fenheit. Sollen nun *alle übrigen* Sätze (außerhalb P) als *„indefinit“* gelten, so erhalten wir noch das folgende

Axiom III) Ist P das System aller „definiten“ Sätze, oder allgemeiner irgend ein System von Sätzen p von der Beschaffenheit Dp, so besitzt es kein echtes Untersystem P_1, welches gemäß I und II einerseits die sämtlichen Grundrelationen aus R enthält, andererseits aber alle Negationen, Konjunktionen, Disjunktionen und Quantifikationen der eigenen Sätze, bzw. Satzfunktionen bereits umfaßt.

Natürlich ist auch dieses Axiom nur ein anderer Ausdruck für die Forderung, daß alle „definiten“ Sätze sich aus den „Grundrelationen“ der Form I durch eine endliche Anzahl von Operationen der Form II) herleiten lassen. Es kommt mir aber hier eben darauf an, nachzuweisen, daß der Begriff der *„Definitheit“* auch rein axiomatisch und ohne explizite Benutzung der *„endlichen Anzahl“* präzisierbar ist. Die weitere Untersuchung des hier charakterisierten *Systems P aller* (in Bezug auf ein Relationssystem R) *definiten Sätze* und seiner Bedeutung für die *„logisch abgeschlossenen Systeme“* und die sie realisierenden *„Modelle“* werde einer späteren ausführlichen Darstellung vorbehalten.

Bad Zoppot, den 11-ten Juli 1929.

Sur les images continues des ensembles analytiques linéaires ponctiformes.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Le but de cette Note est de démontrer ce

Théorème: *Des deux ensembles analytiques linéaires ponctiformes un (au moins) est toujours une image continue de l'autre, sauf le cas où un est dénombrable non fermé et l'autre est non dénombrable, fermé et borné.*

D'après un théorème de M. Hurewicz, chaque ensemble analytique linéaire qui n'est pas un F_σ donne, comme images continues, tous les ensembles analytiques [1]). Il suffira donc, pour démontrer notre théorème, de traîter le cas où les ensembles donnés sont des F_σ.

Supposons d'abord que les ensembles donnés, E et H, sont au plus dénombrables et fermés. Tout ensemble fermé au plus dénombrable est, cemme on sait, homéomorphe à un ensemble bien ordonné (Mahlo) [2]) et il est évident que de deux ensembles de ce genre celui est une image continue de l'autre, qui a le type d'ordre inférieur (et qu'il y a une homéomorphie entre deux ensembles dont les types d'ordre sont égaux [3])).

Soit maintenant E un ensemble dénombrable non fermé. Il existe donc un point d'accumulation de E, soit p, qui n'appartient pas à E, et une suite infinie $p_1, p_2, p_3, \dots$ de points de E convergeant

[1]) *Fund. Math.* t. XII, p. 101.

[2]) Cf. p. e. A. Schoenflies: Entwickelung der Mengenlehre. Leipzig und Berlin 1913, p. 383.

[3]) Mais non seulement dans ce cas: p. e. les ensembles fermés des types $\omega+1$ et $\omega+2$ sont homéomorphes.

vers p. L'ensemble E_1 de tous les points de cette suite est évidemment fermé dans E. Or, on a le suivant

Lemme: Si E est un ensemble linéaire ponctiforme [1]*, tout sous-ensemble de E fermé dans E est une image continue de E* [2].

Donc, l'ensemble E_1 est une image continue de E. Or, tout ensemble dénombrable est évidemment une image continue de l'ensemble E_1 (puisque E_1 est isolé). Tout ensemble dénombrable est ainsi une image continue de l'ensemble E.

Nous avons ainsi démontré que

De deux ensembles dénombrables toujours un (au moins) est une image continue de l'autre.

E et H étant deux ensembles linéaires, nous dirons qu'ils sont *du même type c*, et nous écrirons $cE = cH$, si chacun d'eux est une image continue de l'autre.

Désignons: par P l'ensemble parfait non dense de Cantor; par Q — l'ensemble qu'on obtient en ajoutant à P l'ensemble de tous les nombres naturels; par R — l'ensemble qu'on obtient de l'ensemble P en lui enlévant une de ses extrémités. Je dis que

Chaque ensemble linéaire F_σ ponctiforme non dénombrable, E, est du même type c qu'un de trois ensembles: P, Q, R [3].

Distinguons, pour démontrer, trois cas:

1) E est un ensemble ponctiforme non dénombrable fermé et borné.

2) E est un ensemble F_σ ponctiforme non dénombrable qui ou bien n'est pas fermé, ou bien n'est pas borné, et dont le noyau est fermé et borné.

3) E est un ensemble F_σ ponctiforme non dénombrable, dont le noyau ou bien n'est pas fermé, ou bien n'est pas borné.

Dans le cas 1) il existe un sous-ensemble E_0 de F qui est ponctiforme et parfait, et, d'après notre lemme, E_0 est un image continue de E. Or, comme on sait, tout ensemble fermé et borné est

[1] c'est-à-dire ne contenant aucun intervalle.

[2] Voir: *Fund. Math.* t. XII, p. 100 et t. XI, p. 118.

[3] Il s'en suit sans peine du résultat cité de M. Hurewicz que chaque ensemble linéaire analytique qui n'est pas un F_σ est du même type c que l'ensemble de tous les nombres irrationnels.

une image continue de tout ensemble parfait non dense [1]: en particulier P est une image continue de E_0, et parsuite aussi de E, et E est une image continue de P. On a donc dans notre cas $cE = cP$.

Dans le cas 2) nous pouvons supposer que E n'est pas fermé, puisque tout ensemble non borné est homéomorphe à un ensemble (borné) non fermé. Désignons par N le noyau de E: c'est donc un ensemble parfait et borné. E étant non fermé, il existe un point d'accumulation de E, soit p, qui n'appartient pas à N, et, N étant fermé et E étant ponctiforme, il existe un intervalle D entourant p, ne contenant aucun point de N et dont les extrémités n'appartiennent pas à E. Posons $E_1 = DE$ et $E_2 = E - E_1$. L'ensemble E_1 étant dénombrable (en tant que contenu dans la partie clairsemée $E - N$ de E) et non fermé, l'ensemble H de tous les nombres naturels est une image continue de E_1. Or, l'ensemble N étant fermé et $\subset E_2$, et E_2 étant ponctiforme (puisque $E_2 \subset E$), N est, d'après notre lemme, une image continue de E_2. Or, deux ensembles ponctiformes, parfaits et bornés, étant, comme on sait, homéomorphes, N et P sont homéomorphes, et parsuite P est une image continue de E_2. Les ensembles E_1 et E_2 étant séparés (c'est-à-dire disjoints et aucun d'eux ne contenant pas de points d'accumulation de l'autre), on voit sans peine que l'ensemble $Q = H + P$ est une image continue de l'ensemble $E = E_1 + E_2$. Or, on voit sans peine que E est une image continue de Q (puisque N est homéomorphe à P, et $E - N$ comme un ensemble dénombrable, est une image continue de $Q - P$, et P et $Q - P$ sont séparés). Les ensembles E et Q sont donc des images continues l'un de l'autre, c'est-à-dire $cE = cQ$.

Dans le cas 3) on voit sans peine que E est une somme d'une série infinie d'ensembles F_σ non dénombrables, dont chacun est séparé de la somme de tous les autres, soit $E = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots$ L'ensemble E_n étant un F_σ ponctiforme non dénombrable, il existe un ensemble parfait et borné P_n contenu dans E_n. D'après notre lemme, P_n est une image continue de E_n, et parsuite l'ensemble $T = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots$ est une image continue de $E = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots$ (chaque terme de cette série étant séparé de la somme de tous les autres). Or (tout ensemble fermé et borné étant une image continue

[1] Voir p. e. F. Hausdorff, *Mengenlehre*, Berlin und Leipzig 1918, p. 197 (Th. V).

de tout ensemble ponctiforme parfait) on voit sans peine que tout ensemble F_σ est une image continue de l'ensemble T, et parsuite aussi de l'ensemble E. En particulier, l'ensemble R est une image continue de E, et d'autre part, l'ensemble R satisfaisant aux conditions 3), E est aussi une image continue de R. On a donc $cE = cR$.

Notre assertion est ainsi démontrée. Il en résulte tout de suite ce corollaire:

Il n'existe que quatre types c différents des ensembles linéaires analytiques ponctiformes non dénombrables: ceux des ensembles P, Q, R et de l'ensemble S de tous les nombres irrationnels[1]):

On voit sans peine que les types c des ensembles P, Q, R et S sont en effet différents. Or, on voit aisément que chacun de trois premiers des ensembles P, Q, R et S est une image continue du suivant. Nous avons ainsi démontré que

De deux ensembles linéaires analytiques ponctiformes non dénombrables toujours un (au moins) est une image continue de l'autre.

Il importe de remarquer qu'une pareille proposition ne subsiste pas pour les ensembles linéaires ponctiformes non dénombrables pas nécessairement analytiques. En effet, je démontrerai qu'il existe deux ensembles linéaires ponctiformes non dénombrables, E_1 et E_2, dont aucun n'est pas une image continue de l'autre.

Soit, en effet, E_1 l'ensemble parfait non dense de Cantor, et distinguons deux cas:

1) $2^{\aleph_0} > \aleph_1$. Désignons dans ce cas par E_2 un ensemble linéaire quelconque de puissance $\aleph_1$. On voit sans peine que les ensembles E_1 et E_2 jouissent de la propriété désirée.

2) $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Dans ce cas, comme j'ai démontré (*Fund. Math.* t. XI, p. 302), il existe un ensemble E_2 linéaire non dénombrable, dont toute image continue est de mesure nulle. Or, il est évident que E_2 n'est pas une image continue de E_1 et inversement (puisque des images continues de E_1 peuvent être de mesure positive).

Notre assertion est donc démontrée. Or, je ne sais pas *définir effectivement deux ensembles linéaires ponctiformes non dénombrables, dont aucun ne serait une image continue de l'autre.*

[1]) Ce résultat devient encore plus intéressant lorsqu'on remarque qu'il existe $2^{2^{\aleph_0}}$ types c différents d'ensembles linéaires ponctiformes non dénombrables (ce qu'on vérifie par un simple calcul).

Revenons à la démonstration de notre théorème. Il nous reste évidemment à examiner le cas de deux ensembles F_σ linéaires ponctiformes, dont un, soit E_1, est au plus dénombrable, et l'autre, soit E_2, non dénombrable.

Si E_1 est fermé, E_1 est une image continue de E_2 (puisque E_2, en tant que contenant un sous-ensemble parfait, donne, comme images continues, outre peut être d'autres ensembles, tous les ensembles linéaires fermés). Si E_1 est non fermé et E_2 ou bien n'est pas fermé, ou bien n'est pas borné, E_2 contient, comme on voit sans peine, un sous-ensemble homéomorphe à l'ensemble H de tous les nombres naturels, et fermé dans E_2, et, d'après notre lemme H, et parsuite aussi tout ensemble dénombrable, donc en particulier l'ensemble E_1, est une image continue de E_2.

Enfin, si E_1 est dénombrable non fermé et E_2 est non dénombrable, fermé et borné, aucun de deux ensembles E_1 et E_2 n'est pas évidemment une image continue de l'autre.

Notre théorème est ainsi démontré. Il en résulte sans peine ce

Corollaire: *Il n'existe pas trois ensembles analytiques linéaires ponctiformes, dont aucun ne serait une image continue d'un autre*[1]).

Quant aux ensembles linéaires non ponctiformes, il est à remarquer que M. Kuratowski a construit, pour tout nombre n naturel, n ensembles fermés $E_1, E_2, \dots, E_n$, dont aucun n'est une image continue d'un autre. On voit sans peine qu'on obtient un tel système d'ensembles, en désignant, pour $k = 1, 2, \dots, n$, par E_k l'ensemble formé de k segments fermés: $(2, 3)$, $(4, 5), \dots, (2k, 2k+1)$, et de $2n - 2k$ points: $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2n-2k}$.

[1]) Cela ne subsiste pas pour les ensembles analytiques ponctiformes *plans*, p. e. pour trois ensembles, dont le premier est dénombrable non fermé, le second parfait et borné, et le troisième connexe.