et de même

$$S_2 \times C \neq 0. \tag{5,72}$$

Soit z_1 un point de $S_1 \times C_1$ z_2 — un point de $S_2 \times C$, $\mathfrak{P}_4$ un ensemble $\mathfrak{P}$ différent de $\mathfrak{P}_2$ et $\mathfrak{P}_3$. $\overline{A} + \overline{B}$ est une coupure entre z_1 et z_2, d'autre part $\overline{\mathfrak{P}}_4 \supset z_1 + z_2$ et $\mathfrak{P}_4$ est semicontinu. Il en résulte la relation contradictoire:

$$0 \neq \mathfrak{P}_4 \times (\overline{A} + \overline{B}) \subset \mathfrak{P}_4 \times (H_i + H_k + \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_3) = 0. \tag{5,8}$$

Donc Γ_{ik} ne peut contenir plus d'un élément c. q. f. d.

Le théorème **1** est ainsi dèmontré en vertu de (3,1), **4**, **5**.

Sur un théorème de MM. Banach et Kuratowski.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

MM. Banach et Kuratowski ont démontré[1]), en utilisant l'hypothèse que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, ce

Théorème A. *E désignant l'intervalle* $(0, 1)$, *il existe une double suite d'ensembles* A_k^i *telle que*: 1°:

$$\begin{aligned} E &= A_1^1 + A_2^1 + \ldots + A_k^1 + \ldots, \\ E &= A_1^2 + A_2^2 + \ldots + A_k^2 + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ E &= A_1^i + A_2^i + \ldots + A_k^i + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

2: *les ensembles d'une même ligne sont disjoints*, 3°: *quelle que soit la suite d'entiers positifs* $k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots$, *le produit*

$$\prod_{i=1}^{\infty} (A_1^i + A_2^i + \ldots + A_{k_i}^i)$$

est au plus dénombrable.

Le but de cette Note est de démontrer, *sans admettre l'hypothèse*: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, que *le théorème A est équivalent au théorème B suivant*[2]):

[1]) *Fund. Math.* t. XIV, p. 128.

[2]) Étant données deux suites d'entiers positifs $S = \{k_i\}$ et $T = \{n_i\}$, MM. Banach et Kuratowski conviennent d'écrire $T \prec S$, lorsque $n_i \leqslant k_i$, quel que soit i, et démontrent (l. c., p. 130) que le théorème A est équivalent à la proposition suivante: *Il existe une famille* $\boldsymbol{F}$, *de la puissance du continu, ayant comme éléments des suites d'entiers positifs et telle que, pour chaque suite* S *(qu'elle appartienne à* $\boldsymbol{F}$ *ou non), l'ensemble des suites* T *de* $\boldsymbol{F}$ *telles que* $T \prec S$ *est au plus dénombrable.* Cette proposition est donc aussi équivalente à notre théorème B.

Théorème B. *Il existe une suite infinie de fonctions $f_n(x)$ $(n=1,2,3,...)$ définies pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ qui converge non uniformément sur tout ensemble non dénombrable.*

Supposons que le théorème A est vrai. Soit A_k^i une double suite satisfaisant aux conditions du théorème A. x étant un nombre donné de E, il existe, d'après les conditions 1° et 2° du théorème A, une suite infinie d'indices, bien déterminée par le nombre x,

(1) $$n_1(x),\ n_2(x),\ n_3(x), \ldots,$$

telle que

(2) $$x \in A^i_{n_i(x)}, \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

Définissons maintenant la suite infinie des fonctions $f_n(x)$ $(n = = 1, 2, 3, \ldots)$ comme il suit.

Soit x un nombre donné. Si n est un de termes de la suite (1), soit p le plus petit indice, tel que $n = n_p(x)$, et posons

$$f_n(x) = \frac{1}{p}.$$

Si n n'est pas un terme de la suite (1), posons

$$f_n(x) = 0.$$

La suite infinie de fonctions

(3) $$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x), \ldots$$

est ainsi définie pour tout nombre x de $(0, 1)$.

Je dis qu'elle converge non uniformément vers 0 sur tout ensemble non dénombrable contenu dans l'intervalle $(0, 1)$.

D'une part on voit sans peine que la suite (3) converge vers 0 pour tout x de $(0,1)$. En effet, soit x un nombre de $(0, 1)$, k — un nombre naturel donné quelconque. Il résulte tout de suite de la définition de la suite (3) que pour $n > n_1(x) + n_2(x) + \ldots + n_k(x) = \mu_k(x)$ on a soit $f_n(x) = {}^1/p$, où $p > k$, soit $f_n(x) = 0$. Donc toujours $0 \leqslant f_n(x) \leqslant {}^1/k$, pour $n > \mu_k(x)$, d'où résulte que $\lim\limits_{n=\infty} f_n(x) = 0$.

D'autre part, soit N un ensemble non dénombrable de nombres de $(0, 1)$, et admettons que la suite (3) converge uniformément sur N.

Il existe donc, pour tout nombre i naturel, un indice k_i, tel que

(4) $$\left| f_n(x) \right| < \frac{1}{i}, \quad \text{pour} \quad x \in N, \quad n > k_i.$$

D'après la définition de la suite (3), nous avons

$$f_{n_i(x)}(x) \geqslant \frac{1}{i}, \quad \text{pour} \quad x \in E, \quad i = 1, 2, 3, \ldots,$$

ce qui donne, d'après (4):

$$n_i(x) \leqslant k_i, \quad \text{pour} \quad x \in N, \quad i = 1, 2, 3, \ldots.$$

donc, d'après (2):

$$x \in A_1^i + A_2^i + \ldots + A_{k_i}^i, \quad \text{pour} \quad x \in N, \quad i = 1, 2, 3, \ldots,$$

ce qui donne

$$N \subset \prod_{i=1}^{\infty} (A_1^i + A_2^i + \ldots + A_{k_i}^i),$$

contrairement à la condition 3°.

La suite (3) converge donc non uniformément sur N, et le théorème B est vrai

Supposons maintenant que le théorème B est vrai. Soit (3) la suite de fonctions vérifiant le théorème B.

i et k étant deux indices donnés, désignons par A_k^i l'ensemble de tous les nombres x de $(0, 1)$, tels que k est le plus petit indice satisfaisant à la condition

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \frac{1}{i}, \quad \text{pour} \quad m > k \quad \text{et} \quad n > k.$$

La suite (3) étant convergente, on voit sans peine que la double suite A_k^i satisfait aux conditions 1° et 2°. Or, je dis qu'elle satisfait aussi à la condition 3° En effet, admettons que $k_1, k_2, k_3, \ldots$ est une suite infinie d'indices, telle que le produit

$$N = \prod_{i=1}^{\infty} (A_1^i + A_2^i + \ldots + A_{k_i}^i)$$

est non dénombrable. Soit x un point de N, i — un nombre naturel: on a donc

$$x \in A_1^i + A_2^i + \ldots + A_{k_i}^i,$$

donc, d'après la définition des ensembles A_k^i:

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \frac{1}{i}, \quad \text{pour} \quad m > k_i, \quad n > k_i,$$

ce qui prouve que la suite (3) converge uniformément sur N, contrairement à la propriété de cette suite. La condition 3⁰ est donc vérifiée et le théorème A est vrai.

L'équivalence des théorèmes A et B est ainsi démontrée.

Le théorème A étant vrai (d'après MM. Banach et Kuratowski), si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il résulte d'équivalence des théorèmes A et B, que *le théoreme B est vrai, si* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ (ce que j'ai démontré directement sur une autre place [1])).

[1]) *Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie,* Classe III, 1928, p. 84—87.

A Characterization of Those Subsets of Metric Separable Space Which Are Homeomorphic with Subsets of the Linear Continuum [1]).

By

Leon W. Cohen (Ann Arbor, U. S. A.).

The questions connected with the mapping of sets of points on the linear continuum have been the subject of much investigation. Veblen [2]) and Lennes [3]) defined arcs in the plane homeomorphic with closed linear intervals; the latter establishing the correspondence in non-metric terms. Janiszewski [4]) gave another definition of arc in the plane. Sierpiński [5]) settled this question in n-dimensional space. Papers by Zoretti [6]), Riesz [7]) and Denjoy [8]) on totally disconnected sets in the plane led Moore and Kline [9]) to the following

Theorem: *Necessary and sufficient conditions that a bounded, closed, plane point set M be a subset of an arc are that every closed connected subset of M containing more than one point be an arc and that no point of an arc t except its end-points be a limit point of $M - t$.*

[1]) This paper is substantially a thesis submitted to the University of Michigan in May 1928 in partial fullfilment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy.

[2]) O. Veblen: Trans. Amer. Math. Soc. vol 6 (1905) pp. 83—98.

[3]) N. J. Lennes: Amer. Jour. Math. vol 33 (1911) pp. 287—362.

[4]) S. Janiszewski: Jour. de l'Ecole Polyt. ser. 2, vol 6 (1912).

[5]) W. Sierpiński: Annali di Math. ser. 3, vol 26 (1916) pp. 131—151.

[6]) L. Zoretti: Jour. de Math. vol 1 (1905) pp. 12 ff.

[7]) F. Riesz: Comptes Rendus (Paris) vol 141 (1905) pp. 650—655.

[8]) A. Denjoy: Comptes Rendus (Paris) vol 151 (1910) pp. 138—140.

[9]) R. L. Moore and J. R. Kline: Annals of Math. vol 20 (1919) pp. 218—223.