is the sum of a countable number of arcs if and only if the end points of M are countable.

Remarks. The theorem (Cf. Menger, loc. cit.) that an acyclic continuous curve (Baumkurve) M is the sum of a countable number of arcs if and only if its end points are countable is a corollary to Theorem 1, because, obviously, no such curve can have any maximal cyclic curves. The theorem that a Baum im kleinen curve M is the sum of a countable number of arcs if and only if its end points are countable is a corollary to Theorem 2, because *every point of a Baum im kleinen curve is either an end point or an im kleinen cut point.*

University of Texas, Jan. 20, 1929.

Sur les points accessibles des continus indécomposables.

Par

Stefan Mazurkiewicz (Varsovie).

1. M. Kuratowski a posé le problème suivant

Existe-t-il dans tout continu indécomposable plan un ensemble $\mathfrak{P}$, qui ne contient aucun point accessible.

Un continu est *indécomposable*, s'il n'est pas la somme de deux continus différant de lui. Un ensemble est *un ensemble* $\mathfrak{P}$ d'un continu indécomposable C s'il est 1) sous-ensemble vrai de C, 2) semi-continu, 3) saturé par rapport aux propriétés 1) et 2) [1]. Un point z d'un ensemble plan A est *accessible*, s'il existe un arc simple J à extremité z tel que $A \times J = z$.

Je vais résoudre le problème cité par l'affirmative dans le cas du continu borné. Je vais démontrer à cet effet le théorème suivant:

Théorème. *C étant un continu indécomposable, plan et borné — l'ensemble somme des ensembles $\mathfrak{P}$ qui contiennent un point accessible est de première catégorie par rapport à C.*

2. Lemme. *Soit A un continu irréductible entre les points a_1, a_2, d'un espace métrique et compact, B, D deux sous-ensembles fermés de A, tels que:*

$$(2,1) \qquad a_1 + a_2 \subset D \qquad B - D \neq 0 \qquad B + D = A$$

[1] Le terme „ensemble $\mathfrak{P}$" ($\mathfrak{P}$-Menge) a été introduit par M. Kuratowski dans une publication récente (*Math. Ann.* 98, p. 399) pour remplacer le terme „composant" (utilisé par Janiszewski, Knaster, Kuratowski, Mazurkiewicz, *Fund. Math.* passim); ce dernier terme pouvant donner lieu à des confusions avec les „Komponenten" dans le sens de M. Hausdorff.

Cf. le terme „nerve" de M. L. E. J. Brouwer, Proceed. Amsterdam 14. (1911), p. 144.

x étant un point de $B-D$, σ un nombre positif, il existe un continu $M\subset B$, tel que 1) *$M\times D$ est non vide et non connexe,* 2) $\varrho(x, M)<\sigma$.

Démonstration. On peut supposer que $\sigma<\varrho(x, D)$. Désignons par $S(x, \sigma)$ l'intérieur de la sphère de centre x et de rayon σ. A est irréductible entre a_1 et a_2, donc c'est un $\mathfrak{K}(a_1, a_2)$ irréductible [2]) L'ensemble fermé $E=A-S(x, \sigma)$ est un sous-ensemble vrai de A, contenant a_1+a_2, donc ce n'est pas un $\mathfrak{K}(a_1, a_2)$ et il existe une décomposition de E en deux ensembles fermés, disjoints E_1, E_2, tels que $a_1\subset E_1$, $a_2\subset E_2$. On aura:

$$(2,2)\quad \begin{cases} D=D\times E=(D\times E_1)+(D\times E_2)=D_1+D_2; \\ a_1\subset D_1, \quad a_2\subset D_2 \end{cases}$$

D_1, D_2 sont fermés, disjoints. Posons:

$$(2,3)\qquad H_1=B\times D_1, \quad H_2=B\times D_2.$$

Supposons $H_1=0$; il en résulterait: $A=B+D=(B+D_2)+ +D_1$ et on aurait une décomposition de A en deux ensembles fermés, disjoints et non vides, ce qui est impossible. Donc

$$(2,4)\qquad H_1\neq 0, \quad H_2\neq 0, \quad H_1\times H_2=0$$

B est un $\mathfrak{K}(H_1, H_2)$: en effet dans le cas contraire on aurait:

$$(2,5)\quad \begin{cases} B=B_1+B_2; \quad H_1\subset B_1, \quad H_2\subset B_2, \quad B_1\times B_2=0, \\ B_1=\overline{B}_1, \quad B_2=\overline{B}_2 \end{cases}$$

$$(2,6)\quad A=(B_1+D_1)+(B_2+D_2) \qquad B_1+D_1\neq 0, \quad B_2+D_2\neq 0.$$

$$(2,7)\quad \begin{cases} (B_1+D_1)\times(B_2+D_2)=(B_1\times B_2)+(D_1\times D_2)+(B_1\times \\ \times D_2)+(B_2\times D_1)=B_1\times(B\times D_2)+B_2\times(B\times D_1)= \\ =(B_1\times H_2)\times(B_2\times H_1)=0 \end{cases}$$

ce qui est impossible A étant continu. B étant un $\mathfrak{K}(H_2, H_1)$ contient un sous-continu M tel que $M\times H_1=M\times D_1\neq 0\neq M\times \times H_2=M\times D_2$ [3]). Comme $(M\times D_1)\times(M\times D_2)=0$, on voit

[2]) M, N désignant deux ensembles fermés, non vides et disjoints, l'ensemble fermé A est un $\mathfrak{K}(M, N)$, s'il n'est pas la somme de deux ensembles fermés P et Q tels que: $P\times Q=P\times M=P\times N=0$. Comp. Mazurkiewicz: *Comptes Rendus* CLI, Vietoris: *Monats. Math. Phys.* 31, Szymański: *Fund. Math.* XI p. 6 et 15., Kuratowski et Straszewicz: *Fund. Math.* XII, p. 152—153.

[3]) Kuratowski et Straszewicz: *Fund. Math.* XII p. 152—153.

que $M\times D$ est non vide et non connexe. D'autre part, M est un $\mathfrak{K}(H_1, H_2)$, donc un $\mathfrak{K}(E_1, E_2)$ tandis que E n'en est pas un. Donc:

$$(2,8)\qquad M-E=M\times S(x, \sigma)\neq 0 \quad \text{c. à d.} \quad \varrho(x, M)<\sigma.$$

Le lemme est ainsi démontré. —

3. Lemme. *Soit A un continu de Jordan* [4]) *situé dans R_n (espace euclidien à n dimensions); soit Φ une famille non dénombrable de continus disjoints, dont chacun coupe A; la famille Φ contient alors 3 continus tels que l'un d'eux coupe A entre les deux autres.*

Démonstration. Rappelons d'abord quelques faits connus et précisons la terminologie.

Les termes: *domaine* (= ensemble ouvert), *région* (= domaine connexe), *frontière* sont dans ce paragraphe relativisés par rapport à A. L'ensemble fermé *B coupe A entre les points x et y*, si $A-B$ contient $x+y$ mais ne contient aucun continu contenant $x+y$; *B coupe A entre les ensembles M et N*, s'il le coupe entre tout couple x, y tel que $x\subset M$, $y\subset N$.

(α) B étant fermé, $A-B$ est l'ensemble somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable de régions composantes [5]).

(β) Toute région étant semicontinu [6]), si B coupe A entre x et y, — ces points sont contenus dans deux régions composantes différentes de $A-B$, et vice versa

(γ) Si G est une région, B un ensemble connexe et si $B\times G\neq 0\neq B\times \times(A-G)$, alors $B\times F(G)\neq 0$ [7]).

Soit C_1 un continu de Φ. Tout autre continu de Φ est contenu dans $A-C_1$, donc d'après (γ) dans une région composante de $A-C_1$. La famille Φ étant non dénombrable, il existe en vertu de (α) une région composante de $A-C_1$ contenant une infinité non dénombrable de continus de Φ; soit G_1 une telle région — Φ_1 la famille de tous les continus de Φ contenus dans G_1.

Soit C un continu de Φ_1; désignons par $G(C)$ une région composante de $A-C$, différente de celle qui contient C_1 (une telle région existe, car d'après (β) et les propriétés de Φ, $A-C$ contient au moins deux régions composantes). Comme $F(G(C))\subset C\subset G_1$ on a certainement $G_1\times G(C)\neq 0$, donc, d'après (γ) on aura:

$$(3,1)\qquad G(C)\subset G_1.$$

[4]) = continu localement connexe (= zusammenhängend im Kleinen).

[5]) Kuratowski: *Fund. Math.* I. p. 40—43.

[6]) Moore: *Math. Zeitschrift* 15, p. 255.

[7]) v. p. e. Hausdorff: *Grundzüge der Mengenlehre* p. 247.

La famille des régions $G(C)$ correspondant aux continus C de Φ_1 étant non dénombrable on peut trouver deux continus de Φ_1: C_2 et C_3 tels que l'on aie, en posant $G_2 = G(C_2)$ et $G_3 = G(C_3)$:

$$G_2 \times G_3 \neq 0. \tag{3,2}$$

Si $C_3 \subset G_2$, C_2 coupe A, entre C_1 et C_3, car C_1 n'est pas contenu dans G_2; dans le cas contraire on aura: $C_3 \times G_2 = 0$, donc $G_2 \subset A - C_3$, donc d'après (γ) et 3,2): $G_2 \subset G_3$.

Il en résulte

$$F(G_2) \subset F(G_2) \times [G_3 + C_3] \subset C_2 \times (G_3 + C_3) \subset C_2 \times G_3 \subset G_3. \tag{3,3}$$

$$C_2 \times G_3 \supset F(G_2) \times G_3 = F(G_2) \neq 0 \tag{3,4}$$

donc $C_2 \subset G_3$ et C_3 coupe A entre C_1 et C_2. Le lemme est ainsi démontré.

Remarque additionnelle. Si $B \supset B_1$, B est non dense dans A_1 et B_1 coupe A, alors B coupe A. — J'omets la démonstration immédiate. —

Démonstration du thèorème.

4. Soit C un continu indécomposable, plan et borné; $\mathfrak{P}(x)$ désignera l'ensemble $\mathfrak{P}$ de C qui contient le point x.

$S(x, \varrho)$ désignera maintenant conformément à 2 l'intérieur du cercle de centre x et de rayon ϱ. A étant un ensemble fermé, $\mathfrak{S}(x, A)$ *désignera la composante* [8]) de A qui contient x, R_2 désigne le plan.

5. Si l'ensemble fermé M coupe la région $R_2 - \overline{S(x, \alpha)}$, il coupe aussi l'ensemble fermé $R_2 - S(x, \alpha)$.

J'omets la démonstration facile.

6. Désignons par U l'ensemble des points accessibles de C. Soit a un point arbitraire de C, n un nombre naturel. Désignons par $G_{n,1}$, $G_{n,2} \ldots$ les régions-composantes de $R_2 - \left(C + \overline{S\left(a, \frac{1}{n}\right)}\right)$, par $F_{n,k}$ leurs frontières respectives $(k = 1, 2 \ldots)$. Posons:

[8]) A_1 est une *composante* de A, si 1) $A_1 \subset A$, 2) A_1 est connexe, 3) A_1 est saturé par rapport aux propriétés 1), 2). Les composantes d'un ensemble fermé sont des continus et elles sont identiques aux *constituants*.

$$P = \sum_{x \subset U} \mathfrak{P}(x) \tag{6,1}$$

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k} \sum_{y \subset F_{n,k}} \mathfrak{S}\left(y, C - S\left(a, \frac{1}{n}\right)\right). \tag{6,2}$$

Je dis que l'on a:

$$P \subset Q + \mathfrak{P}(a). \tag{6,3}$$

Soit z un point de P et supposons que z n'est pas contenu dans $\mathfrak{P}(a)$. On aura:

$$\mathfrak{P}(z) \times \mathfrak{P}(a) = 0 \tag{6,4}$$

$\mathfrak{P}(z)$ contient un point accessible z_1. Il existe un continu D, contenu dans $\mathfrak{P}(z)$ et contenant $z + z_1$, et un arc simple J ayant z_1 comme extrémité, contenu dans $(R_2 - C) + z_1$. On aura, d'après (6,4):

$$(D + J) \times \mathfrak{P}(a) \subset \mathfrak{P}(z) \times \mathfrak{P}(a) = 0 \tag{6,5}$$

donc

$$\varrho(a, D + J) > 0. \tag{6,6}$$

Soit m un entier tel que:

$$\frac{1}{m} < \varrho(a, D + J). \tag{6,61}$$

On aura, d'après (6,61)

$$J - z_1 \subset (R_2 - C)\left(R_2 - \overline{S\left(a, \frac{1}{m}\right)}\right) = R_2 - \left(C + \overline{S\left(a, \frac{1}{m}\right)}\right) \tag{6,7}$$

Donc $J - z_1$ étant connexe est contenu d'après **3** (γ) dans une région composante de $R_2 - \left(C - S\left(a, \frac{1}{m}\right)\right)$; soit $G_{m,q}$ cette région. Il en résulte:

$$z_1 \subset F_{m,q} \tag{6,8}$$

$$\mathfrak{S}\left(z_1, C - S\left(a, \frac{1}{m}\right)\right) \subset Q. \tag{6,81}$$

D'autre part, D est un continu, contenant z_1 et contenu d'après

(6,61) dans $C - S\left(a, \frac{1}{m}\right)$. Il en résulte:

(6,9) $$z \subset D \subset \mathfrak{S}\left(z, C - S\left(a, \frac{1}{m}\right)\right) \subset Q.$$

La relation (6,3) est ainsi démontrée.

7. Supposons fixés les indices n, k. Soit c un point de $C - \overline{S\left(a, \frac{1}{n}\right)}$, $\sigma < \varrho\left(c, \overline{S\left(a, \frac{1}{n}\right)}\right)$, $\mathfrak{P}_1$ un ensemble $\mathfrak{P}$ de C, différent de $\mathfrak{P}(a)$. On a: [9]) $\overline{\mathfrak{P}_1} = C$, donc $S\left(a, \frac{1}{n}\right) \times \mathfrak{P}_1 \neq 0$.

Soit u un point de cet ensemble. Le continu $\mathfrak{S}\left(u, C - S\left(c, \frac{\sigma}{2}\right)\right)$ est un sous-continu de C, différent de C, donc [10]) non dense dans C. Il en résulte:

(7,1) $$\left[S\left(a, \frac{1}{n}\right) \times \mathfrak{P}_1\right] - \mathfrak{S}\left(u, C - S\left(c, \frac{\sigma}{2}\right)\right) \neq 0$$

soit u un point de cet ensemble, L un continu irréductible entre u et u_1, contenu dans C. On a:

(7,11) $$L \times S\left(c, \frac{\sigma}{2}\right) \neq 0$$

et comme $u + u_1 \subset \mathfrak{P}_1$:

(7,12) $$L \subset \mathfrak{P}_1.$$

Posons: $L_1 = L - S\left(a, \frac{1}{n}\right)$, $L_2 = L \times \overline{S\left(a, \frac{1}{n}\right)}$ et soit c un point de $L \times S\left(c, \frac{\sigma}{2}\right)$ L_1, L_2 sont fermés et on a les relations:

(7,2) $$u + u_1 \subset L_2, \quad c_1 \subset L_1 - L_2, \quad L_1 + L_2 = L$$

donc, d'après le lemme **1**, il existe un continu M tel que:

(7,21) $$M \subset L_1 \subset \left[C - S\left(a, \frac{1}{n}\right)\right] \times \mathfrak{P}_1$$

[9]) Janiszewski et Kuratowski: *Fund. Math.* I, p. 221, Théorème VIII.
[10]) ibid. p. 212—213. Théorème II.

(7.22) $$\varrho(M, c_1) < \frac{\sigma}{2} \quad \text{donc} \quad \varrho(M, c) < \sigma$$

(7,23) $$M \times \overline{S\left(a, \frac{1}{n}\right)} = M \times \left[L \times \overline{S\left(a, \frac{1}{n}\right)}\right] = M \times L_2$$

est non vide et non connexe.

D'après le second théorème de Janiszewski [11]) $M + \overline{S\left(a, \frac{1}{n}\right)}$ coupe le plan, donc M coupe la région $R_2 - \overline{S\left(a, \frac{1}{n}\right)}$, donc aussi le continu de Jordan $R_2 - S\left(a, \frac{1}{n}\right)$ (d'après **5**).

M est un continu, contenu dans $C - S\left(a, \frac{1}{n}\right)$, donc il existe une composante de $C - S\left(a, \frac{1}{n}\right)$ qui contient M. Désignons cette composante par $V(\mathfrak{P}_1)$. On a:

(7,3) $$V(\mathfrak{P}_1) \subset \mathfrak{P}_1$$

(7,4) $$\varrho(c, V(\mathfrak{P}_1)) < \sigma$$

d'après (7,21) et (7,22). M coupe $R_2 - S\left(a, \frac{1}{n}\right)$, $V(\mathfrak{P}_1)$ contient M et c'est un ensemble non dense dans $R_2 - S\left(a, \frac{1}{n}\right)$, donc d'après la Remarque additionnelle de **3** $V(\mathfrak{P}_1)$ coupe $R_2 - S\left(a, \frac{1}{n}\right)$.

La famille de tous les $V(\mathfrak{P}_1)$, correspondants aux ensemble $\mathfrak{P}$ de C différents de $\mathfrak{P}(a)$ est non dénombrable, car l'ensemble des ensembles $\mathfrak{P}$ d'un continu indécomposable est non dénombrable [11a]). Si $\mathfrak{P}_1' \neq \mathfrak{P}_1''$ on aura, d'après (7,3)

(7,5) $$V(\mathfrak{P}_1') \times V(\mathfrak{P}_1'') \subset \mathfrak{P}_1' \times \mathfrak{P}_1'' = 0$$

donc les continus $V(\mathfrak{P}_1)$ sont disjoints. Enfin tout continu $V(\mathfrak{P}_1)$

[11]) Prace mat.-fiz. 26. cf. aussi S. Straszewicz: *Fund. Math.* VII. p. 160—187.
[11a]) Janiszewski et Kuratowski l. c. p. 219; cf. Mazurkiewicz: *Fund. Math.* X, p. 305—310.

coupe $R_2 - S\left(a, \frac{1}{n}\right)$. Donc d'après le lemme **3** on peut trouver trois ensembles $\mathfrak{P}$: $\mathfrak{P}_1^{(1)}$, $\mathfrak{P}_1^{(2)}$, $\mathfrak{P}_1^{(3)}$ tels que $V(\mathfrak{P}_1^{(1)})$ coupe $R_2 - S\left(a, \frac{1}{n}\right)$ entre $V(\mathfrak{P}_1^{(2)})$ et $V(\mathfrak{P}_1^{(3)})$. Je dis que l'on a l'une au moins des deux relations:

$$V(\mathfrak{P}_1^{(2)}) \times F_{nk} = 0; \quad V(\mathfrak{P}_1^{(3)}) \times F_{nk} = 0. \tag{7,6}$$

En effet, supposons le contraire et soit v_1 un point de $V(\mathfrak{P}_1^{(2)}) \times F_{nk}$, v_2 un point de $V(\mathfrak{P}_1^{(3)}) \times F_{nk}$. $V(\mathfrak{P}_1^{(1)})$ coupe $R_2 - S\left(a, \frac{1}{n}\right)$ entre v_1 et v_2, donc, d'après **3** (β) entre un certain voisinage [12]) de v_1 et un certain voisinage de v_2. Mais d'après $v_1 + v_2 \subset F_{n,k}$ tout voisinage de v_1 et tout voisinage de v_2 contient des points de $G_{n,k}$, donc $V(\mathfrak{P}_1^{(1)})$ coupe $R_2 - S\left(a, \frac{1}{n}\right)$ entre un certain couple de points: v_1', v_2' de $G_{n,k}$. Mais $G_{n,k}$ étant une région il existe un continu $N \subset G_{n,k}$, contenant $v_1' + v_2'$. On a:

$$N \subset G_{n,k} \subset R_2 - \left(C + \overline{S\left(a, \frac{1}{n}\right)}\right) \subset \left[R_2 - S\left(a, \frac{1}{n}\right)\right] - V(\mathfrak{P}_1^{(1)}). \tag{7,7}$$

Or (7,7) montre que $V(\mathfrak{P}_1^{(1)})$ ne coupe pas $R_2 - S\left(a, \frac{1}{n}\right)$ entre v_1' et v_2'. On arrive ainsi à une contradiction. - Posons $V = V(\mathfrak{P}_1^{(2)})$ resp. $V = V(\mathfrak{P}_1^{(3)})$, suivant que l'on a la première ou la seconde relation (7,6). Comme $V \times F_{nk} = 0$ et V est une composante de $C - S\left(a, \frac{1}{n}\right)$, on aura:

$$V \times \sum_{y \subset F_{n,k}} \mathfrak{S}\left(y, C - S\left(a, \frac{1}{n}\right)\right) = 0. \tag{7,8}$$

D'autre part, d'après (7,4)

$$\varrho(V, c) < \sigma. \tag{7,9}$$

Donc:

$$\varrho\left[C - \sum_{y \subset F_{n,k}} \mathfrak{S}\left(y, C - S\left(a, \frac{1}{n}\right)\right), c\right] < \sigma \tag{7,91}$$

[12]) voisinage par rapport à $R_2 - S\left(a, \frac{1}{n}\right)$.

c étant un point arbitraire de $C - \overline{S\left(a, \frac{1}{n}\right)}$ et σ étant arbitrairement petit, il en résulte:

$$\overline{C - \sum_{y \subset F_{n,k}} \mathfrak{S}\left(y, C - S\left(a, \frac{1}{n}\right)\right)} \supset \overline{C - \overline{S\left(a, \frac{1}{n}\right)}} \tag{7,92}$$

$$\overline{C - \sum_{y \subset F_{n,k}} \mathfrak{S}\left(y, C - S\left(a, \frac{1}{n}\right)\right)} \supset \overline{C \times S\left(a, \frac{1}{n}\right)}. \tag{7,93}$$

D'autre part on a $C = \overline{C - \overline{S\left(a, \frac{1}{n}\right)}} + \overline{C \times S\left(a, \frac{1}{n}\right)}$, car dans le cas contraire C contiendrait soit un point de dimension 0, soit un arc du cercle $\overline{S\left(a, \frac{1}{n}\right)} - S\left(a, \frac{1}{n}\right)$ qui ne serait pas un continu de condensation pour C. Or, c'est impossible, — C étant continu indécomposable. Donc:

$$\overline{C - \sum_{y \subset F_{n,k}} \mathfrak{S}\left(y, C - S\left(a, \frac{1}{n}\right)\right)} = C. \tag{7,94}$$

8. La relation (7,94) montre que, quel que soit n et k, l'ensemble fermé $\sum_{y \subset F_{n,k}} \mathfrak{S}\left(y, C - S\left(a, \frac{1}{n}\right)\right)$ est non dense par rapport à C. — Donc l'ensemble Q, défini par (6,2), est de première catégorie par rapport à C. Il en est de même pour $\mathfrak{P}(a)$. Donc, d'après (6,3) *l'ensemble P est de première catégorie par rapport à C. Mais c'est l'énoncé même de notre théorème qui se trouve ainsi démontré.*