Au sujet de deux citations contenues dans un Mémoire précédent.

Par

Maurice Fréchet (Paris).

Sans avoir à modifier les propositions établies dans un mémoire précédent „Quelques propriétés des ensembles abstraits“ (Fund. Math. t. X, 1927, p. 328—355), je dois rectifier deux des citations que j'ai eu à y faire.

I.

A la page 330, je rappelai que M. Denjoy nomme *ensemble clairsemé* un ensemble qui n'est dense sur aucun ensemble parfait; cette citation reste exacte.

Mais j'expliquais que, d'après M. Denjoy, un ensemble E est dense sur un ensemble P si P est identique à l'ensemble dérivé H' de l'ensemble $H = P.E$ commun à P et E. Pour que cette définition soit conforme à la terminologie de M. Denjoy, il faut, en réalité, y intercaler le mot partout. Autrement dit, un ensemble tel que E sera dit *partout* dense sur P. Comme l'a fait observer M. Denjoy, cette définition implique d'ailleurs que P soit parfait dans le cas qu'il considère, celui d'ensembles cartésiens usuels. En effet $P = H'$ et puisque $H = P.E.$ $H' \subset P'$, d'où $P \subset P'$: P est dense en soi. D'autre part, si dans l'espace abstrait considéré tout ensemble dérivé est fermé: $P' = H'' \subset H' = P$ donc $P' \subset P$, P est fermé.

La définition des ensembles partout denses sur un ensemble P est due à M. Denjoy. Celui-ci emploie en outre deux définitions dues à M. Baire et que je formule pour le cas d'un espace topologique quelconque de façon qu'elles se réduisent aux définitions

de M. Baire dans le cas de l'espace cartésien usuel. D'après M. Denjoy, la notion première, fondamentale, est celle d'ensemble non dense sur un ensemble et celle d'ensemble dense sur un ensemble s'en déduit par opposition. Mais la forme de définition qui convient à un espace non cartésien s'exprime plus simplement quand on opère en sens inverse.

Un ensemble E est *dense sur un ensemble* P s'il existe au moins un point a de P et un voisinage V_a de a tels que l'ensemble K' dérivé de l'ensemble $K = E.P.V_a$ coïncide sur V_a avec P.

Dans le cas contraire, E est dit *non dense sur* P. Peut-être serait-il d'ailleurs préférable de dire dans le premier cas que E est dense *quelque part* sur P et, dans le second, que E n'est *nulle part* dense sur P?

La démonstration de l'alinéa 1º de la page 330 de mon mémoire peut être simplifiée comme suit:

1º Dans tout espace (V), un ensemble clairsemé au sens de Cantor est clairsemé au sens de Denjoy. En effet, soit C, un ensemble clairsemé au sens de Cantor; s'il était dense sur au moins un ensemble non vide P, il y aurait au moins un point a de P et un voisinage V_a de a tel que, K étant l'ensemble $C.P.V_a$, son dérivé K' coïncide sur V_a avec P. Par suite, K, qui appartient à P et V_a, appartiendrait à K'. Donc, K, qui appartient aussi à C, serait un sous-ensemble dense en soi de C. D'ailleurs, par hypothèse, a, qui appartient à P et V_a doit être un point d'accumulation de K. Donc K n'est pas vide. Ainsi C possèderait un sous-ensemble K non vide et dense en soi.

Remarquons en passant que la démonstration ci-dessus ne suppose pas P parfait.

La démonstration de l'alinéa 2º (page 330) restant inchangée les conclusions de la page 331 subsistent.

Il y a lieu cependant de changer l'exemple donné à la page 331 pour que la conclusion à en tirer subsiste quand on rectifie comme ci-dessus la définition des ensembles denses sur un ensemble donné.

Il n'est d'ailleurs pas nécessaire de chercher un exemple sans rapport avec le premier: la modification suivante *(qui m'a été signalée par M. Kunugui)* conduit au but cherché et consiste essentiellement à atribuer au collier un nombre infini de perles.

Soit donc un espace dont les éléments sont tous les nombres entiers $\ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots,$ et où chaque élément a a une infinité de voisinages $V_a^{(n)}$. On choisit pour $V_a^{(n)}$ l'ensemble des nombres

$$a, \quad a+1, \quad a+n+1, \quad a+n+2, \ldots$$
$$a-1, \quad a-n-1, \quad a-n-2, \ldots$$

L'exemple consiste dans l'ensemble E formé de deux nombres successifs, 1 et 2, par exemple. Il est dense en soi et par suite non clairsemé au sens de Cantor.

Un ensemble parfait non vide P ne peut être ici qu'identique à l'espace entier, c'est-à-dire à l'ensemble des entiers. Donc ici l'ensemble $H = P.E$ est identique à E. Soit a un entier quelconque et W_a l'un des voisinages de a. On aura

$$P.E.W_a \subset PE = E,$$

d'où

$$(P.E.W_a)' \subset E'.$$

Or ce dernier ensemble est formé des quatre nombres 0, 1, 2, 3. Alors $(P.E.W_a)'$ n'ayant qu'un nombre fini d'éléments ne peut coïncider, *même sur V_a seulement*, avec P qui a avec V_a un nombre infini d'éléments en commun.

Ceci étant vrai en choisissant arbitrairement a, V_a et P, l'ensemble E est non dense sur tout ensemble parfait P: il est clairsemé au sens de M. Denjoy.

Ainsi, notre conclusion subsiste: dans un espace (V) où les ensembles dérivés ne sont pas tous fermés, la définition des ensembles clairsemés due à Cantor est plus stricte que celle de M. Denjoy. Et même cela est vrai dans un espace (V) qui n'est pas le plus singulier qu'on puisse imaginer: il possède cette propriété importante que l'ensemble commun à deux voisinages $V_a^{(n)}$, $V_a^{(n+p)}$ d'un même élément a contient un voisinage de a — à savoir ici $V_a^{(n+p)}$.

II.

Dans le même mémoire cité plus haut, je montrais qu'une proposition établie par M. Alexandroff pour les espaces de Hausdorff peut être étendue à d'autres catégories d'espaces abstraits. Mais j'énonçais, en outre, pages 344, 346 et 348 que, dans le cas

même considéré par M. Alexandroff, non seulement la condition imposée par M. Alexandroff à ces espaces, d'être localement compacts, suffit pour rendre possible la solution de son problème, mais encore qu'elle est nécessaire. Je tiens à déclarer que ce dernier résultat que je croyais nouveau se trouvait *explicitement énoncé et démontré* dans le même mémoire de M. Alexandroff, où il m'avait d'abord échappé.