Sur une condition qui caractérise les continus indécomposables.

Par

Casimir Kuratowski (Lwów).

En m'appuyant sur les résultats de la Note précédente de M. Mazurkiewicz, je vais prouver le théorème suivant:

Pour qu'un continu borné C, situé sur le plan, soit indécomposable, il faut et il suffit que C soit non-dense et contienne un point qui n'est situé dans aucun vrai sous-continu de C qui soit accessible [1]).

1. La condition est **suffisante**. Soit:

$$C = A + B, \quad A \neq C \neq B$$

une décomposition du continu C en deux sous-continus.

Si C est non-dense, il existe des points accessibles dans A ainsi que dans B. Par conséquent, A et B sont des continus accessibles, ce qui entraîne évidemment que chaque point de C est situé dans un vrai sous-continu de C qui est accessible.

2. La **nécessité** résulte de l'énoncé suivant, qui généralise d'ailleurs le théorème de M. Mazurkiewicz [2]):

C étant un continu indécomposable plan et borné, ses vrais sous-continus accessibles constituent un ensemble de 1-re catégorie (dans C).

Pour établir cet énoncé, reprenons le raisonnement du N6 de la Note de M. Mazurkiewicz:

Soient: a un point de C, $\mathfrak{P}$ la somme de tous les vrais sous-continus de C qui contiennent ce point. S_n le cercle ouvert à rayon

[1]) En généralisant la notion de point accessible, on dit qu'un sous-ensemble X de C est accessible, lorsqu'il existe un continu L tel que $LC = X$ et $L - C \neq 0$.

[2]) Car un $\mathfrak{P}(x)$ peut contenir un continu accessible sans qu'il contienne des points accessibles.

$\frac{1}{n}$, décrit du point a, G_{ni} une région-composante du complémentaire de $C + \overline{S}_n$, F_{ni} la frontière de G_{ni}, Q_n la somme de tous les continus X tels que

$$(1) \qquad X \subset C - S_n \quad \text{et} \quad XF_{ni} \neq 0.$$

Soit enfin $Q = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n$.

D étant un continu accessible tel que

$$(2) \qquad \mathfrak{P} D = 0,$$

il existe un continu L tel que:

$$(3) \qquad LC = D$$

$$(4) \qquad L - C \neq 0.$$

Selon (2) et (3): $L\mathfrak{P} = LC\mathfrak{P} = 0$, donc, pour n suffisamment grand,

$$(5) \qquad L\overline{S}_n = 0,$$

d'où, en raison de (4): $L - (C + \overline{S}_n) \neq 0$. Il existe, par conséquent, un indice i tel que

$$(6) \qquad LG_{ni} \neq 0.$$

D'autre part

$$(7) \qquad L - G_{ni} \neq 0,$$

puisque, selon (3): $0 \neq D = LC \subset L - G_{ni}$.

Les inégalités (6) et (7) entraînent

$$(8) \qquad LF_{ni} \neq 0.$$

Or, $F_{ni} \subset C + \overline{S}_n$, donc, selon (5): $LF_{ni} \subset LC$, d'où, en vertu de (3) et (8), $DF_{ni} \neq 0$. Comme, en outre $D \subset C - S_n$ (selon (3) et (5)), on en conclut, conformément à (1), que $D \subset Q_n$.

On arrive ainsi à la conclusion que la somme de tous les vrais sous-continus accessibles est contenue dans $Q + \mathfrak{P}$. Ce dernier ensemble étant, comme le prouve M. Mazurkiewicz, de I-re catégorie, notre énoncé se trouve démontré.