Sur quelques théorèmes fondamentaux de l'Analysis situs [1]).

Par

Casimir Kuratowski (Lwów).

L'intervalle I_n de l'espace euclidien à n dimensions (c. à d. l'ensemble de points $x_1 \dots x_n$ où $0 \leqslant x_i \leqslant 1$, $i = 1, \dots, n$) possède la propriété bien connue suivante: relativement à toute transformation continue de I_n en un sous-ensemble il existe un *point invariant*.

D'autre part, I_n jouit de la propriété importante d'être *uni-cohérent*, c. à d. que, si on décompose I_n en deux continus, leur produit est toujours un continu; cette propriété signifie — comme j'ai prouvé ailleurs [2]) — que le théorème classique de Brouwer-Phragmèn subsiste dans I_n, considéré comme espace.

Je vais prouver dans cette note que *la première propriété entraîne la seconde*, lorsqu'au lieu de I_n on considère un espace Péanien (= image continue de l'intervalle 01) arbitraire.

L'intérêt méthodologique de cette implication tient au fait qu'elle permet d'éviter l'emploi des approximations par polygones ou polyèdres dans la démonstration de plusieurs théorèmes fondamentaux de l'Analysis situs, où ces approximations semblaient jouer un rôle essentiel. Tel est d'abord le cas de l'uni-cohérence de l'intervalle I_n ainsi que de l'espace n-dimensionnelle. Tel est aussi le cas de quelques propriétés équivalentes à l'uni-cohérence [1]), en particulier, de la propriété suivante de l'espace n-dimensionnel:

(*) *A et B étant deux ensembles fermés dont le produit est vide et dont aucun n'est une coupure entre deux points donnés p et q* [2]), *la somme $A+B$ n'est non plus une coupure entre ces points.*

Dans le cas du plan, cette implication fournit, comme je vais montrer, une simple démonstration du *théorème de Janiszewski* [3]), qui s'obtient de (*) en supposant A et B bornés et en remplaçant la condition que le produit AB ne soit pas vide par la condition plus générale que AB soit un continu

Dans la démonstration du théorème de Janiszewski interviennent encore les lignes brisées; mais leur emploi peut être évité complètement dans les applications de ce théorème, dont quelques-unes je mentionnerai ici [4]). Une conséquence presque immédiate du théorème de Janiszewski est qu'*un arc simple ne coupe jamais le plan* [5]); une autre conséquence est le *„deuxième théorème" de Janiszewski* [6]): A et B étant deux continus bornés dont le produit n'est pas un continu, $A+B$ coupe le plan. Ces deux conséquences entraînent d'une façon très simple [7]) le *théorème de Jordan*: une courbe simple fermée coupe le plan en deux régions et constitue la frontière de chacune d'elles.

Le même théorème de Janiszewski sert de base dans la théorie d'une famille de courbes plus générales que les courbes simples fermées, notamment, des *frontières communes à deux régions* (= coupures irréductibles du plan). Les principaux théorèmes de

[1]) Les principaux résultats de cette note ont été communiqués à la séance du 8. VI. 1929 de la Soc. Polon. de Math. (Section de Lwów).

[2]) Fund. Math. VIII, p. 149, théor. III et Fund. Math. XIII. Le théor. de Brouwer-Phragmèn s'énonce, pour le cas du plan, comme suit: C étant un continu borné et R une région déterminée sur le plan par C, la frontière de R est un continu. Voir L. E. J. Brouwer Math. Ann. 69. Pour son extension à l'espace à n dimensions voir P. Alexandroff C. R. 183 (1926), p. 722 et 184 (1927), p. 575.

[1]) L'équivalence de ces propriétés pour les espaces Péaniens est démontrée dans mes notes précitées; la démonstration est aussi valable pour les espaces euclidiens non-bornés.

[2]) c. à d. qu'il existe un continu qui unit p et q en dehors de A (resp. de B).

[3]) Prace mat.-fiz. 26 (1913).

[4]) Dans cet ordre d'idées, il importe de remarquer que, parmi les espaces Péaniens, le théor. de Janiszewski, combiné avec la propriété qu'aucun point ne coupe l'espace, caractérise la surface sphérique. Voir ma note Fund. Math. XIII.

[5]) Voir ma note de Fund. Math. XII, p. 228.

[6]) Les deux théorèmes de Janiszewski sont, d'ailleurs, équivalents (dans les espaces Péaniens); l. c. Fund. Math. XIII, p. 311.

[7]) l. c. Fund. Math. XIII, p. 313.

cette théorie [1]) concernent: 1° les relations entre la notion de frontière commune à deux régions et celle de *continu irréductible entre deux points* (dans quelles conditions une telle frontière se compose de deux continus irréductibles entre le même couple de points) 2° la *décomposition cyclique* d'une frontière de ce genre en sous-continus (qui peuvent d'ailleurs se réduire à des points individuels), 3° les relations entre deux classes des courbes très remarquables et dont la découverte [2]) a enrichi la topologie moderne d'individus ayant des propriétés les plus paradoxales: à savoir, les frontières communes à trois (ou plus) régions et les continus indécomposables (= continu qui n'est pas somme de deux continus différents de lui); on prouve qu'*une frontière commune à trois régions* (*du plan*) *est, soit indécomposable, soit somme de deux continus indécomposables* [3]).

Comme nous l'avons déjà dit, tous ces résultats se déduisent par des considérations purement topologiques. Ainsi, dans cette partie de topologie l'élément non-topologique, qui, bien, entendu, ne peut être évité complètement, se réduit à quelques prémisses de la démonstration du théorème de Janiszewski et du théorème concernant l'existence d'un point invariant dans le carré [4]).

1. **Lemme 1.** *P et Q étant deux ensembles fermés disjoints* (*et non-vides*) *situés dans un continu C* [5]), *il existe une fonction continue transformant C en un segment de droite de façon que P se transforme en l'une des extrémités de ce segment et Q en l'autre.*

En effet, x étant un point arbitraire de C, désignons par $\varrho(x, P)$ et $\varrho(x, Q)$ resp. la distance de x à P et de x à Q et posons

$$f(x) = \frac{\varrho(x, P)}{\varrho(x, P) + \varrho(x, Q)}.$$

[1]) Voir ma note *Sur la structure des frontières communes à deux régions*, Fund. Math. XII, pp. 20—42, où se trouve aussi la bibliographie.

[2]) due à M. Brouwer, Math. Ann. 68 (1910).

[3]) Voir ma note précitée, p. 36, théor. III; la démonstration que j'y ai donnée faisait encore usage de lignes brisées, mais ceci peut être évité, comme je l'ai indiqué dans ma note *Sur la séparation d'ensembles...*, Fund. Math. XII, p. 236. Cf. W. A. Wilson, Bull. Amer. Math. Soc. 1928.

[4]) qui se laisse démontré d'une façon tout-à-fait élémentaire. Voir *Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n-dimensionale Simplexe*, publié dans ce volume (pp. 132—137) par MM. Knaster, Mazurkiewicz et moi.

[5]) ou plus généralement: dans un espace métrique connexe.

La fonction f, ainsi définie, est continue et il vient:

$f(C) =$ l'intervalle 01, $f(P) =$ le point 0, $f(Q) =$ le point 1 [1]).

Lemme 2. *E étant un espace Péanien non-uni-cohérent, on peut le décomposer en deux continus Péaniens dont le produit n'est pas un continu.*

Par définition de l'uni-cohérence, on a

$$E = A + B, \quad AB = P + Q, \quad PQ = 0,$$

A et B étant deux continus (non-nécessairement Péaniens) et P et Q deux ensembles fermés non-vides.

Comme espace Péanien, E est image uniformément continue de l'intervalle 01; il peut donc être décomposé en un nombre fini de continus Péaniens $K_1, \dots, K_n$ aussi petits que l'on veut, plus petits, par exemple, que la moitié de la distance de P à Q.

Considérons parmi les continus $K_1, \dots, K_n$ ceux qui ont des points commun avec A et désignons leur somme par A^*; définissons d'une façon analogue B^*. La décomposition $E = A^* + B^*$ est la décomposition demandée.

En effet, si $K_i A \neq 0 \neq K_j B$ et $K_i K_j \neq 0$, l'identité

$$K_i + K_j = (K_i + K_j) A + (K_i + K_j) B$$

entraîne $(K_i + K_j) AB \neq 0$, puisque $K_i + K_j$ est un continu.

On a donc, soit $(K_i + K_j) P \neq 0$, soit $(K_i + K_j) Q \neq 0$. Désignons resp. par P^* et Q^* la somme des produits $K_i K_j$ assujettis à la première et à la deuxième de ces inégalités. Il vient: $A^* B^* = P^* + Q^*$ et $P^* \neq 0 \neq Q^*$. En outre, $P^* Q^* = 0$, car, en cas contraire, il existeraient deux continus K_s et K_t tels que $K_s K_t \neq 0$ et $K_s P \neq 0 \neq K_t Q$, ce qui contredit l'hypothèse que le diamètre des continus $K_1, \dots, K_n$ est inférieur à la moitié de la distance de P à Q.

Théorème. *Un espace Péanien* [2]) *qui relativement à toute transformation continue (en un sous-ensemble) contient un point invariant est uni-cohérent.*

Démonstration. Soit E un espace Péanien non-uni-cohérent.

[1]) X étant un ensemble d'arguments, $f(X)$ désigne l'ensemble des valeurs $f(x)$ où x est élément de X.

[2]) Ce théorème n'est pas valable pour les continus *non-Péaniens*, comme le prouve l'exemple de la courbe $y = \sin \frac{1}{x}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, augmentée du segment -1, $+1$ de l'axe y et d'un arc qui unit ses points à abscisse -1 et $+1$.

En vertu du lemme 2, on a

$$E = A + B, \quad AB = P + Q, \quad PQ = 0,$$

A et B étant deux continus Péaniens, P et Q deux ensembles fermés et p et q deux points appartenant respectivement à ces ensembles.

Les continus A et B étant Péaniens, il existe deux arcs L et M ayant les points p et q pour extrémités et tels que

(1) $$L \subset A \quad \text{et} \quad M \subset B.$$

D'après le lemme 1, il existe une fonction continue $f(x)$ définie sur A, et telle que

(2) $$f(A) = M$$

(3) $$f(P) = q \quad \text{et} \quad f(Q) = p.$$

En appliquant le même lemme au continu B, on peut évidemment prolonger la fonction f de sorte que: $f(B) = L$.

La fonction f ainsi définie, transforme de façon continue l'espace $E (= A + B)$ en $L + M$ et, comme nous allons prouver, ne laisse aucun point invariant.

Supposons, par contre, que

(4) $$f(a) = a$$

et que (ce qu'on peut toujours supposer) le point a appartient à A.

Il vient, en raison de (2) et (1): $f(a) \subset M \subset B$, d'où selon (4): $a \subset AB$. Comme $AB = P + Q$, on a, soit $a \subset P$, soit $a \subset Q$. Dans les deux cas on conclut que $f(a) \neq a$; car, dans le premier, la formule (3) donne: $f(a) = q$, donc $f(a)$ n'appartient pas à P (tandis que a lui appartient), et dans le second cas, $f(a)$ n'est pas élément de Q, tandis que a en est un.

Corollaires. 1. *L'intervalle I_n de l'espace à n dimensions est uni-cohérent. Il en est de même de l'espace compact de Hilbert (espace des suites $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ avec $0 \leqslant x_n \leqslant 1/n$).*

2. *L'espace euclidien E_n, ainsi que l'espace compact $R_n = E_n +$ le point à l'infini, est uni-cohérent (pour $n \geqslant 2$)* [1].

Le corollaire 1 est une conséquence immédiate du théorème précédent.

[1]) L'uni-cohérence de E_2 fut démontrée pour la première fois par M. Mazurkiewicz dans Fund. Math. III.

L'uni-cohérence de R_n se déduit du cor. 1 en vertu du théorème général suivant: $f(x)$ étant une fonction continue définie sur un ensemble uni-cohérent et compact A telle que les ensembles $\underset{x}{E}(f(x) = y_0)$ sont des continus quel que soit y_0, l'ensemble $f(A)$ est aussi uni-cohérent [1]).

En effet, pour obtenir R_n de I_n on fait correspondre à la „surface" de I_n un seul point de R_n, tous les autres points de R_n et I_n se correspondant par homéomorphie.

L'uni-cohérence de R_n résulte aussi de celle de E_n [2]). Celle-ci sera démontrée dès que la proposition (*) sera prouvée pour E_n considéré comme espace.

Or, en vertu des hypothèses de la proposition (*), on peut unir p et q par deux arcs (ou, en général, par deux continus bornés) L et M tels que $LA = 0 = MB$. Soit I un intervalle de E_n qui contient $L + M$; il n'est donc coupé ni par IA ni par IB entre p et q. Or, I comme ensemble uni-cohérent, possède la propriété (*); on en conclut que $IA + IB$ ne coupe pas I entre p et q. Il en résulte aussitôt que $A + B$ ne coupe pas l'espace E_n entre ces points.

2. *Démonstration du théorème de Janiszewski.*

Soient, sur le plan, A et B deux ensembles fermés dont un, au moins, est borné et p et q deux points entre lesquels ni A ni B ne coupe le plan; supposons que $A + B$ coupe le plan entre ces points, c. à d. que ces points appartiennent à deux régions différentes P et Q déterminées sur le plan par $A + B$. Il s'agit de prouver que AB n'est pas un continu.

Il existe, par hypothèse, deux lignes brisées L et M qui unissent p et q de façon que

(1) $$LA = 0 = MB.$$

[1]) Ce théorème repose sur le simple fait que, dans l'hypothèse faite sur f, si un ensemble de valeurs Y est un continu, l'ensemble d'arguments $f^{-1}(Y)$ l'est aussi. Cf. ma note *Sur les décompositions semi-continues*... Fund. Math. XI, p. 182, cor. 1.

[2]) L'uni-cohérence de E_n équivaut (comme on le prouve par inversion) à la propriété suivante de R_n qui, à son tour, entraîne l'uni-cohérence de R_n: A et B étant deux sous-ensembles fermés de R_n dont le produit est vide ou se compose d'un seul point et dont aucun ne coupe R_n entre deux points donnés p et q, la somme $A + B$ ne coupe non plus R_n entre ces points.

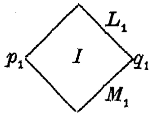
Pour $n = 2$, c'est évidemment un cas particulier du théorème de Janiszewski.

Les lignes L et M peuvent avoir, outre p et q, d'autres points en commun; mais il est facil de les remplacer par deux lignes L_1 et M_1, extraites resp. de L et M, et n'ayant que leurs extrémités p_1 et q_1 en commun, les points p_1 et q_1 étant choisis de sorte que $A+B$ coupe le plan entre eux.

Soit, notamment, sur la ligne L (orientée de p à q), q_1 le premier point de l'ensemble LMQ; un tel point existe, car selon (1): $LM(A+B)=0$, donc la frontière de Q, comme sous-ensemble de $A+B$, est disjointe de LM et il en résulte que l'ensemble LMQ est fermé. Soit, d'autre part, sur la ligne pq_1, extraite de L, p_1 le dernier point de l'ensemble LM qui précède q_1 (c'est donc bien un point qui n'appartient pas à Q, donc qui est séparé de q_1 par $A+B$).

La formule (1) entraîne

(2) $$L_1A=0=M_1B$$



qui à son tour, entraîne: $AB(L_1+M_1)=0$, ce qui veut dire que le produit AB est situé dans le complémentaire de la ligne polygonale simple fermée L_1+M_1.

Or, si l'on suppose, par impossible, que AB est un continu, on en conclut que AB est situé dans l'une des deux régions en lesquelles cette ligne coupe le plan. On peut toujours admettre que c'est la région non-bornée qui contient AB (car le cas contraire se ramène à celui-ci par inversion). Donc, en désignant par I le polygone formé par la région bornée et sa frontière $(=L_1+M_1)$, il vient: $IAB=0$, ce qui prouve que les ensembles IA et IB sont disjoints. En outre, aucun d'eux n'est une coupure de I entre p_1 et q_1, puisque selon (2), L_1 unit ces points dans $I-A$ et M_1 les unit dans $I-B$.

I étant d'après le cor. 1 uni-cohérent, il en résulte en vertu de la propriété (*), que $IA+IB$ ne coupe pas I entre p_1 et q_1; donc $A+B$ n'est pas une coupure du plan entre ces points. Mais ceci contredit la définition des points p_1 et q_1.

Ainsi, l'hypothèse, que AB est un continu, implique une contradiction.

A generalized notion of accessibility [1]).

By

G. T. Whyburn (Austin, U. S. A.).

1. Introduction.

The point P is said to be *accessible by continua* from a point set R provided that if A is any point of R, then $R+P$ contains a bounded continuum containing both A and P; P is said to be *accessible by arcs* from R if for each point A of R, $R+P$ contains a simple continuous arc AP from A to P. In this paper it is proposed to generalize the notion of an "accessible point" in these two senses to include "accessible continua" as follows: The bounded continuum K is said to be *accessible by continua* from a point set R if for each point A of R, $R+K$ contains a bounded continuum containing both A and K; K is said to be *accessible by arcs* from R provided that if A is any point of R and G denotes the collection whose elements are the continuum K together with all the points of $\bar{R}-K.\bar{R}$, then there exists a simple continuous arc AK of elements of G from A to K, which contains no point not in $R+K$.

It is obvious from the definitions that every continuum K which is accessible by arcs from a point set R is also accessible by continua from R. However, the converse is not true for all point sets R, i. e., "accessibility by continua" and "accessibility by arcs" are not equivalent for all sets R. However, it will be shown in this paper that these two notions are equivalent for all sets [R] such that R is a connected open subset of some continuous curve. (Obviously,

[1]) Presented to the American Mathematical Society, April 7, 1928.