Sur les fonctions représentables implicitement par fonctions continues.

Par

Valère Glivenko (Moscou).

Désignons d'une manière générale par $E(x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_n)$ l'espace euclidien à $m+n$ dimensions rapporté à un système de référence $(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$ d'axes rectangulaires.

Considérons le système d'équations

$$
(1) \qquad \begin{aligned} &F_1(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) = 0, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &F_s(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) = 0, \end{aligned}
$$

où les F sont des fonctions continues définies partout dans l'espace $E(x_1 \dots x_p, y_1 \dots y_q)$, et supposons qu'à tout point $P(\xi_1 \dots \xi_p)$ de l'espace partiel $E(x_1 \dots x_p)$ correspond au plus un point $Q(\eta_1 \dots \eta_q)$ appartenant à l'espace $E(y_1 \dots y_q)$ et tel que les relations $x_1 = \xi_1, \dots, x_p = \xi_p$, $y_1 = \eta_1, \dots, y_q = \eta_q$ vérifient simultanément les équations (1). Autrement dit, supposons que ces équations ci définissent les q *fonctions uniformes*

$$
\begin{aligned} &y_1 = f_1(x_1, \dots, x_p), \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &y_q = f_q(x_1, \dots, x_p) \end{aligned}
$$

Toutes les fonctions f que l'on peut définir de cette manière, nous les appelerons fonctions *implicitement continues*.

Cette classe de fonctions mérite une attention parce qu'elle embrasse toutes les fonctions uniformes qui peuvent être définies au moyen d'un nombre fini d'opérations continues effectuées sur la totalité des nombres réels, ce qui sera précisé dans la première section du présent article.

Dans les sections suivantes, je me propose d'étudier les propriétés générales des fonctions implicitement continues et d'en faire quelques applications.

Qu'il me soit permis de remercier ici MM. N. Lusin et A. Khintchine qui n'ont cessé de s'intéresser à mes recherches et dont les conseils m'ont été fort utiles.

I.

Commençons par démontrer un théorème qui contient en germe tous les résultats du présent travail:

Pour qu'une fonction soit implicitement continue, il faut et il suffit que son image[1]) *soit la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés.*

Reprenons en effet le système d'équations (1). Les fonctions F étant continues partout dans l'espace $E(x_1 \dots x_p, y_1 \dots y_q)$, l'ensemble des points de cet espace où toutes ces fonctions sont nulles à la fois est fermé. Or, l'image d'une fonction $y_k = f_k(x_1, \dots, x_p)$ définie par les équations (1) n'est que la projection orthogonale, sur l'espace partiel $E(x_1 \dots x_p, y_k)$, dudit ensemble fermé: elle est donc la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés.

Réciproquement, soit donnée une fonction $y = f(x_1, \dots x_p)$ dont l'image est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés

Remarquons que cette image peut être considérée comme la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés bornés (donc compacts) et rangés de la manière qu'ils forment une suite non décroissante: c'est immédiat. Désignons par $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ cette suite d'ensembles, et désignons respectivement par $\overline{C}_1, \overline{C}_2, \dots, \overline{C}_n, \dots$ les

[1]) On appelle, suivant une dénomination due à M. W. Sierpiński, *image d'une fonction f* de p variables l'ensemble de tous les points $P(x_1, \dots x_p, y)$ qui satisfont à l'egalité $y = f(x_1, \dots, x_p)$.

projections orthogonales, sur l'espace $E(x_1 \dots x_p)$, des ensembles de la suite.

Cela posé, soient $c_1(x_1, \dots, x_p)$, $c_2(x_1, \dots, x_p), \dots$ $c_n(x_1, \dots, x_p), \dots$ les distances respectives des ensembles $\overline{C}_1, \overline{C}_2, \dots, \overline{C}_n, \dots$ et du point $P(x_1 \dots x_p)$, et considérons une fonction auxiliaire $z = \varphi(x_1, \dots, x_p)$ définie dans le même ensemble de points que $y = f(x_1, \dots, x_p)$, et cela par les conditions suivantes:

$$\varphi(x_1, \dots, x_p) = 0, \quad \text{dans} \quad \overline{C}_1,$$

$$\varphi(x_1, \dots, x_p) = n + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{c_k(x_1, \dots, x_p)} \quad \text{dans} \quad \overline{C}_{n+1} - \overline{C}_n.$$

Soit D l'ensemble de tous les points de l'espace auxiliaire $E(x_1 \dots x_p, y, z)$ qui satisfont aux égalités $y = f(x_1, \dots, x_p)$ et $z = \varphi(x_1, \dots, x_p)$. D est fermé. Donc, il existe une fonction continue $F(x_1, \dots, x_p, y, z)$ s'annulant dans D et dans D seulement [2]). L'équation

$$(2) \qquad F(x_1, \dots, x_p, y, z) = 0$$

définit implicitement la fonction donnée $y = f$ (et la fonction auxiliaire $z = \varphi$).

Le théorème est démontré. Remarquons encore que l'introduction d'une variable auxiliaire z est indispensable. En effet, si l'équation (2), ou même le système d'équations (1), ne contenait qu'une seule variable à déterminer en fonction de tous les autres, la fonction ainsi définie n'aurait pour son image qu'un ensemble fermé, ce qui est aisé de vérifier.

En tenant compte du théorème démontré, il est aisé de voir que *la substitution, dans les équations (1), des fonctions implicitement continues au lieu des fonctions continues F ne nous fournirait que des*

[2]) Il est à remarquer que la fonction F peut être choisie de la manière qu'elle *possède toutes les dérivées partielles de tous les ordres.* MM. K. Knopp et R. Schmidt ont proposé une méthode générale pour obtenir de telles fonctions s'annulant dans les points d'un ensemble fermé partout non dense et dans ces points seulement (*Mathem. Zeitschr.* 25 (1926), p. 373); or, l'ensemble fermé D est manifestement partout non dense.

fonctions implicitement continues f. D'une manière générale, soit donné un système d'équations contenant des paramètres,

$$(3) \qquad \begin{array}{l} G_1(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q, t_1, \dots, t_r) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ G_s(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q, t_1, \dots, t_r) = 0, \end{array}$$

où les G sont des fonctions implicitement continues, et supposons que ce système-ci définit d'une manière univoque les q fonctions

$$\begin{array}{l} y_1 = g_1(x_1, \dots, x_p), \\ \dots\dots\dots \\ y_q = g_q(x_1, \dots, x_p). \end{array}$$

Je dis que ces fonctions g sont elles-mêmes des fonctions implicitement continues. En effet, les fonctions G ayant pour ses images des sommes d'infinités dénombrables d'ensembles fermés, l'ensemble des points de l'espace $E(x_1 \dots x_p, y_1 \dots y_q, t_1 \dots t_r)$ où toutes ces fonctions sont nulles à la fois est, luiaussi, la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés. Donc, il en est de même des images des fonctions g_k qui ne sont que les projections orthogonales, sur les espaces partiels $E(x_1 \dots x_p, y_k)$, dudit ensemble [3]).

II.

Étudions maintenant la distribution des points de discontinuité des fonctions implicitement continues.

Dans tout ce qui suit, nous employerons les abréviations suivantes:

[3]) On voit sans peine que la représentation paramétrique proprement dite,

$$\begin{array}{ll} x_i = x_i(t_1, \dots, t_r) & (i = 1, 2, \dots, p), \\ y_k = y_k(t_1, \dots, t_r) & (k = 1, 2, \dots, q), \end{array}$$

de même que la formation des fonctions de fonctions, des fonctions inverses etc., rentrent dans le cas considéré.

De plus, le résultat établi et tous les raisonnements restent intacts si l'on suppose que le système d'équations (3) fait correspondre, à un point $P(x_1, \dots, x_p)$, plusieurs valeurs y_k et si l'on y considère les fonctions g_k comme fonctions multiformes *prenant toutes ces valeurs à la fois.*

un point $P(x_1 \dots x_p)$, nous le désignerons simplement par P;
une fonction $f(x_1, \dots, x_p)$ considérée exclusivement dans un ensemble donné D, nous la désignerons, d'après M. F. Hausdorff, par $f(P \mid D)$.

Cela posé, démontrons le théorème fondamental:

Pour qu'une fonction $f(P)$ soit implicitement continue, il faut et et il suffit qu'elle soit définie dans la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés et que, quel que soit l'ensemble fermé D contenu dans son domaine d'existence, l'ensemble des points de discontinuité de $f(P \mid D)$ soit non dense dans D.

Dans la section précédente, nous avons démontré que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit implicitement continue est que son image soit la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés. Il en résultent immédiatement les deux propositions suivantes:

pour qu'une fonction soit implicitement continue, il faut et il suffit qu'elle le soit au voisinage[4]) de tout point de son domaine d'existence

pour qu'une fonction définie dans la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés soit implicitement continue, il faut et il suffit qu'elle le soit dans tout ensemble fermé contenu dans son domaine d'existence.

Soit maintenant $f(P)$ une fonction implicitement continue. Vu que son domaine d'existence n'ést que la projection orthogonale, sur l'espace $E(P)$, de son image, il est, luiaussi, la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés.

Fixons ensuite, dans le domaine d'existence de la fonction $f(P)$, un certain ensemble fermé D. L'image de la fonction $f(P \mid D)$ est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés; considérons-la comme la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés bornés $C_1, C_2, \dots C_n, \dots$ Les projections orthogonales, sur l'espace $E(P)$, de ces ensembles-ci, désignons-les respectivement par $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \dots, \bar{C}_n, \dots$ Il est clair que la fonction $f(P \mid D)$ est continue dans chacun des ensembles $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \dots, \bar{C}_n, \dots$ Or, d'après le théorème connu de M. R. Baire, il existe au moins un intervalle dans lequel l'ensemble total D coïncide avec l'un des ensembles partiels $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \dots, \bar{C}_n, \dots$ Dans cet intervalle-ci, la fonction $f(P \mid D)$ est continue, ce qui démontre la nécessité de la condition énoncée.

Pour démontrer la réciproque, considérons une fonction $f(P)$ définie dans la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés, et qui n'est pas une fonction implicitement continue. Le domaine d'existence de cette fonction doit contenir un ensemble fermé D dans lequel la fonction $f(P \mid D)$ n'est pas implicitement continue, et cet ensemble doit contenir des points au voisinage desquels cette fonction n'est pas implicitement continue. Il est évident que tous ces points de l'ensemble D en forment un sous-ensemble fermé D^*. Nous allons démontrer qu'il n'existe aucun intervalle dans lequel la fonction $f(P \mid D^*)$ soit continue.

Supposons au contraire qu'il existe un intervalle I tel que la fonction $f(P \mid D^* I)$ est continue, de sorte que son image est certainement la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés. Comme D^* est l'ensemble de tous les points de D au voisinage desquels la fonction $f(P \mid DI)$ n'est pas implicitement continue, la fonction $f(P \mid DI - D^* I)$ doit être, il est aisé de le voir, une fonction implicitement continue, de sorte que son image sera aussi la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés. Alors, l'image de la fonction $f(P \mid DI)$, qui est la somme de celles de $f(P \mid D^* I)$ et de $f(P \mid DI - D^* I)$, sera, elle-même, la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés. Cela veut dire que la fonction $f(P \mid D)$ sera implicitement continue au voisinage de tout point de $D^* I$, ce qui contredit à la définition même de l'ensemble D^*. Le théorème est ainsi complètement démontré.

Pour les fonctions définies dans des ensembles fermés, on pourrait assigner un critère effectif permettant de reconnaître si la fonction donnée est, ou non, une fonction implicitement continue.

Considérons une fonction quelconque $f(P)$ définie dans un ensemble D et définissons par récurrence une suite d'ensembles que voici:

D_0 est l'ensemble D lui-même;

ξ étant un nombre positif fini ou transfini de première espèce, D_ξ est l'ensemble des points de discontinuité de la fonction $f(P \mid D_{\xi-1})$;

[4]) On dira, comme habituellement, qu'une fonction $f(P)$ possède une certaine propriété *au voisinage* d'un certain point s'il existe un intervalle (ouvert) I contenant ce point et tel que la fonction $f(P \mid I)$ possède la propriété en question.

η étant un nombre transfini de deuxième espèce, D_η est la partie commune à tous les ensembles D_ξ aux indices ξ moindres que η.

S'il existe un nombre fini ou transfini ζ tel que D_ζ est vide, nous dirons que la fonction $f(P)$ est *à discontinuités exhaustibles*. Nous allons démontrer que, *pour qu'une fonction définie dans un ensemble fermé soit implicitement continue, il faut et il suffit qu'elle soit à discontinuités exhaustibles.*

Soit d'abord $f(P)$ une fonction implicitement continue définie dans un ensemble fermé D. Définissons par récurrence une nouvelle suite d'ensembles que voici:

D^0 est l'ensemble D lui-même;

ξ étant un nombre positif fini ou transfini de première espèce, D^ξ est le plus petit ensemble fermé contenant l'ensemble des points de discontinuité de la fonction $f(P \mid D^{\xi-1})$;

η étant un nombre transfini de deuxième espèce, D^η est la partie commune à tous les ensembles D^ξ aux indices ξ moindres que η.

Tous les ensembles de la suite sont fermés. En tenant compte du théorème fondamental qui vient d'être demontré, on voit que l'ensemble $D^{\xi+1}$ est toujours non dense dans l'ensemble D^ξ: il existe donc un nombre fini ou transfini $\zeta < \Omega$ tel que l'ensemble D^ζ est vide. Or, puisque l'ensemble D^ζ contient l'ensemble D_ζ défini plus haut, il en résulte que l'ensemble D_ζ est vide lui-même.

Réciproquement, soit $f(P)$ une fonction définie dans un ensemble fermé D et qui n'est pas implicitement continue. En vertu du théorème fondamental, il existe un ensemble fermé D_1^* contenu dans le domaine d'existence de $f(P)$ et tel que l'ensemble D_2^* des points de discontinuité de $f(P \mid D_1^*)$ est partout dense dans D_1^*.

Nous allons démontrer d'abord que, quel que soit l'intervalle I, on a

$$\max f(P \mid D_1^* I) = \max f(P \mid D_2^* I),$$
$$\min f(P \mid D_1^* I) = \min f(P \mid D_2^* I).$$

Comme on a évidemment

$$\max f(P \mid D_1^* I) \geqq \max f(P \mid D_2^* I),$$

il reste à démontrer qu'on a aussi

$$\max f(P \mid D_1^* I) \leqq \max f(P \mid D_2^* I).$$

Supposons, au contraire, qu'il existe un point P_1 de $D_1^* I - D_2^* I$ (c'est-à-dire le point de continuité de $f(P \mid D_1^* I)$) et un nombre positif ε tels que, quel que soit le point P_2 de $D_2^* I$ (c'est-à-dire le point de discontinuité de $f(P \mid D_1^* I)$), on a $f(P_1) - f(P_2) > \varepsilon$. Comme l'ensemble D_2^* est partout dense dans D_1^*, des points P_2 se trouveront dans tout intervalle contenant P_1. Donc, en vertu de l'inégalité $f(P_1) - f(P_2) > \varepsilon$, le point P_1 sera un point de discontinuité de $f(P \mid D_1^* I)$, ce qui contredit à la définition même du point P_1. Par suite, le maximum de $f(P \mid D_1^* I)$ ne peut pas surpasser celui de $f(P \mid D_2^* I)$. L'égalité des maximums est ainsi démontrée. De la même manière, on démontrerait l'égalité des minimums.

Des égalités qui viennent d'être démontrées, il résulte que les points de discontinuité de $f(P \mid D_1^*)$ coïncident avec ceux de $f(P \mid D_2^*)$, c'est-à-dire que l'ensemble D_2^* coïncide avec l'ensemble D_3^*. De plus, les deux ensembles consécutifs étant égaux etre eux, il en est de même pour tous les suivants, c'est immédiat. Or, il est évident que l'ensemble D_2^* tout entier fait partie de l'ensemble D_2, puis que l'ensemble D_3^* fait partie de l'ensemble D_3 et ainsi de suite. Il n'existe donc aucun indice ζ pour lequel l'ensemble D_ζ serait vide: la fonction $f(P)$ est à discontinuités inexhaustibles [5]).

III.

Nous allons voir que toute fonction implicitement continue définie dans un ensemble fermé est exprimable, à partir toujours des fonctions continues partout définies, d'une manière explicite, et cela par un procédé qui est caractéristique pour les fonctions implicitement continues.

Soit donnée une suite de fonctions continues partout définies, d'ailleurs quelconques:

[5]) Nous avons supposé les fonctions en question définies dans des ensembles fermés. C'est une condition indispensable; prenons, par exemple, une fonction $f(P)$ définie dans l'ensemble des points rationnels de l'espace $E(P)$, et cela de la manière suivante: tous les points rationnels étant rangés, d'une manière quelconque mais déterminée à l'avance, en une série simple $R_1, R_2, \ldots R_n, \ldots$ on pose $f(R_n) = (-1)^n$. L'image de cette fonction est un ensemble dénombrable, donc une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés; par suite, cette fonction est implicitement continue. Cependant, elle est à discontinuités inexhaustibles.

$$(f) \qquad f_1(P), f_2(P), \ldots, f_n(P) \ldots$$

Considérons l'ensemble de tous les points P tels qu'ils existe un entier N (dépendant en général du point donné) à partir duquel on a constamment:

$$f_{N+1}(P) = f_{N+2}(P) = \ldots = f_{N+n}(P) = \ldots$$

La limite de la suite (f) considérée exclusivement dans l'ensemble ainsi défini des points P, nous l'appelerons *fonction continue par parties*.

Cela posé, on peut démontrer le théorème suivant:

Pour qu'une fonction définie dans un ensemble fermé soit implicitement continue, il faut et il suffit qu'elle soit continue par parties.

En effet, soit $f(P)$ une fonction implicitement continue définie dans un ensemble fermé. Considérons l'image de cette fonction comme la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés bornés $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ croissants avec leurs indices. Les projections orthogonales, sur l'espace $E(P)$, de ces ensembles-ci, désignons-les, comme précédemment, par $\overline{C}_1, \overline{C}_2, \ldots, \overline{C}_n, \ldots$

Remarquons maintenant que chacune des fonctions $f(P \mid \overline{C}_1)$, $f(P \mid \overline{C}_2), \ldots, f(P \mid \overline{C}_n), \ldots$ peut être complétée de la manière qu'elle devienne partout définie, tout en restant continue: soient $F_1(P)$, $F_2(P), \ldots, F_n(P), \ldots$ les fonctions ainsi complétées. Soient ensuite $c_1(P)$, $c_2(P), \ldots, c_n(P), \ldots$ les distances respectives des ensembles $\overline{C}_1, \overline{C}_2, \ldots, \overline{C}_n, \ldots$ et du point P, et posons, pour $n = 1, 2, \ldots$:

$$f_{2n-1}(P) = F_n(P) - c_n(P),$$
$$f_{2n}(P) = F_n(P) + c_n(P).$$

La suite des fonctions $f_1(P), f_2(P), \ldots, f_n(P), \ldots$ donne naissance à une fonction continue par parties définie dans le domaine d'existence de $f(P)$ et coïncidant, dans ce domaine, avec $f(P)$ elle-même.

Réciproquement, soit $f_1(P), f_2(P), \ldots, f_n(P), \ldots$ une suite de fonctions continues partout définies. Les images $C_1, C_2, \ldots C_n, \ldots$ des fonctions $f_1(P), f_2(P), \ldots, f_n(P), \ldots$ sont des ensembles fermés, et l'image de la fonction continue par partie définie par cette suite de fonctions s'ecrira

$$C_1 C_2 C_3 \ldots + C_2 C_3 \ldots + C_3 \ldots + \ldots;$$

elle est donc la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés, c'est-à-dire que la fonction en question est implicitement continue.

Un autre problème qui se pose naturellement est celui de déterminer sous quelles conditions une suite convergente de fonctions continue a pour sa limite une fonction implicitement continue. Nous allons le résoudre pour une suite de fonctions continues

$$f_1(P), f_2(P), \ldots, f_n(P), \ldots$$

définies dans un ensemble fermé et convergeant vers une certaine fonction $f(P)$ dans tous les points de cet ensemble.

Convenons de dire que la convergence est *quasi uniforme par parties* si, à chaque point P, on peut faire correspondre un nombre naturel $L(P)$ tel que, étant donnés ensuite un nombre positif ε et un nombre naturel l choisis arbitrairement, on pourra trouver deux nombres M et N, de la manière que l'inégalité

$$|f(P) - f_r(P)| \leqq \varepsilon$$

ait lieu pour tous les points P vérifiant l'inégalité

$$L(P) \leqq l$$

et pour un au moins indice r, variable peut-être avec P, mais compris entre M et N.

Nous allons démontrer que, *pour qu'une suite de fonctions continues définie dans un ensemble fermé et convergente partout dans cet ensemble ait pour sa limite une fonction implicitement continue, il faut et il suffit que la convergence soit quasi uniforme par parties* [6]).

En effet, soit $f(P)$ une fonction implicitement continue. Considérons, de même que nous l'avons fait dans la démonstration du théorème précédent, l'image de cette fonction comme la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés bornés $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ croissants avec leurs indices, et soient de nouveau $\overline{C}_1, \overline{C}_2, \ldots, \overline{C}_n, \ldots$ les projections orthogonales, sur l'espace $E(P)$, de ces ensembles.

Soit donnée maintenant une suite de fonctions continues définies dans le domaine d'existence de la fonction $f(P)$ et convergeant vers

[6]) Malgré la complexité de ce critère, il fournit des applications importantes, dont nous verrons un exemple dans la section suivante.

cette fonction. Pour se convaincre que la convergence est quasi uniforme par parties, il suffit de poser:

$$L(P) = 1 \quad \text{dans } \overline{C}_1,$$
$$L(P) = n+1 \quad \text{dans } \overline{C}_{n+1} - \overline{C}_n.$$

En effet, l'inégalité $L(P) \leqq l$ définit un ensemble fermé borné de points P dans lequel la fonction limite est continue. Donc, dans cet ensemble la convergence doit être simplement quasi uniforme. En exprimant qu'il en est ainsi quel que soit l, on retrouve la définition même de la convergence quasi uniforme par parties.

Pour démontrer la réciproque, nous sommes obligés de démontrer préalablement la proposition suivante: la quasi uniformité par parties de la convergence d'une suite de fonctions continues dans un ensemble fermé étant une fois établie, les nombres $L(P)$ peuvent être choisis de la manière que l'ensemble des points P pour lesquels on a $L(P) \leqq l$ soit fermé quel que soit le nombre naturel l.

En effet, ou bien il en est déjà ainsi d'après le procédé même par lequel la quasi uniformité par parties a été établie; alors il n'y a rien à démontrer. Ou bien, la quasi uniformité par parties a été établie par un autre choix des nombres $L(P)$, savoir par un choix pour lequel il existe des nombres l tels que les ensembles des points pour lesquels on a $L(P) \leqq l$ possèdent des points limites P n'appartenant pas à ces ensembles; alors le choix primitivement effectué des nombres $L(P)$ peut être modifié par une suite d'opérations dont la p-ème consiste en ce que l'on pose $L(P) = p$ dans les points de l'ensemble où l'on a eu la même égalité depuis l'opération précédente, et dans les points limites dudit ensemble pour lesquels on a eu, depuis l'opération précédente, $L(P) > p$. En voici la démonstration:

Fixons un nombre naturel l et prenons, dans l'ensemble des points P pour lesquels on a $L(P) \leqq l$, une suite de points $P_1, P_2, \ldots, P_\nu, \ldots$ tendant vers un point P_0. Alors, en vertu de la définition même de la convergence quasi uniforme par parties, si nous fixons un nombre $\varepsilon > 0$, on peut trouver deux nombres M et N tels que l'on ait

$$|f(P_\nu) - f_r(P_\nu)| \leqq \varepsilon$$

pour tous les points P_ν et pour un au moins indice r compris entre M et N. Comme les indices r sont bornés en leur ensemble, on peut extraire une de la suite des points $P_1, P_2, \ldots, P_\nu, \ldots$ autre suite de points auxquels correspondent les indices r égaux entre eux. Soit $P'_1, P'_2, \ldots, P'_\nu, \ldots$ une telle suite de points. On a donc

$$(4) \qquad |f(P'_\nu) - f_s(P'_\nu)| \leqq \varepsilon$$

pour tous les points P'_ν et pour un indice fixe s vérifiant les inégalités

$$M < s < N.$$

Remarquons maintenant que, vu que la fonction $f_s(P)$ est continue, on peut extraire de la suite $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n \ldots$ une autre suite de points $P''_1, P''_2, \ldots, P''_\nu, \ldots$ tels que l'on ait

$$(5) \qquad |f_s(P_0) - f_s(P''_\nu)| < \eta$$

pour tous ces points P''_ν et pour un nombre positif η choisi arbitrairement. Or, pour l'ensemble des points $P''_1, P''_2, \ldots, P''_\nu, \ldots$ augmenté par l'addition d'un seul point P_0, l'ensemble des nombres $L(P)$ est borné, de sorte que la convergence quasi uniforme par parties y devient simplement quasi uniforme, et, parce que cet ensemble des points est fermé et borné, la fonction $f(P)$ y est continue. Donc, de la suite $P''_1, P''_2, \ldots, P''_\nu, \ldots$ on peut extraire une nouvelle suite de points $P'''_1, P'''_2, \ldots, P'''_\nu, \ldots$ tels que l'on ait

$$(6) \qquad |f(P_0) - f(P'''_\nu)| < \eta$$

pour tous ces points P'''_ν. En remarquant que tous les trois inégalités (4), (5) et (6) sont valables pour les points P'''_ν, on en déduit:

$$|f(P_0) - f_s(P_0)| < \varepsilon + 2\eta,$$

et, comme η est arbitraire,

$$|f(P_0) - f_s(P_0)| \leqq \varepsilon.$$

Rappelons que cette inégalité a lieu pour les nombres ε et l que nous avons préfixés et pour l'indice s tel que

$$M < s < N.$$

Cela montre que le point P_0 peut être ajouté à l'ensemble des points pour lesquels on a $L(P) \leqq l$ sans contrevenir à la détermination primitive de la quasi uniformité par parties.

Cela posé, soit donnée une suite de fonctions continues définie dans un ensemble fermé et convergente partout dans cet ensemble, la convergence étant quasi uniforme par parties. Choisissons les nombres $L(P)$ de la manière que, quel que soit le nombre naturel l, l'ensemble des points pour lesquels on a $L(P) \leqq l$ soit fermé. Il est aisé de voir que, dans chacun de ces ensembles, la fonction limite est continue, donc son image y est un ensemble fermé. Il en résulte que l'image totale de la fonction limite est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés, de sorte que cette fonction est implicitement continue [7]).

IV.

Signalons enfin une application du théorème précédent.

Toute fonction $f(x)$ finie, intégrable, définie dans un intervalle (a, b) et admettant partout dans (a, b) la dérivée seconde généralisée est une fonction implicitement continue.

C'est une conséquence d'un théorème de M. H. Auerbach [8]), à savoir: toute fonction $f(x)$ satisfaisant aux conditions énoncées peut être considérée comme la somme d'une série de fonctions,

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots,$$

continues dans (a, b) et satisfaisant à la condition suivante: il existe

[7]) Il est à remarquer que. étant donné, dans un ensemble fermé, une suite convergente quasi uniformément par parties de fonctions implicitement continues, la fonction limite n'est pas, en général, implicitement continue. Cela résulte du fait que *toute fonction limite des fonctions continues est la limite d'une suite* uniformément *convergente de fonctions implicitement continues.* On sait, en effet, que, quel que soit le nombre positif ε, toute fonction limite des fonctions continues peut être approchée uniformément, à ε près, par une autre fonction limite des fonctions continues et dont les valeurs forment un ensemble isolé; or, l'image de cette dernière fonction est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés de sorte que cette dernière fonction est implicitement continue.

[8]) *Fund. Math.*, 8 (1926), pp. 53—55.

une série convergente à termes positifs,

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots,$$

telle qu'à chaque x de (a, b) correspond un nombre naturel $N(x)$ de manière que $|f_n(x)| \leqq a_n$ pour $n > N(x)$. Il est aisé de voir que la condition de M. Auerbach n'est qu'un cas particulier de la convergence quasi uniforme par parties, de sorte qu'on obtient la proposition énoncée en partant de notre théorème précédent.