continu, et l'ensemble de tous les sous-ensembles de l'intervalle $(2, 3)$ a une puissance supérieure à celle du continu. Il existe donc dans l'intervalle $(2, 3)$ un ensemble Q_1 qui n'est pas une image continue de P. Posons $Q = P_1 + Q_1$: on voit sans peine que P_1, donc aussi P, est une image continue de Q: on a donc $cP \leqslant cQ$. Or, Q_1 est aussi une image continue de Q: s'il était $cP = cQ$, Q et parsuite aussi Q_1 serait donc une image continue de P, contrairement à la définition de Q_1. On a donc $cP < cQ$, c. q. f. d.

Cette remarque permet de déduire de notre théorème le suivant

Corollaire 1. *Si $\mathcal{F}$ est une famille de puissance du continu d'ensembles (linéaires), il existe un ensemble Q, tel qu'on a $cQ > cP$, pour chaque ensemble P de la famille $\mathcal{F}$.*

En effet, d'après notre théorème il existe un ensemble linéaire H, tel que qu'on a, selon les notations adoptées: $cH \geqslant cP$ pour tout ensemble P de la famille $\mathcal{F}$. Or, comme nous venons de démontrer, il existe un ensemble (linéaire) Q, tel que $cQ > cH$, et il est évident que cet ensemble Q satisfait aux conditions du corollaire 1 qui est ainsi démontré.

Du corollaire 1 on peut sans peine déduire encore ce

Corollaire 2. *Il existe une suite transfinie de puissance $> 2^{\aleph_0}$ d'ensembles linéaires*

$$E_1, E_2, E_3, \dots, E_\omega, E_{\omega+1}, \dots, E_\xi, \dots$$

telle qu'on a toujours $cE_\xi < cE_\eta$, pour $\xi < \eta$.

Du corollaire 2 résulte qu'il existe une famille de puissance supérieure à celle du continu d'ensembles linéaires distincts, tels que de deux ensembles de cette famille un est toujours une image continue de l'autre

---

Sur les fonctions semicontinues par rapport à chacune de deux variables.

Par

Stefan Kempisty (Wilno, Pologne).

M. Baire a établi, dans sa thèse [1]), qu'une fonction $f(x, y)$, continue par rapport à chacune de variables, est ponctuellement discontinue relativement à tout ensemble parfait dans le plan xy, et par suite est limite d'une suite de fonctions continues.

Une méthode simple de construction de cette suite a été ensuite donnée par M. Lebesgue [2]).

Or, comme il résulte d'un exemple de M. Sierpiński, une fonction de deux variables, semicontinue supérieurement par rapport à chacune d'elles, peut être même non mesurable [3]).

Cependent, nous allons le voir, *une fonction $f(x, y)$, semicontinue supérieurement de l'une des variables et semicontinue inférieurement par rapport à l'autre, est limite des fonctions continues.*

On arrive à ce résultat en étudiant les bornes de la fonction $f(x, y)$ sur les segments paralleles aux axes.

Ces bornes interviennent dans une note récente de M. Baire „Sur l'origine de la notion de semicontinuité" [4]), où nous trouvons le théorème suivant:

Si $f(x, y)$ est continue dans un rectangle parallèle aux axes, par rapport à chacune de variables, la borne supérieure des valeurs

[1]) Sur les fonctions des variables réelles, Annali di Math., 1899.

[2]) Sur les fonctions représentables analytiquement, Journal de Math., 190 p. 201.

[3]) W. Sierpiński. *Funkcje przedstawialne analityczne,* Warszawa, 1925 p. 68 note [2]).

[4]) Bulletin de la Societé Mathematique de France t. 54 (1927) p. 141.

de $f(x, y)$ sur un segment du rectangle parallèle à oy est, en tant que la fonction de x, semi-continue inférieurement.

Considérons la borne supérieure de $f(x, y)$ sur un segment défini par les conditions:

$$x = x, \qquad y_0 - k \leqslant y \leqslant y_0 + k.$$

Elle est alors une fonction semicontinue inférieurement de x_0.

Nous verrons que cette borne, considérée comme la fonction de deux variables x_0 et y_0, est aussi semicontinue inférieurement, quand le segment est ouvert.

Désignons par $M_k^{(y)}(x_0, y_0)$ la borne supérieure de la fonction

$$\varphi(y) = f(x_0, y),$$

pour

$$y_0 - k < y < y_0 + k.$$

Nous avons alors ce

Lemme 1. *Si $f(x, y)$ est semicontinue inférieurement, par rapport à x, la borne $M_k^{(y)}(x, y)$, considerée comme la fonction de x et y, est semicontinue inférieurement.*

Supposont d'abord que $M_k^{(y)}$ est fini.

Par définition de $M_k^{(y)}$, il existe, à l'interieur de l'intervalle $(y_0 - k,\ y_0 + k)$, une valeur y_1 telle que

(1) $$f(x_0, y_1) > M_k^{(y)}(x_0, y_0) - \frac{\varepsilon}{2},$$

En vertu de la semicontinuite inférieure de $f(x, y)$, pour $x = x_0$, il existe un nombre positif α tel que, pour

$$|x - x_0| < \alpha,$$

nous avons

(2) $$f(x, y_1) > f(x_0, y_1) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part il suffit de choisir un nombre positif β égal au plus petit de deux nombres:

$$y_0 + k - y_1, \qquad y_1 - y_0 + k,$$

pour que la condition

$$|y - y_0| < \beta$$

implique la double inégalité

$$y - k < y_1 < y + k.$$

Le nombre y_1 appartenant ainsi à l'intervalle ouvert $(y - k, y + k)$, on a

(3) $$M_k^{(y)}(x, y) \geqslant f(x, y_1).$$

Des inégalités (1), (2) et (3) on deduit

$$M_k^{(y)}(x, y) > M_k^{(y)}(x_0, y_0) - \varepsilon,$$

avec les conditions:

$$|x - x_0| < \alpha, \qquad |y - y_0| < \beta.$$

Ainsi $M_k^{(y)}$ est semicontinue inférieurement au point (x_0, y_0).

Lorsque $M_k^{(y)}(x_0, y_0) = -\infty$, notre lemme est évident.

Pour $M_k^{(y)}(x_0, y_0) = +\infty$, il suffit de remplacer, dans ce raisonnement, $M_k^{(y)}(x_0, y_0) - \frac{\varepsilon}{2}$ par un nombre arbitraire A.

En désignant par $m_k^{(y)}(x_0, y_0)$ la borne inférieure de la fonction

$$\varphi(y) = f(x_0, y)$$

dans l'intervalle ouvert $(y_0 - k,\ y_0 + k)$ on a le

Lemme 2. *Si $f(x, y)$ est semicontinue supérieurement par rapport à x, la borne $m_k^{(y)}(x, y)$ considérée comme la fonction de deux variables, est semicontinue supérieurement.*

Les bornes sur les segments parallèles à l'axe de y nous donnent des bornes au point (x_0, y_0) relatives à la droite $x = x_0$. Ces sont

$$M^{(y)}(x_0, y_0) = \lim_{k \to \infty} M_k^{(y)}(x_0, y_0)$$

et

$$m^{(y)}(x_0, y_0) = \lim_{k \to \infty} m_k^{(y)}(x_0, y_0).$$

Comme la borne supérieure sur le segment, $M_k^{(y)}$, ne croit pas quand k décroit vers zéro, la borne ponctuelle $M^{(y)}$ est la limite de la suite non croissante

$$M_1^{(y)} \geqslant M_{1/2}^{(y)} \geqslant M_{1/3}^{(y)} \geqslant \ldots \geqslant M_{1/n}^{(y)} \geqslant \ldots,$$

composée de fonctions semicontinues inférieurement, c'est-à-dire $M^{(y)}$ *est une fonction de type* ul *suivant la classification de* M. Young[1]).

De même la borne inférieure $m^{(y)}$ est la limite de la suite non decroissante

$$m_1^{(y)} \leqslant m_{1/2}^{(y)} \leqslant m_{1/3}^{(y)} \leqslant \ldots \leqslant m_{1/n}^{(y)} \leqslant \ldots$$

de fonctions semicontinues supérieurement. Donc $m^{(y)}$ *est une fonction de type* lu *de* M. Young.

Théorème. *Si $f(x,y)$ est semicontinue supérieurement, par rapport à une des variables, et semicontinue inférieurement par rapport à l'autre, elle est de première classe de* M. Baire *au plus.*

Supposons, pour fixer les idées, que la semicontinuite inférieure a lieu par rapport à x et la semicontinuité supérieure par rapport à y.

D'après la définition de M. Baire d'une fonction semicontinue, nous avons, pour notre fonction, l'égalité

$$f(x_0, y_0) = M^{(y)}(x_0, y_0) = m^{(x)}(x_0, y_0).$$

Or, la fonction f étant semicontinue inférieurement en x, la borne $M^{(y)}$ est, comme nous avons démontré, limite d'une suite non croissante de fonctions semicontinues inférieurement (type ul).

Comme, d'autre part, $f(x,y)$ est semicontinue supérieurement en y, la borne $m^{(x)}$ est limite d'une suite non decroissante de fonctions semicontinues supérieurement (type lu).

Or, d'après un théorème de M. Young, une fonction qui est en même temps de ces deux types, ul et lu, appartient à la classe 0 ou 1 de M. Baire[2]).

Pour obtenir *effectivement* la suite de fonctions continues tendant vers $f(x,y)$, il suffit de remarquer que

$$m_{1/n}^{(x)}(x,y) \leqslant f(x,y) \leqslant M_{1/n}^{(y)}(x,y).$$

Or, en vertu d'un théorème M. Hahn[3]), nous pouvons déterminer une fonction continue intermédiaire entre deux fonctions $g(x,y)$

[1]) W. H. Young. On functions and their associated sets of points. *Proc. Lond. Math. Soc*, v. 12 (1913).

[2]) W. H. Young. loc. cit.

[3]) H. Hahn. Über halbstetige und stetige Funktionen *Sitzungsberichte Akad. Wien*, 196 (1912) p. 103.

et $h(x,y)$, telles que

$$g(x,y) \leqslant h(x,y),$$

lorsque la première de ces fonctions est semicontinue supérieurement et la seconde semicontinue inférieurement. C'est justement notre cas, puisque la borne $m_{1/n}^{(x)}(x,y)$ est une fonction semicontinue supérieurement et $M_{1/n}^{(y)}(x,y)$ — semicontinue inférieurement.

Soit alors $f_n(x,y)$ la fonction continue intermédiaire. Cette fonction tend évidemment, avec les bornes $m_{1/n}^{(x)}$ et $M_{1/n}^{(y)}$, vers $f(x,y)$ quand n croit indéfiniment. Donc

$$f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n, \ldots$$

est la suite cherchée.