couples vérifiant

(I) Si (K, K') appartient à $\mathcal{Q}$ et si (C, C') est homéomorphe à (K, K'), alors (C, C') appartient à $\mathcal{Q}$.

(II) Si (K, K') appartient à $\mathcal{Q}$ et si F est un fermé de K, alors $(F, F \cap K')$ appartient à $\mathcal{Q}$.

(III) Si $K = K_1 \cup K_2$ où K_1 et K_2 sont fermés, et si K' est un sous-ensemble de K tel que $(K_1, K_1 \cap K')$ et $(K_2, K_2 \cap K')$ appartiennent à $\mathcal{Q}$, alors (K, K') appartient à $\mathcal{Q}$.

Un couple (X, X') où X est un rétracte absolu de voisinage, est dit $\mathcal{Q}$-*universel* si, pour tout couple (C, C') appartenant à $\mathcal{Q}$, toute fonction continue f de C dans X et tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X, il existe un Z-plongement g de C dans X qui est $\mathcal{U}$-proche de f et vérifie $g^{-1}(X') = C'$. Le couple (X, X') est dit *fortement* $\mathcal{Q}$-*universel* si, pour tout couple (C, C') appartenant à $\mathcal{Q}$, tout fermé D de C, toute fonction continue f de C dans X dont la restriction à D est un Z-plongement vérifiant $(f|D)^{-1}(X') = D \cap C'$ et tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X, il existe un Z-plongement g de C dans X qui est $\mathcal{U}$-proche de f et vérifie $g|D = f|D$ et $g^{-1}(X') = C'$. Si $X' = \emptyset$ et si $\mathcal{Q}$ est formée des couples $(C, \emptyset)$ où C appartient à une classe $\mathcal{K}$ d'espaces, nous retrouvons la notion d'espace (fortement) $\mathcal{K}$-universel de M. Bestvina et J. Mogilski [2]. Si $\mathcal{K}_1$ et $\mathcal{K}_2$ sont deux classes d'espaces et si $\mathcal{Q}$ est formée des couples (C_1, C_2) où C_i appartient à $\mathcal{K}_i$ pour $i = 1, 2$, nous retrouvons la notion de couple $(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$-universel introduite dans [4].

Les résultats de [2] concernant les espaces universels se généralisent immédiatement aux couples universels. Citons seulement le résultat suivant, qui correspond à la proposition 2.2 de [2] et se prouve par le même argument.

LEMME 1. *Soit $\mathcal{Q}$ une classe de couples vérifiant les conditions* (I) *à* (III), *ainsi que* (IV) *si (K, K') appartient à $\mathcal{Q}$ et si U est un ouvert de K, alors $(U, U \cap K')$ appartient à $\mathcal{Q}$. Soit (X, X') un couple où X est un rétracte absolu de voisinage dans lequel tout Z-ensemble est un Z-ensemble au sens fort. Si, pour tout ouvert U de X, le couple $(U, U \cap X')$ est $\mathcal{Q}$-universel, alors (X, X') est fortement $\mathcal{Q}$-universel.*

Soient M une ℓ^2-variété et $\mathcal{Q}$ une classe de couples vérifiant les conditions (I) à (III). Un couple (X, X') contenu dans M est dit $\mathcal{Q}$-*absorbant* s'il vérifie les conditions suivantes:

(1) $M \setminus X$ est localement homotopiquement négligeable dans M,

(2) $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, où chaque X_n est un Z-ensemble dans X et $(X_n, X_n \cap X')$ appartient à $\mathcal{Q}$ pour tout n,

(3) (X, X') est fortement $\mathcal{Q}$-universel.

LEMME 2. *Soient (X, X') et (Y, Y') deux couples $\mathcal{Q}$-absorbants dans une ℓ^2-variété M. Alors, pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de M, il existe un homéomorphisme de (X, X') sur (Y, Y') qui est $\mathcal{U}$-proche de l'inclusion $X \hookrightarrow M$.*

LEMME 3. *Supposons que ℓ^2 contienne un couple $\mathcal{Q}$-absorbant (Ω, Ω'). Alors, un couple (X, X') d'espaces métriques séparables est homéomorphe à*

(Ω, Ω') si, et seulement si, il vérifie

(1) *X est un rétracte absolu,*

(2) *$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ où X_n est un fermé tel que $(X_n, X_n \cap X')$ appartienne à $\mathcal{Q}$,*

(3) *(X, X') est fortement $\mathcal{Q}$-universel,*

(4) *X est réunion dénombrable de Z-ensembles au sens fort.*

Les lemmes 2 et 3 sont les analogues pour les couples des théorèmes 3.1 et 5.3 de [2], dont les démonstrations peuvent être appliquées, avec quelques modifications mineures, à leur vérification (ces modifications sont identiques à celles indiquées dans [4] pour la $(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$-universalité, donc ne seront pas répétées).

Nous noterons $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ (resp. $(\mathcal{M}, \mathcal{F}_\sigma)$) la classe des couples (M, F) où M est topologiquement complet et F est fermé (resp. un F_σ) dans M. Nous noterons $(\mathcal{M}, \mathcal{M})$ la classe des couples (M, M') où M et M' sont topologiquement complets.

Le théorème 2.1 de [5] entraîne que le résultat suivant caractérise le couple (ℓ^2, E) parmi les couples (X, Y) où X est homéomorphe à ℓ^2 et Y est $\mathcal{M}$-absorbant dans X.

THÉORÈME 3. *Le couple (ℓ^2, E) est fortement $(\mathcal{M}, \mathcal{M})$-universel.*

Ce théorème sera prouvé plus loin.

THÉORÈME 4. *Un couple (M, X), où M est homéomorphe à ℓ^2 et X $\mathcal{M}$-absorbant dans M, est homéomorphe à $(\ell^2 \times \ell^2, \ell^2 \times \Sigma)$ si, et seulement si, il vérifie*

(i) *X est un F_σ dans M,*

(ii) *(M, X) est fortement $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$-universel.*

Il est clair que $(\ell^2 \times \ell^2, \ell^2 \times \Sigma)$ vérifie (i); qu'il vérifie aussi (ii) sera prouvé plus loin. Pour voir que ces conditions caractérisent $(\ell^2 \times \ell^2, \ell^2 \times \Sigma)$, il suffit de remarquer que, si X et Y sont deux sous-ensembles $\mathcal{M}$-absorbants de ℓ^2 vérifiant (i) et (ii), la démonstration du théorème 2.1 de [5] s'applique pour prouver l'existence d'un homéomorphisme de (ℓ^2, X) sur (ℓ^2, Y).

Compte tenu du lemme 3, les deux théorèmes suivants caractérisent les couples (ℓ^1, E) et $(\ell^2 \times \ell^2 \times \Sigma, \ell^2 \times \Sigma \times \Sigma)$ respectivement.

THÉORÈME 5. *(ℓ^1, E) est $(\mathcal{M}, \mathcal{M})$-absorbant dans ℓ^2.*

THÉORÈME 6. *$(\ell^2 \times \ell^2 \times \Sigma, \ell^2 \times \Sigma \times \Sigma)$ est $(\mathcal{M}, \mathcal{F}_\sigma)$-absorbant dans $\ell^2 \times \ell^2 \times \ell^2$.*

3. Résultats auxiliaires. Nous prouverons dans cette section des lemmes nécessaires à la vérification des propriétés d'universalité forte dans les démonstrations des théorèmes.

Nous noterons $\|y\|$ la norme hilbertienne d'un élément y de ℓ^2 (ou $\ell^2\times\ell^2$, ou $\ell^2\times\ell^2\times\ell^2$). Si y appartient à ℓ^1, nous poserons $\|y\|_1=\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|$ et $\sigma(y)=\sum_{n=1}^{\infty}y_n$. Pour $n\ge 1$, nous noterons e_n le $n^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de ℓ^2. Pour $n\ge 0$, nous noterons π_n la fonction de ℓ^2 dans ℓ^2 définie par

$$\pi_n(y_1,\ldots,y_n,y_{n+1},y_{n+2},\ldots)=(0,\ldots,0,y_{n+1},y_{n+2},\ldots)\,.$$

LEMME 4. *Soient X un espace métrique et G un sous-ensemble de X de type G_δ. Il existe une fonction $\xi:X\to\ell^1$, continue pour la topologie de ℓ^2, et vérifiant*

(i) $\xi^{-1}(E)=G$,
(ii) $\|\xi(x)\|_1\le 1$, $\forall x\in X$.

Démonstration. Supposons la distance d de X bornée par 1.

Soient d'abord G_0 un ouvert de X et $F_0=X\backslash G_0$. Pour $p\ge 1$, définissons l'élément $u^p=(u_n^p)$ de ℓ^2 par

$$u_n^p=\begin{cases}1/p & \text{si } 1\le n\le p,\\ 0 & \text{si } n>p.\end{cases}$$

Définissons une fonction $\varphi:[1,\infty]\to\ell^2$ par

$$\begin{aligned}\varphi(\infty)&=0\,,\\ \varphi(p)&=u^p\,,\\ \varphi(p+t)&=(1-t)u^p+tu^{p+1},\qquad p\ge 1,\ 0\le t\le 1\,.\end{aligned}$$

Puisque $\|u^p\|=1/\sqrt{p}$, il est clair que φ est continue. De plus, pour tout $t\in[1,\infty]$, $\varphi(t)$ est dans ℓ^1, $\sigma(\varphi(t))=1$ si $t\ne\infty$ et $\sigma(\varphi(\infty))=0$. Définissons alors $\chi:X\to\ell^2$ par

$$\chi(x)=e_1-\varphi((d(x,F_0))^{-1})\,,$$

ce qui a un sens puisque d est bornée par 1. Alors, $\chi(X)$ est contenu dans ℓ^1, $\chi^{-1}(E)=X\setminus F_0$ et $\sigma(\chi(x))=1$ si $x\in F_0$. De plus, pour tout x dans X, $\|\chi(x)\|_1\le 2$.

Soit $X\setminus G=\bigcup_{p=1}^{\infty}F_p$, où les F_p sont fermés. D'après ce qui précède, nous pouvons trouver, pour tout p, une fonction χ^p de X dans ℓ^1, continue pour la topologie de ℓ^2 et vérifiant

(1) $(\chi^p)^{-1}(E)=X\setminus F_p$ et $\sigma(\chi^p(x))>0$ si $x\in F_p$,
(2) $\|\chi^p(x)\|\le\|\chi^p(x)\|_1\le 2^{-p}$, $\forall x\in X$.

Définissons alors $\xi:X\to\ell^2$ par $\xi(x)=\sum_{p=1}^{\infty}\chi^p(x)$. La condition (2) garantit que $\xi(x)$ appartient à ℓ^1 et que ξ est continue pour la topologie de ℓ^2. En outre, $\sigma(\xi(x))=\sum_{p=1}^{\infty}\sigma(\chi^p(x))$. D'après (1), $\sigma(\xi(x))=0$ si, et seulement si, $\sigma(\chi^p(x)) = 0$ pour tout p, ce qui équivaut à $x \notin \bigcup_{p=1}^{\infty} F_p$, d'où la relation $\xi^{-1}(E) = G$.

LEMME 5. *Soit X un espace topologiquement complet. Il existe une fonction $\varphi : X \to E$ vérifiant*

(i) $\|\varphi(x)\| \le 1$, $\forall x \in X$,
(ii) $\forall n \ge 0$, $\pi_n \circ \varphi$ *est un plongement fermé de X dans ℓ^2.*

Démonstration. Supposons X plongé dans Q de façon que, pour tout N, la restriction à X de la projection de Q sur $\prod_{n=N}^{\infty} I_n$ soit injective. Soit $Q \setminus X = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$, où H_n est fermé dans Q et $H_n \subset H_{n+1}$ pour tout n. Pour x dans Q et $n \ge 1$, posons $\varrho_n(x) = \min(1, d(x, H_n))$. Soit $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de nombres > 0 telle que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \sum_{n=1}^{\infty} a_n \le 1/3$. Soit $\mathcal{N} = N_0 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ une partition de $\mathcal{N}$ en sous-ensembles infinis; soit $\{i_1, i_2, \ldots\}$ une énumération de N_0.

Pour $n \ge 1$, prenons un plongement fermé $\alpha^n = (\alpha_m^n)$ de $\mathcal{R}^+$ dans ℓ^2, d'image contenue dans E, vérifiant, pour tout $t \in \mathcal{R}^+$, $\alpha_m^n(t) = 0$ si $m \notin N_n$, $\|\alpha^n(t)\|_1 \le a_n$. On peut, par exemple, construire α^n comme suit: soit $\{j_k\}_{k=0}^{\infty}$ une énumération de N_n; pour k entier ≥ 0 et $0 \le t \le 1$, posons

$$\alpha^n(k+t) = \frac{a_n}{2}[(1-t)(e_{j_{2k}} - e_{j_{2k+1}}) + t(e_{j_{2k+2}} - e_{j_{2k+3}})] .$$

On vérifie sans peine que α^n est le plongement cherché.

Pour $x = (x_n) \in X \subset Q$, définissons $\varphi(x) = (\varphi_m(x))$ par

$$\varphi_m(x) = \begin{cases} x_k a_k & \text{si } m = i_{2k-1}, \\ -x_k a_k & \text{si } m = i_{2k}, \\ \alpha_m^k((\varrho_k(x))^{-1}) & \text{si } m \in N_k, \end{cases} \qquad k \ge 1 .$$

Alors,

$$\|\varphi(x)\|_1 = 2\sum_{k=1}^{\infty} |x_k a_k| + \sum_{k=1}^{\infty} \|\alpha^k\|_1 \le 3\sum_{k=1}^{\infty} a_k \le 1 .$$

De plus, il est clair que $\varphi(x)$ appartient à E et que φ est continue pour la topologie de ℓ^2. Soit $N \ge 1$. Si x, x' sont deux points de X tels que $\pi_N \circ \varphi(x) = \pi_N \circ \varphi(x')$, alors, pour tout k assez grand, $x_k a_k = \varphi_{i_{2k-1}}(x) = \varphi_{i_{2k-1}}(x') = x'_k a_k$, d'où $x_k = x'_k$ pour k assez grand. D'après l'hypothèse faite sur le plongement de X dans Q, cela entraîne $x = x'$, donc $\pi_N \circ \varphi$ est injective.

Puisque $\pi_N \circ \varphi$ est injective, pour montrer que c'est un plongement fermé dans ℓ^2, il suffit de vérifier que si $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ est une suite de points telle que $\{\pi_N \circ \varphi(x_i)\}$ converge dans ℓ^2, alors $\{x_i\}$ a une sous-suite qui converge dans X. Nous pouvons supposer que $\{x_i\}$ converge vers un point x_0 de Q; alors, pour tout k, $\{\varrho_k(x_i)\}$ tend vers $\varrho_k(x_0)$. Soit k_0 tel que $N_k \cap \{1, \ldots, N\} = \emptyset$ pour $k \ge k_0$. Alors, pour $k \ge k_0$, $\alpha^k((\varrho_k(x_i))^{-1})$

est la projection orthogonale de $\varphi(x_i)$ sur le sous-espace de base $\{e_n \mid n \in N_k\}$, donc $\{\alpha^k((\varrho_k(x_i))^{-1})\}$ converge dans ℓ^2; puisque α^k est un plongement fermé de $\mathcal{R}^+$ dans ℓ^2, cela entraîne que $\{(\varrho_k(x_i))^{-1}\}$ a une limite finie, donc que $\varrho_k(x_0) \neq 0$ pour $k \geq k_0$. Par suite, $x_0 \notin H_k$ pour $k \geq k_0$, donc $x_0 \in X$.

LEMME 6. *Il existe une homotopie* $\Phi = (\Phi_p) : \ell^2 \times I \to \ell^2$ *vérifiant*

(i) $\Phi(\cdot, 0) = \mathrm{id}$,

(ii) $\Phi(\ell^2 \times]0, 1]) \subset E$,

(iii) *pour* y *dans* ℓ^2 *et* $t > 0$, $\Phi_p(y, t) = 0$ *si* $p > (1/t + 1)(1/t + 2) + 5$,

(iv) *si* $\{(y(i), \delta_i)\}_{i=1}^{\infty}$ *est une suite de points de* $\ell^2 \times I$ *telle que la suite* $\{\Phi(y(i), \delta_i)\}_{i=1}^{\infty}$ *converge vers un élément* y *de* ℓ^2 *et que la suite* $\{\delta_i\}$ *tende vers* 0, *alors la suite* $\{y(i)\}$ *converge aussi vers* y.

Démonstration. Définissons Φ par

$$\Phi(y, 0) = y\,,$$

$$\Phi_p\left(y, \frac{1}{n}\right) = \begin{cases} y_p & \text{si } p \leq n\,, \\ 0 & \text{si } p = n+1, n+3, n+5 \text{ ou si } p > n(n+1)+5\,, \\ \Big(\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} |y_k|^2\Big)^{1/2} & \text{si } p = n+2 \\ -\Big(\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} |y_k|^2\Big)^{1/2} & \text{si } p = n+4 \\ -y_j/n & \text{si } p = nj + k + 5, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq n\,, \end{cases} \qquad (p \geq 1)\,,$$

$$\Phi\left(y, s\frac{1}{n} + (1-s)\frac{1}{n+1}\right) = s\Phi\left(y, \frac{1}{n}\right) + (1-s)\Phi\left(y, \frac{1}{n+1}\right), \qquad 0 \leq s \leq 1\,.$$

Evidemment, Φ vérifie (i) et (ii). Si $1/(n+1) \leq t \leq 1/n$, $\Phi_p(y, t) = 0$ pour $p > (n+1)(n+2) + 5$, d'où (iii). Il est facile de vérifier que Φ est continue sur $\ell^2 \times]0, 1]$. Pour vérifier sa continuité en un point de $\ell^2 \times \{0\}$, faisons quelques calculs préliminaires.

Notant $y^n = (y_1, \ldots, y_n, 0, 0, \ldots)$, nous avons $y - \Phi(y, 1/n) = y - y^n - (\Phi(y, 1/n) - y^n)$, d'où

$$\begin{aligned} \|y - \Phi(y, 1/n)\|^2 &\leq 2\|y - y^n\|^2 + 2\|\Phi(y, 1/n) - y^n\|^2 \\ &= 2\sum_{k=n+1}^{\infty} |y_k|^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{n} n\frac{|y_k|^2}{n^2} + 2\sum_{k=n+1}^{\infty} |y_k|^2\right) \\ &\leq \frac{2}{n}\|y\|^2 + 6\sum_{k=n+1}^{\infty} |y_k|^2\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Soit alors $\{(y(i), t_i)\}$ une suite d'éléments de $\ell^2 \times]0,1]$ convergeant vers $(y,0)$, et soit

$$t_i = s_i \frac{1}{n_i} + (1-s_i)\frac{1}{n_i+1}\,,$$

où $0 \le s_i \le 1$. Alors, pour tout n,

$$\begin{aligned}\|y - \Phi(y(i),1/n)\|^2 &\le 2\|y-y(i)\|^2 + 2\|y(i) - \Phi(y(i),1/n)\|^2 \\ &\le 2\|y-y(i)\|^2 + \frac{4}{n}\|y(i)\|^2 + 12\sum_{k=1}^{\infty}|y_k(i)|^2\,.\end{aligned}$$

Puisque $\{y(i)\}$ tend vers y, il y a un M tel que $\|y(i)\|^2 \le M$ pour tout i. De plus, $|y_k(i)|^2 \le 2|y_k(i) - y_k|^2 + 2|y_k|^2$, d'où

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}|y_k(i)|^2 \le 2\|y-y(i)\|^2 + 2\sum_{k=n+1}^{\infty}|y_k|^2\,.$$

Nous obtenons enfin

$$\|y - \Phi(y(i),1/n)\|^2 \le 26\|y-y(i)\|^2 + \frac{4}{n}M + 24\sum_{k=n+1}^{\infty}|y_k|^2\,.$$

Appliquant cette inégalité à $n = n_i$ et $n = n_i+1$, nous constatons, puisque n_i tend vers l'infini, que $\Phi(y(i),t_i) = s_i\Phi(y(i),1/n_i) + (1-s_i)\Phi(y(i),1/(n_i+1))$ tend vers y quand i tend vers l'infini, d'où la continuité de Φ en $(y,0)$.

Soit maintenant $\{(y(i),\delta_i)\}_{i=1}^{\infty}$ une suite de points de $\ell^2\times]0,1]$ telle que la suite $\{\Phi(y(i),\delta_i)\}$ converge vers un élément y de ℓ^2 et que la suite $\{\delta_i\}$ tende vers 0. Soit

$$\delta_i = s_i\frac{1}{n_i} + (1-s_i)\frac{1}{n_i+1}$$

où $0 \le s_i \le 1$ et $n_i \to \infty$. Nous avons

$$\begin{aligned}\|y-y(i)\|^2 &\le \sum_{k=1}^{n_i}|y_k - y_k(i)|^2 + 2\sum_{k=n_i+1}^{\infty}|y_k|^2 + 2\sum_{k=n_i+1}^{\infty}|y_k(i)|^2 \\ &\le \|y - \Phi(y(i),\delta_i)\|^2 + 2\sum_{k=n_i+1}^{\infty}|y_k|^2 + 2\sum_{k=n_i+1}^{\infty}|y_k(i)|^2\,.\end{aligned}$$

Les deux premiers termes de cette majoration tendent vers 0. Pour vérifier (iv), il reste donc à montrer que le troisième en fait autant. Pour majorer ce terme, distinguons deux cas:

(a) $s_i \ge 1/2$. La coordonnée d'indice n_i+2 nous donne alors

$$\|y - \Phi(y(i),\delta_i)\| \ge \Big|y_{n_i+2} - s_i\Big(\sum_{k=n_i+1}^{\infty}|y_k(i)|^2\Big)^{1/2}\Big|\,,$$

d'où

$$\sum_{k=n_i+1}^{\infty} |y_k(i)|^2 \leq \frac{1}{s_i^2}[\|y - \Phi(y(i),\delta_i)\| + |y_{n_i+2}|]^2$$
$$\leq 4[\|y - \Phi(y(i),\delta_i)\| + |y_{n_i+2}|]^2 \,.$$

Cette majoration tend vers 0 quand i tend vers l'infini.

(b) $s_i \leq 1/2$. La coordonnée d'indice $n_i + 1$ nous donne alors

$$\|y - \Phi(y(i),\delta_i)\| \geq |y_{n_i+1} - (1 - s_i)y_{n_i+1}(i)| \,,$$

d'où

$$|y_{n_i+1}(i)| \leq \frac{1}{1 - s_i}[\|y - \Phi(y(i),\delta_i)\| + |y_{n_i+1}|]$$
$$\leq 2[\|y - \Phi(y(i),\delta_i)\| + |y_{n_i+1}|] \,.$$

La coordonnée d'indice $n_i + 3$ nous donne alors

$$\|y - \Phi(y(i),\delta_i)\| \leq \Big| y_{n_i+3} - (1 - s_i)\Big(\sum_{k=n_i+2}^{\infty} |y_k|^2\Big)^{1/2}\Big| \,,$$

d'où, comme dans (a),

$$\sum_{k=n_i+2}^{\infty} |y_k|^2 \leq 4[\|y - \Phi(y(i),\delta_i)\| + |y_{n_i+3}|]^2 \,.$$

Finalement, nous avons

$$\sum_{k=n_i+1}^{\infty} |y_k|^2 \leq 4([\|y - \Phi(y(i),\delta_i)\| + |y_{n_i+1}|]^2 + [\|y - \Phi(y(i),\delta_i)\| + |y_{n_i+3}|]^2) \,.$$

Cette dernière majoration tend encore vers 0. Ceci achève de prouver la condition (iv).

Lemme 7. *Soient X un espace métrique et F un sous-ensemble de X du type F_σ. Il existe une fonction continue $\xi : X \to \ell^2$ vérifiant*

(i) $\xi^{-1}(\Sigma) = F$,
(ii) $\|\xi(x)\| \leq 1$, $\forall x \in X$.

Démonstration. Notant B la boule unité de ℓ^2, ce lemme résulte de la *démonstration* du lemme 5.4 de [6], appliquée au couple $(B, B \cap \Sigma)$ (cette démonstration prouve en fait que si $(\widetilde{Y}, Y)$ est un couple de rétractes absolus tel que $\widetilde{Y}$ soit complet, que $\widetilde{Y} \setminus Y$ soit localement homotopiquement négligeable dans $\widetilde{Y}$ et que Y soit réunion dénombrable de Z-ensembles, alors il existe une fonction continue $f : X \to \widetilde{Y}$ telle que $f^{-1}(Y) = F$).

Lemme 8. *Soit X un espace topologiquement complet. Il existe une fonction $\varphi : X \to \ell^2$ vérifiant*

(i) $\|\varphi(x)\| \le 1$, $\forall x \in X$,

(ii) $\forall n > 0$, $\pi_n \circ \varphi$ *est un plongement fermé de* X *dans* ℓ^2.

Démonstration. Soit $\alpha = (\alpha_n)$ un plongement fermé de X dans la sphère unité de ℓ^2 (voir [1], p. 193). Soit $\mathcal{N} = \bigcup_{m=1}^{\infty} N_m$ une partition de $\mathcal{N}$ en sous-ensembles infinis. Pour $m \ge 1$, soit $\{i_k^m\}_{k=1}^{\infty}$ une énumération de N_m. Il est facile de vérifier que la fonction $\varphi = (\varphi_n)$ définie par

$$\varphi_n(x) = 2^{-m}\alpha_k(x) \qquad \text{pour } n = i_k^m,\ m, k \ge 1\,,$$

a les propriétés souhaitées.

4. Démonstration des théorèmes

Démonstration du théorème 3. D'après le lemme 1, il suffit de montrer que, pour tout ouvert U de ℓ^2, le couple $(U, U \cap E)$ est $(\mathcal{M}, \mathcal{M})$-universel. Soient (X, F) un couple d'espaces topologiquement complets, $f : X \to U$ une fonction continue et $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de U. Prenons une fonction continue $\omega : U \to]0, 1]$ vérifiant

(1) Quels que soient y dans U et z dans ℓ^2, si $\|y - z\| < 2\omega(y)$, il y a un élément de $\mathcal{U}$ contenant à la fois y et z.

Soit Φ la déformation du lemme 6. Prenons une fonction continue $\varepsilon : U \to]0, 1]$ vérifiant

$$\|y - \Phi(y, \varepsilon(y))\| < \omega(y) \qquad \forall y \in U\,, \tag{2}$$

$$\varepsilon(y) < \omega(y) \qquad \forall y \in U\,. \tag{3}$$

Le lemme 4 nous permet de trouver une fonction continue $\xi = (\xi_n)$ de X dans $\ell^1 \subset \ell^2$ vérifiant

$$\xi^{-1}(E) = F\,, \tag{4}$$

$$\|\xi(x)\| \le 1/\sqrt{3} \qquad \forall x \in X\,. \tag{5}$$

Soit $\varphi = (\varphi_n)$ la fonction du lemme 5. Fixons un élément (a_n) de E tel que $a_n \ne 0$ pour tout n et que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \le 1/3\,. \tag{6}$$

Définissons une fonction continue $\psi : X \to \ell^2$ par

$$\left.\begin{aligned} \psi_{3n}(x) &= \xi_n(x)\,, \\ \psi_{3n+1}(x) &= \frac{1}{\sqrt{3}}\varphi_n(x)\,, \\ \psi_{3n+2}(x) &= a_n\,, \end{aligned}\right\} \qquad n \ge 1\,.$$

D'après (5), (6) et le fait que $\|\varphi(x)\| \le 1$, nous avons

$$\|\psi(x)\| \le 1 \quad \forall x \in X\,. \tag{7}$$

Posant $\varepsilon(x) = \varepsilon(f(x))$, définissons alors $g : X \to \ell^2$ par

$$g(x) = \Phi(f(x), \varepsilon(x)) + \varepsilon(x)\psi(x)\,.$$

D'après (2), (3) et (7), $\|f(x) - g(x)\| < 2\omega(f(x))$. D'après (1), il y a un élément de $\mathcal{U}$ contenant à la fois $f(x)$ et $g(x)$; en particulier, g est à valeurs dans U.

Puisque $\Phi(\ell^2 \times]0,1]) \subset E$, $g(x)$ appartient à E si, et seulement si, $\psi(x)$ est dedans. Puisque (a_n) et $\varphi(x)$ appartiennent à E, ceci est le cas si, et seulement si, $\xi(x) \in E$, i.e. $x \in F$ d'après (4).

Soient x, x' deux points de X tels que $g(x) = g(x')$. D'après la propriété (iii) de Φ, nous avons, pour tout n assez grand, $g_n(x) = \varepsilon(x)\psi_n(x)$ et $g_n(x') = \varepsilon(x')\psi_n(x')$. Puisque $g_n(x) = g_n(x')$ pour tout n, nous en déduisons que, pour n assez grand, $\varepsilon(x)a_n = \varepsilon(x')a_n$, d'où $\varepsilon(x) = \varepsilon(x')$, et $\varepsilon(x)\varphi_n(x)/\sqrt{3} = \varepsilon(x')\varphi_n(x')/\sqrt{3}$, d'où $\varphi_n(x) = \varphi_n(x')$ pour presque tout n. D'après la propriété (ii) de φ, $x = x'$.

Puisque g est injective, pour montrer que c'est un plongement fermé dans U, il suffit de prouver que, si $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ est une suite de points de X telle que $\{g(x_i)\}$ converge vers un point y de U, alors $\{x_i\}$ a une sous-suite qui converge dans X. Posant $\varepsilon_i = \varepsilon(x_i)$, nous pouvons supposer que $\{\varepsilon_i\}$ tend vers $\varepsilon_0 \in [0,1]$. Alors $\varepsilon_0 \ne 0$, car sinon $\{\Phi(f(x_i), \varepsilon_i)\}$ tend aussi vers y, et il en est de même de $\{f(x_i)\}$ d'après la propriété (iv) de Φ; ε étant continue, $\{\varepsilon_i\}$ tend vers $\varepsilon(y) > 0$, une contradiction.

Soit $N_0 > (1/\varepsilon_0 + 1)(1/\varepsilon_0 + 2) + 5$. Nous pouvons supposer que $N_0 > (1/\varepsilon_i + 1)(1/\varepsilon_i + 2) + 5$ pour tout i. D'après la propriété (iii) de Φ, si $3n + 1 \ge N_0$, $g_{3n+1}(x_i) = \varepsilon_i\psi_{3n+1}(x_i) = \varepsilon_i\varphi_n(x_i)/\sqrt{3}$, donc, si N est tel que $3N + 1 \ge N_0$, $\{\pi_N \circ \varphi(x_i)\}$ converge vers l'élément $((\sqrt{3}/\varepsilon_0)y_{3n+1})_{n=N}^{\infty}$ de ℓ^2. D'après la propriété (ii) de φ, $\{x_i\}$ converge dans X.

Pour voir que $g(X)$ est un Z-ensemble dans U, il suffit de remarquer que $g(X) \cap \Phi(\ell^2 \times]0,1]) = \emptyset$. Ceci résulte de la propriété (iii) de Φ car, si x est un point de X et si n est assez grand, $g_{3n+2}(x) = \varepsilon(x)\psi_{3n+2}(x) = \varepsilon(x)a_n \ne 0$.

LEMME 9. (a) *$\ell^2 \setminus \ell^1$, $\ell^2 \setminus E$ et $(\ell^2 \setminus \ell^1) \cup E$ sont localement homotopiquement négligeables dans ℓ^2.*

(b) *$(\ell^2 \times \ell^2 \times \ell^2 \setminus \ell^2 \times \ell^2 \times \Sigma) \cup (\ell^2 \times \Sigma \times \Sigma)$ est localement homotopiquement négligeable dans $\ell^2 \times \ell^2 \times \ell^2$.*

Démonstration. Il est connu que, si F est un sous-espace vectoriel partout dense d'un espace normé E, alors $E \setminus F$ est localement homotopiquement négligeable dans E (voir [8], théorème 2.3). Soit alors G un sous-espace vectoriel de E contenant proprement F. Si φ est une déformation instantanée de E en F et y un élément de $G \setminus F$, la fonction $\psi : E \times I \to E$ définie par $\psi(x,t) = \varphi(x,t) + ty$ est une déformation instantanée de E en $G \setminus F$, donc $(E \setminus G) \cup F$ est localement homotopiquement négligeable dans E. Le lemme en résulte.

Fin de la démonstration du théorème 1. Nous avons vu que $\ell^2 \setminus E$ est localement homotopiquement négligeable dans ℓ^2. Alors, le théorème 3 et le lemme 2.4 de [5] entraînent que E est fortement $\mathcal{M}$-universel. Comme E est l'intersection d'un G_δ et d'un F_σ dans ℓ^2, il est réunion dénombrable d'espaces topologiquement complets; il ne reste donc plus qu'à vérifier que E est réunion dénombrable de Z-ensembles. Compte tenu du lemme 2.6 de [3], cela découle du

LEMME 10. *ℓ^1 est réunion dénombrable de Z-ensembles de ℓ^2.*

Démonstration. Pour $p \geq 1$, soit $Z_p = \{(x_n) \in \ell^2 \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \leq p\}$. Il est facile de voir que Z_p est fermé dans ℓ^2; puisque Z_p est contenu dans ℓ^1, qui est localement homotopiquement négligeable dans ℓ^2, c'est un Z-ensemble dans ℓ^2, d'où le lemme puisque $\ell^1 = \bigcup_{p=1}^{\infty} Z_p$.

Démonstration du théorème 5. Notons que E est un G_δ dans ℓ^1, car c'est l'ensemble $\sigma^{-1}(0)$, où la fonction $\sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ est limite de fonctions continues, donc de première classe de Baire. Puisque ℓ^1 est réunion dénombrable d'espaces complets, (ℓ^1, E) vérifie la condition (2) de la définition d'un couple $(\mathcal{M},\mathcal{M})$-absorbant. Il ne reste plus qu'à vérifier la $(\mathcal{M},\mathcal{M})$-universalité forte de (ℓ^1, E), et il suffit pour cela de répéter la démonstration du théorème 3 puisque les fonctions ξ et φ qui y sont utilisées sont à valeurs dans ℓ^1.

Remarquons que le théorème 5 entraîne que ℓ^1 est $\mathcal{M}$-absorbant dans ℓ^2, donc homéomorphe à $\ell^2 \times \Sigma$.

Fin de la démonstration du théorème 4. Il reste à prouver que $(\ell^2 \times \ell^2, \ell^2 \times \Sigma)$ vérifie la condition (ii). Nous avons en fait un résultat plus fort:

LEMME 11. *$(\ell^2 \times \ell^2, \ell^2 \times \Sigma)$ est fortement $(\mathcal{M},\mathcal{F}_\sigma)$-universel.*

Démonstration. La démonstration du lemme 3 s'applique sans changement si nous identifions $\ell^2 \times \Sigma$ à l'ensemble des éléments (x_n) de ℓ^2 vérifiant $\sum_{n=1}^{\infty}(nx_{3n})^2 < \infty$ et si les fonctions ξ et φ utilisées sont données par les lemmes 7 et 8.

Démonstration du théorème 6. La seule condition non évidente à vérifier est la $(\mathcal{M},\mathcal{F}_\sigma)$-universalité forte du couple $(\ell^2 \times \ell^2 \times \Sigma, \ell^2 \times \Sigma \times \Sigma)$; elle se prouve comme le lemme 11.

Fin de la démonstration du théorème 2. Il nous reste seulement à vérifier que $\ell^1 \setminus E$ et $\ell^2 \times \ell^2 \times \Sigma \setminus \ell^2 \times \Sigma \times \Sigma$ sont homéomorphes à $\ell^2 \times \Sigma$, ce que nous ferons en montrant qu'ils sont $\mathcal{M}$-absorbants dans ℓ^2 et $\ell^2 \times \ell^2 \times \ell^2$ respectivement.

D'après le lemme 9, $\ell^2 \setminus (\ell^1 \setminus E)$ (resp. $\ell^2 \times \ell^2 \times \ell^2 \setminus (\ell^2 \times \ell^2 \times \Sigma \setminus \ell^2 \times \Sigma \times \Sigma)$) est localement homotopiquement négligeable dans ℓ^2 (resp. $\ell^2 \times \ell^2 \times \ell^2$). Puisque ℓ^1 (resp. $\ell^2 \times \Sigma$) est réunion dénombrable de Z-ensembles (au sens fort), il en est de même de $\ell^1 \setminus E$ (resp. $\ell^2 \times \ell^2 \times \Sigma \setminus \ell^2 \times \Sigma \times \Sigma$) d'après le lemme 2.6 de [3].

Comme $\ell^2 \times \Sigma \times \Sigma$ est un F_σ dans $\ell^2 \times \ell^2 \times \Sigma$, qui est réunion dénombrable d'espaces complets, $\ell^2 \times \ell^2 \times \Sigma \setminus \ell^2 \times \Sigma \times \Sigma$ est aussi réunion dénombrable d'espaces topologiquement complets.

Comme E est un G_δ dans ℓ^1, $\ell^1 \setminus E$ est un F_σ dans ℓ^1, qui est réunion dénombrable d'espaces complets, donc $\ell^1 \setminus E$ est réunion dénombrable d'espaces complets.

Enfin, la $\mathcal{M}$-universalité forte de $\ell^1 \setminus E$ (resp. $\ell^2 \times \ell^2 \times \Sigma \setminus \ell^2 \times \Sigma \times \Sigma$) résulte de la $(\mathcal{M}, \mathcal{M})$-universalité forte (resp. $(\mathcal{M}, \mathcal{F}_\sigma)$-universalité forte) du couple (ℓ^1, E) (resp. $(\ell^2 \times \ell^2 \times \Sigma, \ell^2 \times \Sigma \times \Sigma)$), appliquée aux couples de la forme $(X, \emptyset)$ où $X \in \mathcal{M}$.

Bibliographie

[1] C. Bessaga and A. Pełczyński, *Selected Topics in Infinite-Dimensional Topology*, PWN, Warszawa 1975.

[2] M. Bestvina and J. Mogilski, *Characterizing certain incomplete infinite-dimensional absolute retracts*, Michigan Math. J. 33 (1986), 291–313.

[3] R. Cauty, *Caractérisation topologique de l'espace des fonctions dérivables*, Fund. Math., à paraître.

[4] —, *Les fonctions continues et les fonctions intégrables au sens de Riemann comme sous-espaces de $\mathcal{L}^1$*, ibid., à paraître.

[5] —, *Sur deux espaces de fonctions non dérivables*, prépublication, 1990.

[6] T. Dobrowolski, W. Marciszewski and J. Mogilski, *On topological classification of function spaces C_pX of low Borel complexity*, preprint, 1989.

[7] S. Mazur und L. Sternbach, *Über die Borelschen Typen von linearen Mengen*, Studia Math. 4 (1933), 48–53.

[8] H. Toruńczyk, *Concerning locally homotopy negligible sets and characterization of l_2-manifolds*, Fund. Math. 101 (1978), 93–110.

[9] —, *Absolute retracts as factors of normed linear spaces*, ibid. 86 (1974), 53–67.

22 RUE JOUVENET
75016 PARIS, FRANCE

Received 1 October 1990