Remarques concernant les types de dimensions.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

La lecture des chapîtres consacrés aux types de dimensions du livre de M. Fréchet récemment paru [1]) m'a suggeré quelques remarques et problèmes que j'expose dans cette Note.

Bornons-nous, d'abord, aux ensembles linéaires.

Il est naturel de dire que le type de dimension dH est *le suivant* pour le type dE et que le type dE est *le précédent* pour le type dH, s'il n'existe aucun ensemble Q, tel que

$$dE < dQ < dH.$$

Tel est p. e. le cas, où E_0 désigne l'ensemble de tous les nombres de la forme $1/n$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$, et H_0 est formé par l'adjonction du point 0 à l'ensemble E_0, et où l'on pose $E=E_0$, $H=H_0$.

Il est à remarquer qu'*un type de dimensions peut admettre plusieurs types suivants (resp. précédents).*

Voici des exemples.

Soit E_1 l'ensemble formé des nombres $0, \frac{1}{n}$ et $2+\frac{1}{n} (n=1,2,3,\ldots)$, H_1 — l'ensemble formé par l'adjonction du nombre 2 à l'ensemble E_1, et H_2 — l'ensemble formé du nombre 0 et de tous les nombres de la forme

$$\frac{1}{2^m}+\frac{1}{2^{m+n}},$$

où m et n sont des nombres naturels.

[1]) M. Fréchet: *Les espaces abstraits* etc. Paris 1928.

On peut démontrer sans peine que chacun des types dH_1 et dH_2 est le suivant pour le type dE_1 et qu'on a $dH_1 \neq dH_2$.

Or, désignons par E_2 l'ensemble qu'on obtient de l'ensemble H_2 en supprimant le point 0. On voit sans peine que l'ensemble E_2 est homéomorphe à E_0 et que

$$dE_2 < dH_0 < dE_1 < dH_2.$$

Donc: *le type de dimensions d'un ensemble obtenu par l'adjonction d'un seul point à un ensemble donné, n'est pas nécessairement le suivant pour le type de ce dernier.* Par conséquent le type de dimensions qu'on obtient, en supprimant un seul point d'un ensemble donné, peut ne pas être le précédent pour le type de ce dernier.

D'autre part, désignons par H_3 l'ensemble qu'on obtient, en ajoutant à l'ensemble H_2 le point 1/2. On peut prouver sans peine que les types dH_1 et dH_2, que nous avons défini, sont des précédents pour le type dH_3.

Deux types de dimensions différents qui sont des suivants (resp. précédents) *d'un même type, ne sont jamais comparables.* En effet, si les types dQ_1 et dQ_2 sont des suivants pour le type dP, on a $dP < dQ_1$ et $dP < dQ_2$. Si dQ_1 et dQ_2 étaient différents et comparables, on aurait p. e. $dQ_1 < dQ_2$, donc $dP < dQ_1 < dQ_2$, contrairement à l'hypothèse que le type dQ_2 est le suivant pour le type dP. Pareillement on traîte le cas de deux types précédents.

Les types dH_1 et $dH_2 \neq dH_1$ sont des précédents pour le type dH_3: donc ils ne sont pas comparables.

Or,

$$dH_2 < dH_3 \quad \text{et} \quad dH_1 < dH_3.$$

Cela prouve que, si le type dP est le précédent pour le type dQ, l'inégalité

$$dE < dQ$$

n'entraîne pas nécessairement l'inégalité

$$dE \leqslant dP;$$

en d'autres mots: le précédent d'un type donné dQ peut ne pas être *le plus grand* de tous les types de dimensions $< dQ$.

Or, les types dH_1 et dH_2 sont des suivant pour le type dE_1 et on a

$$dE_1 < dH_1 \quad \text{et} \quad dE_1 < dH_2.$$

Cela prouve que si le type dQ est le suivant pour le type dP, l'inégalité

$$dP < dH$$

n'entraîne pas nécessairement l'inégalité

$$dQ \leqslant dH;$$

en d'autres mots: le suivant d'un type donné dP peut ne pas être *le plus petit* de tous les types de dimensions $> dP$.

Il existe des types de dimensions qui n'ont aucun précédent: tel est p. e. le type dE_0, le type de tous les nombres de la forme $m + \frac{1}{n}$, où m et n sont des nombres naturels. Tel est aussi le type de dimensions de l'ensemble R de tous les nombres rationnels. (En effet, si $dE < dR$, E ne peut contenir aucun ensemble dense en soi et parsuite est clairsemé, donc il existe un nombre ordinal $\alpha < \Omega$, tel que la dernière cohérence non-vide de E est d'ordre α. Or, il existe, comme on sait, des ensembles, dont la dernière cohérence non vide est d'ordre $\alpha + 1$, et chaque ensemble de ce genre a évidemment un type de dimensions $> dE$ et $< dR$). On peut aussi démontrer que le type de dimensions de l'ensemble de tous les nombres irrationnels n'a aucun précédent [1]).

En admettant l'hypothèse du continu ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$), on peut démontrer que le type dR n'a aucun suivant (Cela résulte immédiatement du théorème démontré par M. Kuratowski et moi [2]), d'après lequel il existe pour tout ensemble de puissance du continu un autre de même puissance, dont le type de dimensions est inférieur). Or, je ne sais pas prouver l'existence des types de dimensions d'ensembles linéaires n'ayant pas de suivants, sans admettre l'hypothèse du continu.

On dira que dH est *le plus petit* type de dimensions $> dE$, si $dE < dH$ et si l'inégalité

$$dE < dQ$$

entraîne (pour tout ensemble Q) l'inégalité

$$dH \leqslant dQ.$$

[1]) Cela résulte tout de suite du Theórème I que nous avons démontré avec M. Kuratowski, *Fund. Math.* t. VIII, p. 197.

[2]) *Fund. Math.* t. VIII, p. 200.

Il est évident que le plus petit type de dimensions $> dE$ (s'il existe) est le suivant pour dE. Or, la réciproque n'est pas vraie, comme nous avons remarqué plus haut (à propos des types dH_1 et dE_1).

On voit aussi sans peine que s'il existe le plus petit type de dimensions $> dE$, c'est le type suivant unique pour dE. Il en résulte p. e. qu'il n'existe pas le plus petit type de dimensions $> dE_1$ (dE_1 ayant deux types suivants: dH_1 et dH_2). Or, le problème se pose: si le type dE a son suivant unique dH, celui-ci est-il le plus petit type de dimensions $> dE$?

Des remarques analogues concernent les plus grands types de dimensions inférieurs à un type donné. (On dira que dE est le plus grand type de dimensions $< dH$, si $dE < dH$ et si l'inégalité $dQ < dH$ entraîne: $dQ \leqslant dE$).

On voit sans peine p. e. que dE_1 est le plus grand type de dimensions $< dH_2$. Or, dH_2 n'est pas le plus petit type de dimensions $> dE_1$. Donc: *si dE est le plus grand type de dimensions $< dH$, dH peut ne pas être le plus petit type de dimensions $> dE$.*

Un type de dimensions (d'un ensemble linéaire) peut être le plus petit $> dE$ dans l'espace linéaire, mais peut cesser de l'être dans le plan. P. e. le type dR_1 de l'ensemble de tous les nombres réels est, dans l'espace linéaire, le plus petit $> dN$, où N désigne l'ensemble de tous les nombres irrationnels. Or, il existe des ensembles plans E, tels qu'on a $dN < dE$, mais qu'on n'a pas $dR_1 \leqslant dE$: tels sont p. e. les continus plans de Janiszewski ne contenant aucun arc simple [1]), tels sont aussi les ensembles G_δ plans punctiformes qui ne sont pas homéomorphes à aucun ensemble lineaire [2]).

On démontre sans peine que l'inégalité

$$dE < dH_1$$

entraîne (pour tout ensemble E) l'inégalité

$$dE < dH_2$$

et inversement.

[1]) Voir p. e. B. Knaster: *Fund. Math.* t. III, p. 274.

[2]) S. Mazurkiewicz: *Fund. Math.* t. I, p. 61; aussi: C. Kuratowski et W. Sierpiński, *Fund. Math.* t. III, p. 306.

Or, le problème se pose: existe-t-il deux ensembles linéaires P_1 et P_2, tels que $dP_1 \neq dP_2$ et que l'inégalité

$$dP_1 < dH$$

entraîne (pour tout ensemble linéaire H) l'inégalité

$$dP_2 < dH,$$

et inversement.

Et, si c'est le cas, existe-t-il deux ensembles P_1 et P_2, tels que $dP_1 \neq dP_2$ et que les inégalités

$$dE < dP_1 < dH \quad \text{et} \quad dE < dP_2 < dH$$

soient équivalentes? [1]).

Voici encore un problème important non résolu:

Peut-on démontrer (sans utiliser l'hypothèse du continu) *que, des deux ensembles linéaires, celui dont la puissance est supériere a toujours le type de dimensions supérieur?* En d'autres termes, l'inégalité $\overline{\overline{E}} < \overline{\overline{H}}$ entraîne-t-elle toujours l'inégalité $dE < dH$?

[1]) Cf. *Fund. Math.*, t. XIII, p. 120; cf. aussi M. Fréchet, l. c., p. 31, note (¹).

Sur une généralisation du problème de la mesure.

Par

Stefan Banach et Casimir Kuratowski (Lwów).

M. Lebesgue a appelé *problème de la mesure* [1]) le problème suivant: définir une fonction $m(X)$ qui fasse correspondre à chaque ensemble X situé dans l'intervalle $E = 01$ un nombre réel $m(X) \geqslant 0$ de façon que:

I. Si X_1 et X_2 sont superposables, $m(X_1) = m(X_2)$.

II. $X_1, X_2, \ldots$ étant une suite finie ou infinie d'ensembles disjoints, on a: $m(X_1 + X_2 + \ldots) = m(X_1) + m(X_2) + \ldots$

III. $m(E) = 1$.

M. Vitali (en 1905) a prouvé que ce problème *n'admet pas de solution*.

Or, on peut chercher à résoudre ce problème, en imposant à la fonction $m(X)$ des conditions moins restrictives [2]). Dans cette note nous allons prouver, en admettant l'hypothèse du continu, que le problème *plus général* [3]) qui s'obtient de celui de la mesure en omettant la condition I et en y ajoutant la condition, que pour X composé d'un seul point $m(X) = 0$ (condition qui résulte évidemment de I et II), — *ne possède nonplus de solution*; nous allons

[1]) *Leçons sur l'intégration* (Coll. Borel), I-re éd. 1904, II-me 1928, p. 110.

[2]) Ainsi, si l'on remplace l'additivité complète (énoncée dans la cond. II) par l'additivité finie, le problème de mesure admet une solution (voir S. Banach, Fund. Math. IV); et cela reste encore vrai dans le cas où E est un carré, tandisqu'il n'en est rien, si E est un cube (voir F. Hausdorff: *Grundzüge der Mengenlehre,* Leipzig 1914, p. 469 et, dans le même ordre d'idées: S. Banach et Tarski, Fund. Math. VI et J. v. Neumann, Fund. Math. XIII).

[3]) Ce problème fut posé par M. Banach, qui l'a réduit aussi au théor. II. La démonstration du théor. II a été trouvée par les deux auteurs indépendamment et simultanément.