Über Funktionen, deren Felder Abelsche Gruppen in bezug auf diese Funktionen sind.

Von

Stanisław Leśniewski (Warszawa).

Ich sage hier, dass **die Gegenstände, die einer gegebenen Funktion f genügen, eine Abelsche Gruppe in bezug auf eine gegebene Funktion φ bilden**, dann und nur dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

a) $[A, B] : f(A) . f(B) . \supset . [\exists C] . f(C) . \varphi(A, B, C)$

b) $[A, B] : f(A) . f(B) . \supset . [\exists C] . f(C) . \varphi(A, C, B)$

c) $[A, B] : f(A) . f(B) . \supset . [\exists C] . f(C) . \varphi(C, A, B)$

d) $[A, B, C, D, E, F, G] : f(A) . f(B) . f(C) . f(D) . f(E) . f(F) . f(G) . \varphi(A, B, C) . \varphi(C, D, E) . \varphi(B, D, F) . \varphi(A, F, G) . \supset . E = G$

e) $[A, B, C] : f(A) . f(B) . f(C) . \varphi(A, B, C) . \supset . \varphi(B, A, C)$ [1]

Ich befasse mich in dieser Mitteilung mit einer solchen speziellen Situation, in der eine Abelsche Gruppe in bezug auf eine gegebene Funktion φ von den Gegenständen gebildet wird, die der mittels der Formel

$$[A] \therefore f(A) . \equiv : [\exists B, C] : \varphi(A, B, C) . \lor . \varphi(B, A, C) . \lor . \varphi(B, C, A)$$

bestimmten Funktion f genügen [2] (in ganz freien Worten könnte

[1] Im Zusammenhang mit diesen Bedingungen vgl.: 1) H. Weber. *Die allgemeinen Grundlagen der Galois'schen Gleichungstheorie. Mathematische Annalen.* 43. Band. 1893. SS. 522 und 523. 2) Edward V. Huntington. *Note on the definitions of abstract groups and fields by sets of independent postulates. Transactions of the American Mathematical Society.* Volume 6. 1905. S. 192. 3) Stanisław Leśniewski. *Über Funktionen, deren Felder Gruppen mit Rücksicht auf diese Funktionen sind. Fundamenta Mathematicae.* Band XIII. 1929. SS. 319 und 320.

[2] Vgl.: Leśniewski. *Op. cit.*, S. 320.

ich die genannte Situation mittels der Erklärung charakterisieren, dass hier die Funktion φ eine solche Funktion ist, deren ganzes Feld eine Abelsche Gruppe in bezug auf diese Funktion ist). In der Anwendung auf die erwähnte Situation nehmen die oben angegebenen Bedingungen *a — e* entsprechend (nach der Beseitigung der in ihnen ganz deutlichen neuentstandenen Pleonasmen) die Gestalt der fünf folgenden Bedingungen an: [1]

1. $[A, B, D, E, F, G] \therefore \varphi(A, D, E) . \lor . \varphi(D, A, E) . \lor . \varphi(D, E, A) : \varphi(B, F, G) . \lor . \varphi(F, B, G) . \lor . \varphi(F, G, B) : \supset . [\exists C] . \varphi(A, B, C)$

2. $[A, B, D, E, F, G] \therefore \varphi(A, D, E) . \lor . \varphi(D, A, E) . \lor . \varphi(D, E, A) : \varphi(B, F, G) . \lor . \varphi(F, B, G) . \lor . \varphi(F, G, B) : \supset . [\exists C] . \varphi(A, C, B)$

3. $[A, B, D, E, F, G] \therefore \varphi(A, D, E) . \lor . \varphi(D, A, E) . \lor . \varphi(D, E, A) : \varphi(B, F, G) . \lor . \varphi(F, B, G) . \lor . \varphi(F, G, B) : \supset . [\exists C] . \varphi(C, A, B)$

4. $[A, B, C, D, E, F, G] : \varphi(A, B, C) . \varphi(C, D, E) . \varphi(B, D, F) . \varphi(A, F, G) . \supset . E = G$

5. $[A, B, C] : \varphi(A, B, C) . \supset . \varphi(B, A, C)$

Nun möchte ich hier nachweisen, dass das System der fünf Bedingungen *1—5* einer einzigen Bedingung äquivalent ist, die die Gestalt folgender Äquivalenz besitzt:

I. $[A, B, C] :: \varphi(B, A, C) . \equiv :\cdot: [\exists D, E, F, G] . \varphi(A, D, E) . \varphi(F, G, C) :\cdot: [H, I] :: \varphi(H, B, I) . \equiv \therefore [\exists K, L, M, N] . \varphi(H, K, L) . \varphi(M, I, N) \therefore [O, P] : \varphi(O, C, I) . \varphi(P, A, H) . \supset . O = P$ [2]

In meiner Mitteilung *„Über Funktionen, deren Felder Gruppen mit Rücksicht auf diese Funktionen sind"* habe ich aus den oben angegebenen Thesen *1—4* die These abgeleitet, die besagt, dass

6. $[A, B, C] :: \varphi(A, B, C) . \equiv :\cdot: [\exists D, E, F, G] . \varphi(A, D, E) . \varphi(C, F, G) :\cdot: [H, I] :: \varphi(H, B, I) . \equiv \therefore [\exists K, L, M, N] . \varphi(K, H, L) . \varphi(M, N, I) \therefore [O, P] : \varphi(O, C, I) . \varphi(P, A, H) . \supset . O = P$ [3]

[1] Im Zusammenhang mit den vier ersten dieser Bedingungen vgl. *op. cit.*, SS. 320 und 321.

[2] Dieses Ergebnis stammt aus dem J. 1926. Vgl. *op. cit.*, S. 332.

[3] Vgl. *op. cit.*, SS. 320—323. Im Zusammenhang mit dem Verhältnis der These *I* zur These *6* vgl.: Wallie Abraham Hurwitz. *Postulate-sets for Abelian Groups and Fields. Annals of Mathematics.* December, 1913. Second Series, Vol. 15, No. 2. SS. 93 und 94.

Diese These benutze ich jetzt beim Ableiten der These I aus den Thesen $1-5$:

7. $[A, C] : [\exists D, E, F, G] . \varphi(A, D, E) . \varphi(C, F, G) . \equiv . [\exists D, E, F, G] . \varphi(A, D, E) . \varphi(F, G, C)$ (folgt aus 2)

8. $[A, B, C] : \varphi(A, B, C) . \equiv . \varphi(B, A, C)$ (folgt aus 5)

9. $[H, I] : [\exists K, L, M, N] . \varphi(K, H, L) . \varphi(M, N, I) . \equiv . [\exists K, L, M, N] . \varphi(H, K, L) . \varphi(M, I, N)$ (folgt aus 5 und 3)

Aus 6, 8, 7 und 9 folgt I.

Ich trete an die Ableitung der Thesen $1-5$ aus der These I heran:

II. $[A, B, C] : \varphi(B, A, C) . \supset . [\exists D, E] . \varphi(A, D, E)$ (folgt aus I)

III. $[A, B, C, H, I] : \varphi(B, A, C) . \varphi(H, B, I) . \supset . [\exists M, N] . \varphi(M, I, N)$ (folgt aus I)

IV. $[A, B, C, H, I, O, P] : \varphi(B, A, C) . \varphi(H, B, I) . \varphi(O, C, I) . \varphi(P, A, H) . \supset . O = P$ (folgt aus I)

V. $[A, B, C, H, I, K, L, M, N] :: \varphi(B, A, C) . \varphi(H, K, L) . \varphi(M, I, N) \therefore [O, P] : \varphi(O, C, I) . \varphi(P, A, H) . \supset . O = P \therefore \supset . \varphi(H, B, I)$ (folgt aus I)

VI. $[A, B, C, D, E, F, G] :: \varphi(A, D, E) . \varphi(F, G, C) :\cdot: [H, I] :: \varphi(H, B, I) . \equiv \therefore [\exists K, L, M, N] . \varphi(H, K, L) . \varphi(M, I, N) \therefore [O, P] : \varphi(O, C, I) . \varphi(P, A, H) . \supset . O = P :\cdot: \supset . \varphi(B, A, C)$ (folgt aus I)

VII. $[B, H, I] : \varphi(H, B, I) . \supset . [\exists M, N] . \varphi(M, I, N)$

Beweis:

$[B, H, I] \therefore$
(α) $\varphi(H, B, I) . \supset :$
$[\exists D, E]$.
(β) $\varphi(B, D, E)$: (aus II und α)
$[\exists M, N] . \varphi(M, I, N)$ (III, β, α)

$VIII$. $[B, H, I] : \varphi(H, B, I) . \supset . [\exists D, E] . \varphi(I, D, E)$ (folgt aus VII und II)

IX. $[I, M, N] : \varphi(M, I, N) . \supset . [\exists O, P] . \varphi(O, P, I)$

Beweis:

$[I, M, N] \therefore$
(α) $\varphi(M, I, N) . \supset :$
(β) $[\exists O] . \varphi(O, N, I) . \vee . \varphi(M, M, I)$: ($V$, α)
$[\exists O, P] . \varphi(O, P, I)$ (β)

X. $[B, H, I] : \varphi(H, B, I) . \supset . [\exists O, P] . \varphi(O, P, H)$

Beweis:

$[B, H, I] ::$
(α) $\varphi(H, B, I) . \supset \therefore$
$[\exists M, N]$:
(β) $\varphi(M, I, N)$: (VII, α)
(γ) $[\exists P] . \varphi(P, B, H) . \vee . \varphi(H, H, I) \therefore$ (V, α, β)
$[\exists O, P] . \varphi(O, P, H)$ (γ, IX)

XI. $[B, H, I] : \varphi(H, B, I) . \supset . [\exists M, N] . \varphi(M, H, N)$ (folgt aus X und VII)

XII. $[B, H, I] \therefore \varphi(H, B, I) . \vee . \varphi(B, H, I) . \vee . \varphi(B, I, H) : \supset . [\exists D, E, M, N, O, P] . \varphi(H, D, E) . \varphi(M, H, N) . \varphi(O, P, H)$ (folgt aus XI, X, II, IX, $VIII$ und VII)

$XIII$. $[A, B, O] : \varphi(O, O, B) . \varphi(B, O, B) . \varphi(A, O, B) . \supset . \varphi(A, A, B)$

Beweis:

$[A, B, O] \therefore$
(α) $\varphi(O, O, B)$.
(β) $\varphi(B, O, B)$.
(γ) $\varphi(A, O, B) . \supset :$
$[\exists M, N]$.
(δ) $\varphi(M, B, N)$: (VII, β)
$[\exists C]$.
(ε) $\varphi(C, B, B)$. (V, β, δ)
(ζ) $C = O$. (IV, α, β, ε)
(η) $C = A$: (IV, α, β, ε, γ)
(ϑ) $O = A$. (ζ, η)
$\varphi(A, A, B)$ (γ, ϑ)

3. $[A, B, D, E, F, G] \therefore \varphi(A, D, E) . \vee . \varphi(D, A, E) . \vee . \varphi(D, E, A) : \varphi(B, F, G) . \vee . \varphi(F, B, G) . \vee . \varphi(F, G, B) : \supset . [\exists C] . \varphi(C, A, B)$

Beweis:

$[A, B, D, E, F, G] :\cdot:$
(α) $\varphi(A, D, E) . \vee . \varphi(D, A, E) . \vee . \varphi(D, E, A)$:

(β) $\varphi(B, F, G) . \vee . \varphi(F, B, G) . \vee . \varphi(F, G, B) : \supset ::$

$[\exists H, I, O, P] \therefore$

(γ) $\varphi(A, H, I) . \varphi(O, P, A) \therefore$ (XII, α)

$[\exists K, L, M, N] :$

(δ) $\varphi(B, K, L) . \varphi(M, B, N) :$ (XII, β)

(ε) $[\exists C] . \varphi(C, A, B) . \vee . \varphi(O, O, B) :$ (V, γ, δ)

(ζ) $[\exists C] . \varphi(C, A, B) . \vee . \varphi(B, O, B) :$ (V, γ, δ)

(η) $[\exists C] . \varphi(C, A, B) . \vee . \varphi(A, O, B) \therefore$ (V, γ, δ)

(ϑ) $[\exists C] . \varphi(C, A, B) . \vee . \varphi(O, O, B) . \varphi(B, O, B) . \varphi(A, O, B) ::$

$(\varepsilon, \zeta, \eta)$

$[\exists C] . \varphi(C, A, B)$ $(\vartheta, XIII)$

XIV. $[B, C, O, P] : \varphi(O, B, C) . \varphi(P, B, C) . \supset . O = P$

Beweis:

$[B, C, O, P] :\cdot:$

(α) $\varphi(O, B, C) .$

(β) $\varphi(P, B, C) . \supset ::$

$[\exists A] \therefore$

(γ) $\varphi(A, B, B) \therefore$ $(3, \alpha)$

$[\exists D] :$

(δ) $\varphi(D, A, C) :$ $(3, \gamma, \alpha)$

$[\exists E] .$

(ε) $\varphi(E, B, D) .$ $(3, \alpha, \delta)$

(ζ) $O = E .$ $(IV, \gamma, \delta, \alpha, \varepsilon)$

(η) $P = E ::$ $(IV, \gamma, \delta, \beta, \varepsilon)$

$O = P$ (ζ, η)

XV. $[A, B, C, H, I] \therefore \varphi(H, B, B) : \varphi(A, C, I) . \vee . \varphi(A, I, C) : \supset . \varphi(C, H, C)$

Beweis:

$[A, B, C, H, I] ::$

(α) $\varphi(H, B, B) :$

(β) $\varphi(A, C, I) . \vee . \varphi(A, I, C) : \supset \therefore$

(γ) $[O, P] : \varphi(O, B, C) . \varphi(P, B, C) . \supset . O = P \therefore$ (XIV)

$[\exists D, E, M, N] .$

(δ) $\varphi(C, D, E) . \varphi(M, C, N) :$ (XII, β)

$\varphi(C, H, C)$ $(V, \alpha, \delta, \gamma)$

XVI. $[B, C, H, O] : \varphi(H, B, B) . \varphi(O, H, C) . \supset . C = O$

Beweis:

$[B, C, H, O] :$

(α) $\varphi(H, B, B) .$

(β) $\varphi(O, H, C) . \supset .$

(γ) $\varphi(C, H, C) .$ (XV, α, β)

$C = O$ (XIV, γ, β)

XVII. $[A, B, C, H, O, P] : \varphi(H, B, B) . \varphi(C, B, A) . \varphi(O, H, C) . \varphi(P, B, A) . \supset . O = P$

Beweis:

$[A, B, C, H, O, P] :$

(α) $\varphi(H, B, B) .$

(β) $\varphi(C, B, A) .$

(γ) $\varphi(O, H, C) .$

(δ) $\varphi(P, B, A) . \supset .$

(ε) $C = O .$ (XVI, α, γ)

(ζ) $C = P .$ (XIV, β, δ)

$O = P$ (ε, ζ)

XVIII. $[B, C, E, F, G, H, I] : \varphi(E, C, C) . \varphi(H, E, I) . \varphi(F, B, I) . \varphi(G, B, H) . \supset . F = G$

Beweis:

$[B, C, E, F, G, H, I] :$

(α) $\varphi(E, C, C) .$

(β) $\varphi(H, E, I) .$

(γ) $\varphi(F, B, I) .$

(δ) $\varphi(G, B, H) . \supset .$

(ε) $I = H .$ (XVI, α, β)

(ζ) $\varphi(F, B, H) .$ (γ, ε)

$F = G$ (XIV, ζ, δ)

XIX. $[A, B, C, H, I] : \varphi(H, B, B) . \varphi(I, B, H) . \varphi(C, B, A) . \supset . \varphi(A, I, C)$

Beweis:

$[A, B, C, H, I] ::$

(α) $\varphi(H, B, B) .$

(β) $\varphi(I, B, H) .$

(γ) $\varphi(C, B, A) . \supset \therefore$

(δ) $[O, P] : \varphi(O, H, C) . \varphi(P, B, A) . \supset . O = P \therefore$ $(XVII, \alpha, \gamma)$

$[\exists D, E] :$

(ε) $\varphi(A, D, E)$: $(VIII, \gamma)$
$[\exists\, M, N]$.
(ζ) $\varphi(M, C, N) \therefore$ (XI, γ)
$\varphi(A, I, C)$ $(V, \beta, \varepsilon, \zeta, \delta)$

1. $[A, B, D, E, F, G] \therefore \varphi(A, D, E) . \vee . \varphi(D, A, E) . \vee . \varphi(D, E, A) : \varphi(B, F, G) . \vee . \varphi(F, B, G) . \vee . \varphi(F, G, B) : \supset . [\exists\, C] . \varphi(A, B, C)$

Beweis:

$[A, B, D, E, F, G] :\cdot:$
(α) $\varphi(A, D, E) . \vee . \varphi(D, A, E) . \vee . \varphi(D, E, A)$:
(β) $\varphi(B, F, G) . \vee . \varphi(F, B, G) . \vee . \varphi(F, G, B) : \supset ::$
$[\exists\, H] \therefore$
(γ) $\varphi(H, B, B) \therefore$ $(3, \beta)$
$[\exists\, I]$:
(δ) $\varphi(I, B, H)$. $(3, \beta, \gamma)$
(ε) $\varphi(H, I, I)$. (XIX, γ, δ)
(ζ) $\varphi(B, I, H)$: (XIX, γ, δ)
$[\exists\, C]$.
(η) $\varphi(C, I, A) ::$ $(3, \delta, \alpha)$
$[\exists\, C] . \varphi(A, B, C)$ $(XIX, \varepsilon, \zeta, \eta)$

XX. $[B, G, H, I] : \varphi(G, B, I) . \varphi(G, B, H) . \supset . I = H$

Beweis:

$[B, G, H, I] ::$
(α) $\varphi(G, B, I)$.
(β) $\varphi(G, B, H) . \supset \therefore$
$[\exists\, C]$:
(γ) $\varphi(C, B, B)$: $(3, \alpha)$
$[\exists\, A]$.
(δ) $\varphi(A, B, C)$. $(3, \gamma)$
(ε) $\varphi(I, A, G)$. $(XIX, \gamma, \delta, \alpha)$
(ζ) $\varphi(H, A, G) \therefore$ $(XIX, \gamma, \delta, \beta)$
$I = H$ $(XIV, \varepsilon, \zeta)$

XXI. $[A, B, C, D, E, F, G] : \varphi(A, B, C) . \varphi(C, D, E) . \varphi(D, B, F) . \varphi(A, F, G) . \supset . E = G$

Beweis:

$[A, B, C, D, E, F, G]$.
(α) $\varphi(A, B, C)$.

(β) $\varphi(C, D, E)$.
(γ) $\varphi(D, B, F)$.
(δ) $\varphi(A, F, G) . \supset$:
$[\exists\, O]$.
(ε) $\varphi(O, F, E)$. $(3, \gamma, \beta)$
(ζ) $O = A$. $(IV, \gamma, \beta, \varepsilon, \alpha)$
(η) $\varphi(O, F, G)$: (δ, ζ)
$E = G$ (XX, ε, η)

XXII. $[B, C, E, H, I, K, L, M, N, O, P] :: \varphi(O, P, B) . \varphi(E, C, C) . \varphi(H, K, L) . \varphi(M, I, N) \therefore [F, G] : \varphi(F, B, I) . \varphi(G, B, H) . \supset . F = G \therefore \supset . \varphi(H, E, I)$

Beweis:

$[B, C, E, H, I, K, L, M, N, O, P] ::$
(α) $\varphi(O, P, B)$.
(β) $\varphi(E, C, C)$.
(γ) $\varphi(H, K, L)$.
(δ) $\varphi(M, I, N) \therefore$
(ε) $[F, G] : \varphi(F, B, I) . \varphi(G, B, H) . \supset . F = G \therefore \supset \therefore$
(ζ) $\varphi(I, E, I) \therefore$ (XV, β, δ)
$[\exists\, F]$:
(η) $\varphi(F, B, I)$: $(3, \alpha, \delta)$
$[\exists\, G]$.
(ϑ) $\varphi(G, B, H)$. $(3, \alpha, \gamma)$
(ι) $F = G$. $(\varepsilon, \eta, \vartheta)$
(κ) $\varphi(G, B, I) \therefore$ (η, ι)
(λ) $I = H$. $(XX, \varkappa, \vartheta)$
$\varphi(H, E, I)$ (ζ, λ)

5. $[A, B, C] : \varphi(A, B, C) . \supset . \varphi(B, A, C)$

Beweis:

$[A, B, C] ::\cdot$
(α) $\varphi(A, B, C) . \supset ::\cdot$
$[\exists\, D] :\cdot:$
(β) $\varphi(B, A, D) :\cdot:$ $(1, \alpha)$
$[\exists\, O, P] ::$
(γ) $\varphi(O, P, B) ::$ (IX, α)
$[\exists\, E] :\cdot:$
(δ) $\varphi(E, C, C) \therefore$ $(3, \alpha)$

(ε) $[H, I]: \varphi(H, E, I) . \supset . [\exists M, N] . \varphi(M, I, N) \therefore$ (VII)
(ζ) $[F, G, H, I]: \varphi(H, E, I) . \varphi(F, B, I) . \varphi(G, B, H) . \supset . F = G :\cdot:$ (XVIII, δ)
(η) $[H, I, K, L, M, N] :: \varphi(H, K, L) . \varphi(M, I, N) \therefore [F, G]: \varphi(F, B, I) . \varphi(G, B, H) . \supset . F = G \therefore \supset . \varphi(H, E, I) :\cdot:$ (XXII, γ, δ)
(ϑ) $\varphi(E, B, B) :\cdot:\cdot$ (VI, β, γ, ε, ζ, η)
(ι) $D = C :\cdot:\cdot$ (XXI, ϑ, β, α, δ)
$\varphi(B, A, C)$ (β, ι)

2. $[A, B, D, E, F, G] \therefore \varphi(A, D, E) . \vee . \varphi(D, A, E) . \vee . \varphi(D, E, A) : \varphi(B, F, G) . \vee . \varphi(F, B, G) . \vee . \varphi(F, G, B) . \supset . [\exists C] . \varphi(A, C, B)$ (folgt aus *3* und *5*)

4. $[A, B, C, D, E, F, G] : \varphi(A, B, C) . \varphi(C, D, E) . \varphi(B, D, F) . \varphi(A, F, G) . \supset . E = G$

Beweis:

$[A, B, C, D, E, F, G]:$
(α) $\varphi(A, B, C) .$
(β) $\varphi(C, D, E) .$
(γ) $\varphi(B, D, F) .$
(δ) $\varphi(A, F, G) . \supset .$
(ε) $\varphi(D, B, F) .$ (5, γ)
$E = G$ (XXI, α, β, ε, δ)

Die hier durchgeführten Deduktionen weisen nach, dass das System der Thesen *1–5*, wie ich das oben angesagt habe, der These *I* äquivalent ist. (Das erhaltene Resultat können wir auch in die Aussage fassen, nach welcher der Umstand, dass irgendeine Funktion φ der These *I* genügt, die notwendige und hinreichende Bedingung ist, damit das Feld der Funktion φ eine Abelsche Gruppe in bezug auf diese Funktion sei.)

Ich erwähne hier noch, dass, nachdem ich oben aus der These *I* die Thesen *II—VI* abgeleitet hatte, appellierte ich schon beim Ableiten der Thesen *1—5* an die These *I* gar nicht. Es ergibt sich daraus, dass das System der Thesen *II—VI* ein Postulatensystem bildet, welches dem System der Postulate *1—5* äquivalent ist. Es ist leicht sich zu überzeugen, dass jede von den fünf Thesen, die zu dem genannten System der Thesen *II—VI* gehören, von dem Produkt der vier übrigen Thesen dieses Systems unabhängig ist:

allen Thesen *II—VI* mit Ausnahme *einer* von ihnen (die für fünf verschiedene Fälle verschieden ist) genügen die Funktionen φ, die der Reihe nach mittels fünf folgender Formeln bestimmt werden:

$[A, B, C] \therefore \varphi(A, B, C) . \equiv : A = 1 . B = 1 . C = 1 . \vee . A = 1 . B = 1 . C = 2 . \vee . A = 1 . B = 1 . C = 3 . \vee . A = 1 . B = 2 . C = 3 . \vee . A = 1 . B = 3 . C = 3$

$[A, B, C] \therefore \varphi(A, B, C) . \equiv : A = 1 . B = 1 . C = 1 . \vee . A = 1 . B = 1 . C = 2$

$[A, B, C] \therefore \varphi(A, B, C) . \equiv : A = B . B = C . \supset . A = C$

$[A, B, C] \therefore \varphi(A, B, C) . \equiv : A = 1 . B = 2 . C = 2 . \vee . A = 2 . B = 1 . C = 2$

$[A, B, C] \therefore \varphi(A, B, C) . \equiv : A = 1 . B = 1 . C = 1 . \vee . A = 1 . B = 2 . C = 1 . \vee . A = 2 . B = 1 . C = 2 . \vee . A = 2 . B = 2 . C = 2$