Then

$$\overline{R} = R, \quad R \,.\, T^{-1}(A) = 0, \quad S \,.\, T^{-1}(B) = 0.$$

Let $U = M - T(R)$ and $V = M - T(S)$. We have $U \supset A$, $V \supset B$ and

$$U \,.\, V = (M - T(R)) \,.\, (M - T(S)) = M - (T(R) + T(S)) =$$
$$= M - (T(R) + T(\overline{I - R})) = M - T(I) = 0.$$

Thus M is a perfectly separable, normal Hausdorff space and is metric by a theorem due to P. Urysohn [1]).

[1]) P. Urysohn, Math. Ann., vol. 94 (1925), p. 309.

Über den Begriff der Definitheit in der Axiomatik.

Von

Ernst Zermelo (Freiburg i. Br.).

In meinen „Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre" Math. Ann. 65. 1908) habe ich auf S. 263 den Terminus „definit" eingeführt für solche Aussagen $E(x)$ „über deren Gültigkeit oder Ungültigkeit die Grundbeziehungen des Bereiches vermöge der Axiome und der allgemeingültigen logischen Gesetze ohne Willkür entscheiden". Dieser Begriff scheint nicht allgemein verstanden worden zu sein; manche finden ihn „unklar", und die meisten neueren Autoren auf dem Gebiete der mengentheoretischen Axiomatik versuchen ohne ihn auszukommen. Die verschiedenen Versuche, den Begriff der „Definitheit" zu vermeiden, lassen sich in die folgenden Gruppen einteilen:

1) Man läßt ihn einfach *weg*, hält ihn für *überflüssig* oder überläßt ihn der allgemein Logik bzw. der Logistik, da seine Bedeutung eben nicht spezifisch mengentheoretischer Natur ist. Dieser einfache Behelf, einer Schwierigkeit dadurch aus dem Wege zu gehen, daß man sie ignoriert oder einer anderen Wissenschaft zuschiebt, wäre gewiß auch für mich das Bequemste gewesen und hätte mir manche Angriffe und Kritiken erspart. Aber ist es schon an und für sich nicht die Aufgabe des wissenschaftlichen Forschers, sich die Arbeit bequem zu machen, so gilt dies noch am wenigsten für Untersuchungen, die es mit dem „Grundlagen" einer Wissenschaft zu tun haben. Es kam mir darauf an, die Hauptsätze der allgemeinen Mengenlehre aus möglichst geringen Vorraussetzungen und mit möglichst beschränkten Hilfsmitteln herzuleiten, und ich erkannte, daß der uneingeschränkte Gebrauch der „Satzfunktionen" hier entbehrlich, ja wegen gewisser „Antinomien" vielleicht sogar

gefährlich war. Eine allgemein anerkannte „mathematische Logik", auf die ich mich hätte berufen können, gab es damals noch nicht — so wenig wie heute, wo jeder Grundlagen-Forscher seine eigene Logistik hat. Eine solche logistische Grundlage in extenso selbständig zu entwickeln, wäre damals schwerlich am Platze gewesen, wo es sich doch zunächst um andere Aufgaben handelte, und zu einer Zeit, wo noch unter den Mathematikern weitgehendes Mißtrauen gegen jede Logistik bestand. Immerhin glaubte ich durch meine Erklärung des fraglichen Begriffes und vor allem durch die von ihm gemachten Anwendungen hinreichend deutlich gemacht zu haben, wie er gemeint war.

2) Man sucht den *allgemeinen* Definitsheit-Begriff zu vermeiden, indem man ihn spezialisiert, indem man in der Mengenlehre nur Satz-Funktionen von besonderer Form zuläßt, wie dies z. B. A. Fraenkel in der zweiten Auflage seiner „Mengenlehre" getan hat. Aber bei der Charakterisierung der zugelassenen Funktionen verfährt er *konstruktiv*, was dem Zweck und Wesen der *axiomatischen* Methode im Grunde widerspricht und außerdem vom Begriffe der *endlichen Anzahl* abhängt, dessen Klärung doch gerade eine der Hauptaufgaben der Mengenlehre sein sollte. In der Tat scheint er auch mit diesem Verfahren wenig Nachfolge gefunden zu haben.

3) Die angemessenste Methode, dem Begriffe der „Definitheit" beizukommen und ihn zu präzisieren, scheint mir vielmehr seine *Axiomatisierung*, und das ist denn auch das Verfahren gewesen, das ich selbst, wenn auch ohne ausdrückliche Formulierung, im Auge gehabt und in den Beweisführungen der genannten Arbeit zur Anwendung gebracht habe. Diese Auffassung liegt augenscheinlich auch der „*Axiomatik der Mengenlehre*" J. v. Neumann's zu Grunde, in welcher von vornherein neben und vor dem Begriff der „Menge" derjenige der „*Funktion*" eingeführt und axiomatisiert wird. Doch scheint mir das ganze System v. Neumann's, so interessant und wertvoll es in mancher Beziehung auch sein mag, doch in seinen Grundlagen allzu verwickelt und schwer verständlich, als daß es sich nicht den Versuch lohnte, mit einfacheren mengentheoretischen Grundbegriffen auszukommen. So soll denn im Folgenden versucht werden, den Begriff der „*definiten*" Eigenschaften oder Aussagen im Rahmen einer allgemeinen Axiomatik als ein spezifisch logisches

Problem im besonderen Hinblick, aber ohne Beschränkung auf die Grundlagen der Mengenlehre axiomatisch aufzuklären.

Jedes Axiomen-System A bestimmt als die Gesamtheit seiner Folgerungen ein „*logisch abgeschlossenes System*" d. h. ein System S von Sätzen, welches alle aus ihm rein logisch ableitbaren Sätze bereits enthält. Ist ein solches System „*konsistent*" d. h. widerspruchsfrei, so muß es auch „*realisierbar*" d. h. darstellbar sein durch ein „*Modell*", durch eine *vollständige Matrix* der in den Axiomen bzw. im System vorkommenden „*Grundrelationen*". Zwei ein und dasselbe System S realisierende Modelle M_1 und M_2 heißen „*isomorph*" wenn die Bereiche B_1 und B_2 ihrer Elemente in der Weise ein-eindeutig auf einander abgebildet werden können, daß alle Grundrelationen erhalten bleiben; ein System S, für welches je zwei *beliebige* Modelle isomorph sind, heißt „*kategorisch*"

Ist $r(x, y, z, \ldots)$ irgend eine der in S vorkommenden „Grundrelationen" und M ein beliebiges realisierendes Modell, mit dem Elementen-Bereich B, so gilt für jedes einzelne dem Bereiche B entnommene Werte-System x, y, z entweder r oder seine Negation $\bar{r}$ in dem betrachteten Modell: unser Modell ist bezüglich der Grundrelationen „*disjunktiv*". Das gleiche gilt aber auch für alle aus den Grundrelationen „*ableitbaren*" zusammengesetzten Relationen der Form

$$f(x, y, z, \ldots),$$

auch für sie ist in jedem Modell durch die Matrix der Grundrelationen eindeutig entschieden, ob sie in ihm gelten oder nicht. Eine solche *in jedem Model* durch die Grundrelationen entschiedene Eigenschaft oder Relation ist es eben, die in der genannten Arbeit als „*definit*" bezeichnet werden sollte. „Definit" ist also, was *in jedem* einzelnen *Modell entschieden* ist, aber in verschiedenen Modellen auch in verschiedener Weise entschieden sein kann; die „Entschiedenheit" bezieht sich auf das einzelne *Modell*, die „Definitheit" selbst auf die betrachtete *Relation* und auf das ganze *System*.

Natürlich gibt es auch „*nicht-definite*" Eigenschaften in jedem System, wie etwa „grün angestrichene" Mengen oder Irrationalzahlen, „die durch keine *endliche Anzahl von Worten* in einer beliebigen europäischen Sprache definirt werden können", und es erscheint mir keineswegs überflüssig, auf solche „unsinnigen" oder „unwissenschaftlichen" Definitionen Bezug zu nehmen: hat man doch mit solchen Hilfsmitteln u. a. „die *Unmöglichkeit der Wohlordnung des Kontinuums*“ nachweisen wollen. „*Indefinit*“ sind überhaupt alle Sätze, welche *systemfremde* Relationen enthalten oder solche, die durch die Grundrelationen nicht *eindeutig* bestimmt und festgelegt sind; und dies ist keineswegs immer auf den ersten Blick schon ersichtlich.

Aber welche Sätze und Eigenschaften sind nun wirklich „definit“? Wie kann mau entscheiden, ob ein vorgelegter Satz es ist? oder wie kann man sich vergewissern, keine „indefinite“ Eigenschaft bei der Beweisführung verwendet zu haben? Naheliegend wäre die folgende Begriffs-Bestimmung:

Ein Satz heißt „definit“ für ein gegebenes System, wenn er aus den Grundrelationen des Systems aufgebaut ist ausschließlich vermöge der logischen Elementar-Operationen der Negation, Konjunktion und Disjunktion sowie der Quantifikation, alle diese Operationen in beliebiger aber endlicher Wiederholung und Zusammensetzung.

Diese Bestimmung wäre aber wieder *genetischer, konstruktiver* Natur, sie betrifft nicht den Satz *selbst* sondern seine *Entstehung* oder *Erzeugung*, verwendet den Begriff der *unbestimmten endlichen Anzahl*, liefert in verwickelteren Fällen *keine zweifelsfreie Entscheidung* und ist überhaupt, als dem Wesen der axiomatischen Methode *widerstreitend*, in irgend einer *Axiomatik*, und vollends einer Axiomatik der Mengenlehre, die doch dem Anzahlbegriff vorausgehen soll, m. Er. ebenso wenig am Platze wie die oben besprochene Fraenkel'sche Formulierung des Aussonderungs-Axioms. Die hier angedeutete *genetische* Bestimmung muß also durch eine *axiomatische* ersetzt werden, die, wenn sie auch nicht in *allen* Fällen eine praktische Entscheidung ermöglicht, doch wenigstens von den genannten Übelständen frei und einer präzisen Fassung fähig ist.

Wir versuchen also drei folgende *Axiomatik der Definitheit*:

Es sei gegeben ein Bereich B (oder allgemeiner eine Vielheit von Bereichen $B_1, B_2, \ldots$) sowie ein System R von *Grundrelationen* der Form

$$r(x, y, z, \ldots),$$

wo die Variablen $x, y, z, \ldots$ entsprechend den Bereichen B angehören. Dann sagen wir von einem Satze p, er sei „*definit in Bezug auf R*“ und schreiben

$$D(p), \quad \text{oder einfacher} \quad Dp,$$

wenn folgendes stattfindet:

I) $Dr(x, y, z, \ldots)$ für jede Relation aus R und jede Variablen-Kombination aus B. *Definit sind zunächst alle Grundrelationen.*

II) *Die Definitheit überträgt sich auf zusammengesetzte Aussagen*, nämlich

1) Gilt Dp, so gilt auch immer $D\bar{p}$, wenn $\bar{p}$ die Negation von p bedeutet.

2) Gilt Dp und zugleich Dq, so gilt auch $D(pq)$ sowie auf Grund von 1) auch $D(p+q)$, wo pq bzw. $p+q$ die Verbindungen durch „und“ und „oder“ bedeuten.

3) Gilt $Df(x, y, z, \ldots)$ für alle (erlaubten) Werte-Kombinationen, also

$$\bigcap_{x,y,z} Df(x, y, z \ldots),$$

so gilt auch $D \bigcap_{x,y,z,} f(x, y, z, \ldots)$ und somit auch für die Partikular-Aussage $D \bigcup^{x,y,z,} f(x, y, z, \ldots)$.

4) Gilt $DF(f)$ für alle definiten Funktoren $f = f(x, y, z, \ldots)$, so gelten auch $D \bigcap_{f} F(f)$ und $D \bigcup^{f} F(f)$.

Die Definitheit überträgt sich auf die Quantifikationen. Mit diesen Axiomen I) und II) werden zwar manche Sätze als „*definit*“ charakterisiert, aber keiner als „*indefinit*“, und es könnte nach ihnen allein *jeder beliebige* Satz als „*definit*“ gelten; es muß also zur *vollständigen* Chaaakterisierung noch ein *negatives, einschränkendes* Axiom hinzukommen. Dieses neue, abschließende Axiom ist freilich von etwas anderer Form als die vorangehenden, indem es sich nicht sowohl auf die einzelnen „definiten“ Sätze p als auf ihre *Gesamtheit* P bezieht. Diese Gesamtheit P hat nämlich die folgenden Eigenschaften:

1) sie genügt den Postulaten I und II, d. h. sie *enthält* sämtliche Grundrelationen und sie *ergänzt sich selbst* durch die unter II angegebenen logischen Grundoperationen der Negation, Konjunktion, Disjunktion und Quantifikation;

2) *kein echter Teil* P_1 von P besitzt die *gleiche* Eigenschaft, den Postulaten I und II im selben Sinne zu genügen.

In der Tat, hat ein System P die unter von Sätzen 1) und 2) angegebenen Eigenschaften, so müssen alle Sätze p dieses Systems „*definit*“ sein. Denn sonst bildeten die „definiten“ Sätze dieses Systems ein *Teilsystem* P_1 von der durch 2) ausgeschlossenen Beschaffenheit. Sollen nun *alle übrigen* Sätze (außerhalb P) als *„indefinit“* gelten, so erhalten wir noch das folgende

Axiom III) Ist P das System aller „definiten“ Sätze, oder allgemeiner irgend ein System von Sätzen p von der Beschaffenheit Dp, so besitzt es kein echtes Untersystem P_1, welches gemäß I und II einerseits die sämtlichen Grundrelationen aus R enthält, andererseits aber alle Negationen, Konjunktionen, Disjunktionen und Quantifikationen der eigenen Sätze, bzw. Satzfunktionen bereits umfaßt.

Natürlich ist auch dieses Axiom nur ein anderer Ausdruck für die Forderung, daß alle „definiten“ Sätze sich aus den „Grundrelationen“ der Form I durch eine endliche Anzahl von Operationen der Form II) herleiten lassen. Es kommt mir aber hier eben darauf an, nachzuweisen, daß der Begriff der *„Definitheit“* auch rein axiomatisch und ohne explizite Benutzung der *„endlichen Anzahl“* präzisierbar ist. Die weitere Untersuchung des hier charakterisierten *Systems P aller* (in Bezug auf ein Relationssystem R) *definiten Sätze* und seiner Bedeutung für die *„logisch abgeschlossenen Systeme“* und die sie realisierenden *„Modelle“* werde einer späteren ausführlichen Darstellung vorbehalten.

Bad Zoppot, den 11-ten Juli 1929.

Sur les images continues des ensembles analytiques linéaires ponctiformes.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Le but de cette Note est de démontrer ce

Théorème: *Des deux ensembles analytiques linéaires ponctiformes un (au moins) est toujours une image continue de l'autre, sauf le cas où un est dénombrable non fermé et l'autre est non dénombrable, fermé et borné.*

D'après un théorème de M. Hurewicz, chaque ensemble analytique linéaire qui n'est pas un F_σ donne, comme images continues, tous les ensembles analytiques [1]). Il suffira donc, pour démontrer notre théorème, de traîter le cas où les ensembles donnés sont des F_σ.

Supposons d'abord que les ensembles donnés, E et H, sont au plus dénombrables et fermés. Tout ensemble fermé au plus dénombrable est, cemme on sait, homéomorphe à un ensemble bien ordonné (Mahlo) [2]) et il est évident que de deux ensembles de ce genre celui est une image continue de l'autre, qui a le type d'ordre inférieur (et qu'il y a une homéomorphie entre deux ensembles dont les types d'ordre sont égaux [3])).

Soit maintenant E un ensemble dénombrable non fermé. Il existe donc un point d'accumulation de E, soit p, qui n'appartient pas à E, et une suite infinie $p_1, p_2, p_3,\dots$ de points de E convergeant

[1]) *Fund. Math.* t. XII, p. 101.

[2]) Cf. p. e. A. Schoenflies: Entwickelung der Mengenlehre. Leipzig und Berlin 1913, p. 383.

[3]) Mais non seulement dans ce cas: p. e. les ensembles fermés des types $\omega+1$ et $\omega+2$ sont homéomorphes.