# Sur un problème de M. Steinhaus.

Par

L. Kantorovitch (Leningrad).

Dans le tome VI de ce journal*) M. H. Steinhaus a posé le problème suivant:

Soit $\{E_n\}$ une suite des ensembles linéaires, situés dans $(0, 1)$ et mesurables $(L)$. Soit $\varphi_n(t)$ la fonction égale à $\pm 1$ suivant que $t$ appartient ou n'appartient pas à $E_n$. On demande *s'il existe une suite croissante d'entiers positifs $\{u_i\}$, telle qu'on ait*

$$\limsup_{k\to\infty}\left|\sum_{i=1}^{k}\varphi_{u_i}(t)\right| = \infty \tag{1}$$

*presque partout dans* $(0, 1)$

Nous nous proposons dans cette Note de donner la démonstration de cet énoncé, en s'appuyant sur les deux lemmes suivants.

***Lemme I.*** *Soient $A_1, A_2, \ldots, A_q$ des ensembles, contenus dans $(0, 1)$ et mesurables $(L)$, tels que chaque point de l'intervalle $(0, 1)$ appartient à $p$ (au moins) de ces ensembles. Alors il en existe un ensemble $A_i$, tel que mes $A_i \geqslant \frac{p}{q}$.*

La démonstration est immédiate.

***Lemme II.*** *Soit*

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2n} \tag{2}$$

*un système des nombres dont chacun est égal à $\pm 1$. Considérons tous les systèmes partiels possibles de symboles*

$$\varphi_{\nu_1}, \varphi_{\nu_2}, \ldots, \varphi_{\nu_n}, \qquad (\nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_n) \tag{3}$$

*) P. 308, problème 45. V. aussi la correction dans le tome XII, p. 311.



*dont le nombre total est $C_{2n}^n$, et désignons par $I_{n,m}$ le nombre de ceux de ces systèmes, pour lesquels on a l'inégalité:*

$$\left|\sum_{i=1}^{i=n}\varphi_{\nu_i}\right| \qquad m, \tag{4}$$

*$m$ étant un nombre naturel donné $(< n)$. Alors on aura:*

$$\alpha_{n,m} = \frac{I_{n,m}}{C_{2n}^n} < \frac{2m}{\sqrt{n}}. \tag{5}$$

Démonstration. Désignons par $k$, resp. $l$, le nombre des unités positives dans le système (2), resp. (3); alors le nombre des unités négatives sera $2n-k$, resp. $n-l$. Pour que l'inégalité (4) ait lieu, il faut et il suffit qu'on ait

$$|2l-n| < m, \quad \text{ou} \quad \frac{n-m}{2} < l < \frac{n+m}{2}.$$

Nous avons évidemment

$$I_{n,m} = \sum_l C_k^l\, C_{2n-k}^{n-l},$$

où la sommation s'étend précisément aux valeurs de $l$, satisfaisant aux relations précédentes et dont le nombre est $m$ au plus. Il est facile de vérifier que le maximé de l'expression $C_k^l \cdot C_{2n-k}^{n-l}$ est atteint pour $k = 2l$ et $l = \frac{n}{2}$ ou $\frac{n \pm 1}{2}$, suivant que le nombre $n$ est pair ou non. Donc, on aura (en donnant à $l$ la valeur ci-dessus)

$$\alpha_{n,m} \leqslant m\,\frac{C_{2l}^l\, C_{2n-2l}^{n-l}}{C_{2n}^n}.$$

A l'aide de la formule connue de Stirling, il en résulte l'inégalité (5), c. q. f. d.

Ceci établi, nous allons démontrer la proposition de M. Steinhaus, citée au début.

Prenons à volonté une série convergente $\sum_{i=1}^{\infty}\epsilon_i$ à termes positifs.

En posant $m_1=1$, choisissons $n_1>m_1$ de manière qu'on ait

$$\frac{2m_1}{\sqrt{n_1}}<\epsilon_1,$$

puis, posons $m_2=4n_1$, choisissons $n_2>m_2$ de manière qu'on ait

$$\frac{2m_2}{\sqrt{n_2}}<\epsilon_2,$$

et ainsi de suite. D'une façon générale, après avoir défini $m_{i-1}$, $n_{i-1}$, on pose $m_i=4n_{i-1}$ et on choisit $n_i>m_i$ de manière qu'on ait

$$\frac{2m_i}{\sqrt{n_i}}<\epsilon_i. \tag{6}$$

Evidemment, on a

$$\lim_{i\to\infty} n_i=\infty. \tag{7}$$

Considérons un point quelconque $t$ de l'intervalle (0, 1) et le système correspondant des nombres $\pm 1$:

$$\varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ldots,\ \varphi_{2n_i}(t).$$

D'après le lemme II [v. (5), (6)], le nombre de systèmes partiels

$$\varphi_{\nu_1}(t),\ \varphi_{\nu_2}(t),\ldots,\ \varphi_{\nu_{n_i}}(t), \qquad (\nu_1>\nu_2>\ldots>\nu_{n_i})$$

tels que l'on ait l'inégalité

$$\left|\sum_{j=1}^{j=n_i}\varphi_{\nu_j}(t)\right|\geqslant m_i, \tag{8}$$

surpasse le nombre

$$p_i=C_{2n_i}^{n_i}\cdot(1-\epsilon_i).$$

En désignant par $A_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_{n_i}}$ l'ensemble (évidemment, mesurable) de points $t$ satisfaisant pour les indices donnés à la condition (8), on voit que chaque point $t$ appartient à $p_i$ au moins de ces ensembles, dont le nombre total est $q_i=C_{2n_i}^{n}$. Alors, en vertu du lemme I, on peut choisir un système des $n_i$ indices

$$\nu_1^{(i)},\ \nu_2^{(i)},\ldots,\ \nu_{n_i}^{(i)}, \qquad (\nu_1^{(i)}>\nu_2^{(i)}>\ldots>\nu_{n_i}^{(i)}) \tag{9}$$



de sorte que l'on ait pour l'ensemble $A$ correspondant-désignons le par $A_i$ —

$$\text{mes}\, A_i\geqslant\frac{p_i}{q_i}=1-\epsilon_i. \tag{10}$$

Si $t\,\epsilon\,A_i$, on a, d'après la définition même des ensembles $A$,

$$\left|\sum_{j=1}^{j=n_i}\varphi_{\nu_j^{(i)}}(t)\right|\geqslant m_i.$$

Supprimons du système (9) (bien entendu, si $i>1$) tous le nombres $\nu_j^{(i)}$ qui ne surpassent pas $2n_{i-1}$; soit $s_i$ le nombre de ceux qui resteront.

Alors on aura

$$\left|\sum_{j=1}^{j=s_i}\varphi_{\nu_j^{(i)}}(t)\right|\geqslant\left|\sum_{j=1}^{j=n_i}\varphi_{\nu_j^{(i)}}(t)\right|-\left|\sum_{j=s_i+1}^{j=n_i}\varphi_{\nu_j^{(i)}}(t)\right|\geqslant m_i-2n_{i-1}=2n_{i-1}. \tag{11}$$

Rangeons maintenant tous les indices des systèmes n'empiétant pas

$$\nu_1^{(1)},\ \nu_2^{(1)},\ldots,\ \nu_{s_1}^{(1)};\quad \nu_1^{(2)},\ \nu_2^{(2)},\ldots,\ \nu_{s_2}^{(2)};\quad \nu_1^{(3)},\ \nu_2^{(3)},\ldots,\ \nu_{s_3}^{(3)};\ldots$$

en une suite infinie croissante

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ldots,\ u_k,\ldots\ .$$

Posons

$$A=\liminf A_i=\sum_{h=1}^{\infty}\prod_{i=h}^{\infty}A_i.$$

La série $\sum\varepsilon_i$ étant convergente, on aura, vu (10), mes$A=1$. Nous allons montrer que l'on a la relation (1) en chaque point $t\,\varepsilon\,A$.

En effet, si $t\,\varepsilon\,A$, on a également $t\,\varepsilon\,A_i$, pour les valeurs de $i$ suffisamment grandes. Soit $i$ une de ces valeurs, et posons $k_i=n_1+ +s_2+\ldots+s_i$. Il vient, vu (1),

$$\left|\sum_{j=1}^{j=k_i}\varphi_{u_j}(t)\right|\geqslant\left|\sum_{j=k_{i-1}+1}^{j=k_i}\varphi_{u_j}(t)\right|-\left|\sum_{j=1}^{j=k_{i-1}}\varphi_{u_j}(t)\right|\geqslant 2n_{i-1}-k_{i-1}.$$

Or, on a, d'autre part,

$$k_{i-1} = n_1 + s_2 + \ldots + s_{i-1} \leqslant n_1 + n_2 + \ldots + n_{i-1} \leqslant n_{i-1} + \tfrac{1}{4} n_{i-1} + \\ + \tfrac{1}{4^2} n_{i-1} + \ldots = \tfrac{4}{3} n_{i-1},$$

d'où il résulte définitivement

$$\left| \sum_{j=1}^{j=k_i} \varphi_{n_j}(t) \right| \geqslant \tfrac{2}{3} n_{i-1};$$

cela, vu (7), implique la relation (1) à démontrer.

# Un théorème sur l'accessibilité des continus indécomposables.

Par

Stefan Mazurkiewicz (Varsovie).

1. Le but de cette Note est de compléter les résultats d'une communication antérieure [1]), par la démonstration du théorème suivant.

*$C$ étant un continu indécomposable, plan est borné, l'ensemble de ses ensembles $\mathfrak{P}$ qui contiennent plus d'un point accessible est fini ou dénombrable.*

2. Lemme. *Soit $\Phi$ une famille non dénombrable de domaines du $R_n$. Supposons qu'a tout domaine $G$ de la famille $\Phi$ correspond un continu $K(G)$, remplissant les conditions suivantes:* 1) $K(G) \subset F(G)$; 2) $K(G)$ *n'est pas un continu de condensation de* $F(G)$, *c. à d.* $K(G) - (\overline{F(G) - K(G)}) \neq 0$; 3) $G$ *et* $G^*$ *étant deux domaines différents de* $\Phi$, *on a:* $K(G) \times F(G^*) = 0$. *La famille $\Phi$ contient alors deux domaines $G_1$ et $G_2$, tels que* $K(G_1) \subset G_2$.

Démonstration. Rangeons en une suite infinie:

$$S_1, S_2, \ldots \tag{2,1}$$

les sphéres du $R_n$ dont les coordonnées du centre et le rayon sont rationnels. $G$ étant un domaine de $\Phi$, il existe dans la suite (2,1) des sphères $S_i$, remplissant les conditions:

$$\text{le centre de } S_i \subset G \tag{2,21}$$

$$\overline{S_i} \times K(G) \neq 0 \tag{2,22}$$

$$\overline{S_i} \times \overline{(F(G) - K(G))} \tag{2,23}$$

[1]) *Fund. Math.*, ce volume p 107—115; comp. p. la erminologie et les notations.