Or, on a, d'autre part,

$$k_{i-1} = n_1 + s_2 + \ldots + s_{i-1} \leqslant n_1 + n_2 + \ldots + n_{i-1} \leqslant n_{i-1} + \tfrac{1}{4} n_{i-1} + \\ + \tfrac{1}{4^2} n_{i-1} + \ldots = \tfrac{4}{3} n_{i-1},$$

d'où il résulte définitivement

$$\left| \sum_{j=1}^{j=k_i} \varphi_{n_j}(t) \right| \geqslant \tfrac{2}{3} n_{i-1};$$

cela, vu (7), implique la relation (1) à démontrer.

Un théorème sur l'accessibilité des continus indécomposables.

Par

Stefan Mazurkiewicz (Varsovie).

1. Le but de cette Note est de compléter les résultats d'une communication antérieure [1]), par la démonstration du théorème suivant.

C étant un continu indécomposable, plan est borné, l'ensemble de ses ensembles $\mathfrak{P}$ qui contiennent plus d'un point accessible est fini ou dénombrable.

2. Lemme. *Soit Φ une famille non dénombrable de domaines du R_n. Supposons qu'a tout domaine G de la famille Φ correspond un continu $K(G)$, remplissant les conditions suivantes:* 1) $K(G) \subset F(G)$; 2) $K(G)$ *n'est pas un continu de condensation de* $F(G)$, *c. à d.* $K(G) - \overline{(F(G) - K(G))} \neq 0$; 3) G *et* G^* *étant deux domaines différents de* Φ, *on a:* $K(G) \times F(G^*) = 0$. *La famille Φ contient alors deux domaines G_1 et G_2, tels que* $K(G_1) \subset G_2$.

Démonstration. Rangeons en une suite infinie:

(2,1) $$S_1, S_2, \ldots$$

les sphéres du R_n dont les coordonnées du centre et le rayon sont rationnels. G étant un domaine de Φ, il existe dans la suite (2,1) des sphères S_i, remplissant les conditions:

(2,21) le centre de $S_i \subset G$

(2,22) $\overline{S_i} \times K(G) \neq 0$

(2,23) $\overline{S_i} \times \overline{(F(G) - K(G))}$

[1]) *Fund. Math.*, ce volume p 107—115; comp. p. la erminologie et les notations.

En effet l'ensemble $K(G)-\overline{F(G)-K(G)}$ n'étant pas vide soit a un point de cet ensemble. Déterminons un point $a' \subset G$ à coordonnées rationnelles et un nombre rationnel ϱ' de manière à avoir:

$$\varrho(a', a) < \tfrac{1}{4}\varrho(a, \overline{F(G)-K(G)}) < \varrho' < \tfrac{1}{3}\varrho(a, \overline{F(G)-K(G)})$$

ce qui est évidement possible. La sphére $S(a', \varrho')$ satisfait aux conditions: (2,21)—(2,23) et fait partie de la suite (2,1).

Soit $i(G)$ le premier nombre naturel pour lequel on a (2,21)—(2,23). La famille Φ étant non dénombrable il existe un entier positif i_1 tel que $i_1 = i(G)$ pour une infinité non dénombrable Φ_1 de domaines G de Φ. Soient b et λ respectivement le centre et le rayon de S_{i_1}. On aura pour tout domaine G tiré de Φ_1:

(2,24) $$b \subset G$$

(2,25) $$\overline{S_{i_1}} \times K(G) = \overline{S(b, \lambda)} \times K(G) \neq 0$$

(2,26) $$\overline{S(b, \lambda)} \times [\overline{F(G)-K(G)}] = 0$$

Posons $\mu(G) = \varrho(b, K(G))$; on aura d'après (2,25), (2,26):

(2,3) $$0 < \mu(G) \leqq \lambda$$

(2,4) $$S(b, \mu(G)) \times F(G) = 0.$$

On peut trouver dans Φ_1 deux domaines G_1 et G_2 tels que:

(2,5) $$\mu(G_1) \leqq \mu(G_2).$$

L'ensemble $\overline{S(b, \mu(G_1))} \times K(G_1)$ étant non vide, soit b' un point de cet ensemble; désignons par $\overline{bb'}$ le segment rectiligne aux extrémités b et b'.

On a:

(2,6) $$\overline{bb'} \subset S(b, \mu(G_1)) + b' \subset S(b, \mu(G_1)) + K(G_1)$$

d'autre part d'après (2,4) et (2,5):

(2,7) $$S(b, \mu(G_1)) \times F(G_2) \subset S(b, \mu(G_2)) \times F(G_2) = 0$$

donc:

(2,8) $$\overline{bb'} \times F(G_2) \subset [S(b, \mu(G_1)) \times F(G_2)] + [K(G_1) \times F(G_2)] = 0.$$

Comme $b \subset G_2$, il s'ensuit: $b' \subset G_2$, donc:

(2,9) $$K(G_1) \times G_2 \neq 0.$$

$K(G_1)$ étant continu et $K(G_1) \times F(G_2) = 0$, on aura par suite:

(2,91) $$K(G_1) \subset G_2 \qquad \text{c. q. f. d.}$$

3. Soit maintenant C un continu plan, indécomposable et borné. Désignons par $H_1, H_2 \dots$ les régions-composantes de $R_2 - C$.

Un point z de C est *accessible de* H_i, s'il existe un arc simple J à extrémité z, tel que $J - z \subset H_i$.

Soit Γ l'ensemble de tous les ensembles $\mathfrak{P}$ de C, qui contiennent plus d'un point accessible, Γ_i l'ensemble de tous les ensembles $\mathfrak{P}$ de C, qui contiennent au moins deux points accessibles de H_i, enfin Γ_{ik} l'ensemble de tous les ensembles $\mathfrak{P}$ de C qui contiennent un point accessible de H_i et un point (non necessairement différent du précédent) accessible de H_k.

On a évidemment:

(3,1) $$\Gamma = \sum \Gamma_i + \sum \Gamma_{ik} \quad i, k = 1, 2 \dots \quad i \neq k$$

Pour démontrer nôtre théorème, il suffit par suite de montrer, que les ensembles Γ_i, Γ_{ik} sont au plus dénombrables.

4. *Γ_i est fini ou dénombrable.*

Supposons au contraire que Γ_i est non dénombrable, pour un certain indice i.

Soit $\mathfrak{P}^*$ un ensemble $\mathfrak{P}$ tiré de Γ_i; $\mathfrak{P}^*$ contient deux points $c_1(\mathfrak{P}^*)$ et $c_2(\mathfrak{P}^*)$ accessibles de H_i. Il en résulte facilement l'existence d'un arc simple $L(\mathfrak{P}^*)$ aux extremités $c_1(\mathfrak{P}^*)$ et $c_2(\mathfrak{P}^*)$, tel que:

(4,1) $$L(\mathfrak{P}^*) - [c_1(\mathfrak{P}^*)] + c_2(\mathfrak{P}^*)] \subset H_i.$$

D'autre part il existe un continu $M(\mathfrak{P}^*) \subset \mathfrak{P}^* \subset C$, irréductible entre $c_1(\mathfrak{P}^*)$ et $c_2(\mathfrak{P}^*)$. D'après (4,1) on aura:

(4,2) $$L(\mathfrak{P}^*) \times M(\mathfrak{P}^*) = c_1(\mathfrak{P}^*) + c_2(\mathfrak{P}^*).$$

Donc, d'après un théorème de M. Kuratowski[2]) le continu

(4,3) $$N(\mathfrak{P}^*) = L(\mathfrak{P}^*) + M(\mathfrak{P}^*)$$

[2]) Kuratowski. *Fund. Math.* XII, p. 235—239. Théorème VII: La condition necessaire et suffisante pour qu'un continu décomposable borné C soit une coupure irréductible entre deux points est qu'on ait: $C = I + K$; $I \times K = M + N$; $M \times N = 0$; $M \neq 0 \neq N$, où M et N sont deux ensembles fermés et I et K deux continus irréductibles entre M et N.

est une *coupure irréductible* entre deux points du plan. D'autre part, $\mathfrak{P}^{**}$ étant un ensemble $\mathfrak{P}$ de Γ_i différent de $\mathfrak{P}^*$ on aura d'après (4,1):

$$(4,31)\quad N(\mathfrak{P}^{**}) \times M(\mathfrak{P}^*) = [L(\mathfrak{P}^{**}) \times M(\mathfrak{P}^*)] + [M(\mathfrak{P}^{**}) \times \times M(\mathfrak{P}^*)] \subset [H_i \times C] + [\mathfrak{P}^* \times \mathfrak{P}^{**}] = 0.$$

On a enfin:

$$(4,4)\quad M(\mathfrak{P}^*) - \overline{(N(\mathfrak{P}^*) - M(\mathfrak{P}^*))} = M(\mathfrak{P}^*) - [c_1(\mathfrak{P}^*) + c_2(\mathfrak{P}^*)] \neq 0.$$

Soit maintenant $\mathfrak{P}_1$ un ensemble $\mathfrak{P}$ de Γ_i, arbitrairement fixé. Supposons que $\mathfrak{P}^*$ est un ensemble $\mathfrak{P}$ de Γ_i *différent de* $\mathfrak{P}_1$. D'après (4,31) on a: $N(\mathfrak{P}^*) \times M(\mathfrak{P}_1) = 0$ donc $M(\mathfrak{P}_1)$ étant continu est contenu dans une seule région-composante de $R_2 - N(\mathfrak{P}^*)$. D'autre part $N(\mathfrak{P}^*)$ étant coupure irréductible entre deux points du plan, il existe parmi ces régions composantes deux au moins, dont la frontière coincide avec $N(\mathfrak{P}^*)$ [3]) Donc il existe une région composante de $R_2 - N(\mathfrak{P}^*)$, désignons la par $G(\mathfrak{P}^*)$, qui satisfait aux conditions:

$$(4,51)\quad G(\mathfrak{P}^*) \times M(\mathfrak{P}_1) = 0$$

$$(4,52)\quad F(G(\mathfrak{P}^*)) = N(\mathfrak{P}^*).$$

Posons encore $K(G(\mathfrak{P}^*)) = M(\mathfrak{P}^*)$. $\mathfrak{P}^*$ parcourant tous les éléments du Γ_i differents de $\mathfrak{P}_1$, les $G(\mathfrak{P}^*)$ forment une famille non dénombrable Φ. Les relations (4,3), (4,31), (4,4), (4,52) montrent que les domaines $G(\mathfrak{P}^*)$ de cette famille et les continus $K(G(\mathfrak{P}^*))$ qui leur sont attachés satisfont aux conditions du Lemme 2. Donc il existe dans Γ_i deux ensembles $\mathfrak{P}$: $\mathfrak{P}_1^*$ et $\mathfrak{P}_2^*$ tels que:

$$(4,61)\quad G(\mathfrak{P}_2^*) \times M(\mathfrak{P}_1) = 0$$

$$(4,62)\quad M(\mathfrak{P}_1^*) \subset G(\mathfrak{P}_2^*)$$

$$(4,63)\quad N(\mathfrak{P}_2^*) = F(G(\mathfrak{P}_2^*))$$

c. à d. $N(\mathfrak{P}_2^*)$ est une coupure du plan entre les continus $M(\mathfrak{P}_1)$ et $M(\mathfrak{P}_1^*)$.

Comme d'autre part $\mathfrak{P}_1 \supset C \supset M(\mathfrak{P}_1^*)$ et $\mathfrak{P}_1$ est semicontinu, *il en résulte la relation contradictoire*:

$$(4,7)\quad 0 \neq \mathfrak{P}_1 \times N(\mathfrak{P}_2^*) \subset \mathfrak{P}_1 \times [H_i + \mathfrak{P}_2^*] \subset [\mathfrak{P}_1 \times (R_2 - C)] + + (\mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{P}_2^*) = 0.$$

[3]) Kuratowski. *Fund. Math.* VI, p. 133—134. Théorème III: Pour qu'un ensemble fermé E soit une coupure irréductible entre a_1 et a_2 il faut et il suffit que a_1 et a_2 appartiennent à deux régions différentes T_1 et T_2 de $R_2 - E$ et que l'on ait: $E = F(T_1) = F(T_2)$.

Donc Γ_i est dénombrable ou fini c. q. f. d.

5. Γ_{ik} *contient un élément au plus.*

Supposons en effet que pour un certain couple d'indices i, k, $(i \neq k)$, Γ_{ik} contient deux ensembles $\mathfrak{P}$: $\mathfrak{P}_2$ et $\mathfrak{P}_3$. $\mathfrak{P}_2$ contient un point p_2 accessible de H_i et un point q_2 accessible de H_k et de même $\mathfrak{P}_3$ — un point p_3 accessible de H_i et un point q_3 accessible de H_k. On peut trouver sans peine quatre arcs simples: (up_2), (up_3), (vq_2), (vq_3) et deux continus irréductibles: $(p_2 q_2)$, $(p_3 q_3)$ satisfaisant aux conditions:

$$(5,1)\quad (up_2) + (up_3) - (p_2 + p_3) \subset H_i$$

$$(5,2)\quad (vq_2) + (vq_3) - (q_2 + q_3) \subset H_k$$

$$(5,3)\quad (p_2 q_2) \subset \mathfrak{P}_2; \quad (p_3 q_3) \subset \mathfrak{P}_3$$

$$(5,4)\quad [(up_2) + (p_2 q_2) + (vq_2)] \times [(up_3) + (p_3 q_3) + (vq_3)] = u + v.$$

Posons:

$$(5,51)\quad (up_2) + (p_2 q_2) + (vq_2) - (u + v) = A$$

$$(5,52)\quad (up_3) + (p_3 q_3) + (vq_3) - (u + v) = B.$$

D'après (5,4), (5,51), (5,52) les ensembles A et B sont connexes et séparés et l'ensemble $\overline{A} \times \overline{B} = u + v$ est punctiforme. Il existe par suite entre ces ensembles un *séparateur normé* S, qui est une courbe simple fermée [4]). On aura:

$$(5,6)\quad S \times (\overline{A} + \overline{B}) = \overline{A} \times \overline{B} = u + v.$$

L'ensemble $S - (u + v)$ est formé par deux arcs-composants: S_1 et S_2 et ces deux arcs (ouverts) sont situés respectivement dans deux *regions intermediaires* entre $\overline{A}$ et $\overline{B}$ [5]); il en résulte que $\overline{A} + \overline{B}$ est une coupure entre S_1 et S_2. D'autre par $\overline{S}_1$ est un arc simple réunissant les point u et v. Ces points appartiennent respectivement à H_i et H_k donc à deux régions-composantes différentes de $R_2 - C$. Donc:

$$(5,71)\quad S_1 \times C = (S_1 \times C) + [(u + v) \times C] = \overline{S}_1 \times C \neq 0$$

[4]) Kuratowski: *Fund. Math.* XII, p. 214—239. en particulier — definition d'un séparateur p. 217, existence des séparateurs, p. 217, Théorème I et p. 221 Corollaire 3.

[5]) Kuratowski: l. c. p. 227. Corollaire I.

et de même

(5,72) $$S_2 \times C \neq 0.$$

Soit z_1 un point de $S_1 \times C_1$ z_2 — un point de $S_2 \times C$, $\mathfrak{P}_4$ un ensemble $\mathfrak{P}$ différent de $\mathfrak{P}_2$ et $\mathfrak{P}_3$. $\overline{A}+\overline{B}$ est une coupure entre z_1 et z_2, d'autre part $\overline{\mathfrak{P}}_4 \supset z_1 + z_2$ et $\mathfrak{P}_4$ est semicontinu. Il en résulte la relation contradictoire:

(5,8) $$0 \neq \mathfrak{P}_4 \times (\overline{A}+\overline{B}) \subset \mathfrak{P}_4 \times (H_i + H_k + \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_3) = 0.$$

Donc Γ_{ik} ne peut contenir plus d'un élément c. q. f. d.

Le théorème **1** est ainsi démontré en vertu de (3,1), **4**, **5**.

Sur un théorème de MM. Banach et Kuratowski.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

MM. Banach et Kuratowski ont démontré [1]), en utilisant l'hypothèse que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, ce

Théorème A. *E désignant l'intervalle* (0, 1), *il existe une double suite d'ensembles* A_k^i *telle que*: 1°:

$$\begin{aligned} E &= A_1^1 + A_2^1 + \ldots + A_k^1 + \ldots, \\ E &= A_1^2 + A_2^2 + \ldots + A_k^2 + \ldots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ E &= A_1^i + A_2^i + \ldots + A_k^i + \ldots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

2: *les ensembles d'une même ligne sont disjoints*, 3°: *quelle que soit la suite d'entiers positifs* $k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots$, *le produit*

$$\prod_{i=1}^{\infty} (A_1^i + A_2^i + \ldots + A_{k_i}^i)$$

est au plus dénombrable.

Le but de cette Note est de démontrer, *sans admettre l'hypothèse*: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, que *le théorème A est équivalent au théorème B suivant* [2]):

[1]) *Fund. Math.* t. XIV, p. 128.

[2]) Étant données deux suites d'entiers positifs $S = \{k_i\}$ et $T = \{n_i\}$, MM. Banach et Kuratowski conviennent d'écrire $T \prec S$, lorsque $n_i \leqslant k_i$, quel que soit i, et démontrent (l. c., p. 130) que le théorème A est équivalent à la proposition suivante: *Il existe une famille* F, *de la puissance du continu, ayant comme éléments des suites d'entiers positifs et telle que, pour chaque suite* S *(qu'elle appartienne à* F *ou non), l'ensemble des suites* T *de* F *telles que* $T \prec S$ *est au plus dénombrable.* Cette proposition est donc aussi équivalente à notre théorème B.