Sur l'existence de diverses classes d'ensembles.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Nous exposerons ici une méthode permettant de démontrer l'existence de plusieurs classes d'ensembles de points qu'on obtient par des opérations élémentaires en partant d'ensembles fermés. Notre méthode sera basée sur la conception des ensembles *universels* (§ 1) et sur un lemme fondamental (§ 2). Dans les §§ 3, 4 et 5 nous appliquerons notre méthode à la démonstration d'existence de quelques classes d'ensembles de points.

1. Ensembles universels. La méthode d'ensembles universels est, au fond, celle de diagonale de Cantor. Plusieurs auteurs l'ont employé avec succès pour démontrer l'existence de certaines ensembles, en particulier M. Lebesgue (en 1905) dans la construction d'un exemple effectif d'un ensemble non mesurable (B), MM. Souslin et Lusin (en 1917) dans la construction d'un ensemble (A) non mesurable (B), M. Kuratowski (en 1923) dans la construction d'un exemple effectif d'une fonction de classe α.

Soit $\mathcal{K}$ une classe d'ensembles linéaires ou plans. Nous dirons, d'après M. N. Lusin, qu'un ensemble plan U est *un ensemble plan $\mathcal{K}$ universel*, si les intersections de U par les droites $y=\text{const.}$ donnent tous les ensembles linéaires de $\mathcal{K}$ possibles (c'est-à-dire si, E étant un ensemble donné quelconque, appartenant à la classe $\mathcal{K}$ et situé sur la droite $y=0$, il existe toujours au moins un nombre réel b, tel que la droite $y=b$ rencontre U en un ensemble de points dont la projection sur la droite $y=0$ est l'ensemble E).

Supposons que la classe $\mathcal{K}$ jouit encore de deux propriétés suivantes:

1) L'intersection d'un ensemble de $\mathcal{K}$ par une droite est un ensemble de $\mathcal{K}$.

2) Un ensemble semblable (au sens géométrique) à un ensemble linéaire de $\mathcal{K}$ est un ensemble de $\mathcal{K}$.

Dans ces conditions, en désignant par D l'ensemble de tous les points de la droite $y=x$, nous pourrons affirmer que *DU est un ensemble de $\mathcal{K}$, dont le complémentaire par rapport à la droite D n'est pas un ensemble de $\mathcal{K}$.*

Admettons, en effet, que le complémentaire Q de DU par rapport à la droite D est un ensemble de $\mathcal{K}$: d'après la propriété 2) de $\mathcal{K}$, la projection P de Q sur la droite $y=0$ serait donc aussi un ensemble de $\mathcal{K}$ et parsuite, d'après la propriété de l'ensemble U, il existerait un nombre réel b, tel que la droite $y=b$ rencontre U en un ensemble H, dont la projection sur la droite $y=0$ est l'ensemble P.

Désignons par Π la projection de DU sur la droite $y=0$: l'ensemble P sera évidemment le complémentaire de Π par rapport à la droite $y=0$ (Q étant le complémentaire de DU par rapport à la droite D).

Or, désignons par p le point (b, b) et distinguons deux cas.

1°). $p \in DU$. Il en résulte que $b \in \Pi$, donc $b \operatorname{non} \in P$ et parsuite $(b, b) \operatorname{non} \in H$ (puisque P est la projection de H sur l'axe $y=0$). Or, H est l'ensemble de points communs à U et à la droite $y=b$: le point $p(b,b)$ étant situé sur la droite $y=b$, il résulte de $(b, b) \operatorname{non} \in H$ que $p \operatorname{non} \in U$, contrairement à l'hypothèse que $p \in DU$.

2°) $p \operatorname{non} \in DU$. D'après $p \in D$ et $Q = D - U$, il en résulte que $p \in Q$, donc $b \in P$ (P étant la projection de Q sur la droite $y=0$ et b étant l'abscisse du point p) et parsuite $(b, b) \in H$ (puisque H est un ensemble situé sur la droite $y=b$, dont la projection sur la droite $y=0$ est P), donc $(b, b) \in U$ (puisque $H \subset U$) et, d'après $p \in D$, $p \in DU$, contrairement à l'hypothèse.

L'hypothèse que l'ensemble $D-U$ appartient à la classe $\mathcal{K}$ implique donc toujours une contradiction. Or, d'après la propriété 1) de $\mathcal{K}$, l'ensemble DU appartient à $\mathcal{K}$. Les propriétés annoncées de l'ensemble DU sont donc démontrées.

Observons qu'en modifiant légèrement notre démonstration, on pourrait prouver que *toute droite non parallèle aux axes des coordonnées rencontre l'ensemble U en un ensemble de points qui appar-*

6*

tient à $\mathcal{H}$ et dont le complémentaire par rapport à cette droite n'appartient pas à $\mathcal{H}$.

2. L'ensemble de tous les intervalles ouverts aux extrémités rationnels est, comme on sait, effectivement énumérable: soit

$$(1) \qquad I_1,\ I_2,\ I_3,\ I_4, \ldots$$

une suite infinie formée de tous les intervalles ouverts aux extrémités rationnelles, où I_1 désigne l'ensemble vide: $I_1 = 0$.

Soit $k_1, k_2, k_3, \ldots$ une suite infinie croissante donnée de nombres naturels.

x étant un nombre irrationnel, désignons généralement par

$$(2) \qquad x = Ex + \frac{1\,|}{|\nu(x,1)} + \frac{1\,|}{|\nu(x,2)} + \frac{1\,|}{|\nu(x,3)} + \ldots$$

son développement en fraction continue arithmétique.

Posons, pour tout nombre irrationnel x:

$$(3) \qquad P(x) = P(x;\ k_1, k_2, k_3, \ldots) = C \sum_{i=1}^{\infty} I_{\nu(x,k_i)}$$

— ce seront évidemment des ensembles linéaires fermés.

Désignons maintenant par $M = M(k_1, k_2, k_3, \ldots)$ l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, tels que y est un nombre irrationnel et $x \in P(y)$. Posons

$$(4) \qquad F = F(k_1, k_2, k_3, \ldots) = M + M'.$$

L'ensemble F sera évidemment fermé.

Nous affirmons que l'ensemble plan F jouit de la propriété suivante: pour tout nombre irrationnel η l'intersection de F par la droite $y = \eta$ est un ensemble fermé dont la projection sur l'axe $y = 0$ est l'ensemble $P(\eta)$.

Soit, en effet, η un nombre irrationnel donné et désignons par H l'ensemble de tous les points de la droite $y = \eta$. Nous prouverons d'abord que $HF = HM$.

D'après (4) il suffira évidemment de démontrer que $HM' \subset M$. Soit donc $p(\xi, \eta)$ un point de HM'. D'après $p \in M'$ il existe une suite infinie $p_n(x_n, y_n)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ de points de M, tels que $\lim_{n=\infty} p_n = p$, donc $\lim_{n=\infty} x_n = \xi$ et $\lim_{n=\infty} y_n = \eta$. S'il était $p \text{ non} \in M$, on aurait, d'après la définition de l'ensemble M (η étant un nombre irrationnel), $\xi \text{ non} \in P(\eta)$, c'est-à-dire $\xi \in CP(\eta)$, donc, d'après (3), il existerait un indice k, tel que $\xi \in I_{\nu(\eta,k)} = I_m$ (où nous avons posé, pour abréger, $\nu(\eta, k) = m$). L'ensemble I_m étant ouvert, on aurait donc, d'après $\lim x_n = \xi$, $x_n \in I_m$ pour $n > \mu$.

Or, d'après $\lim_{n=\infty} y_n = \eta$, en vertu de la définition de la fonction $\nu(x, k)$ et d'après une propriété connue de fractions continues, on a $\nu(y_n, k) = \nu(\eta, k)$ pour $n > \lambda$ (où λ dépend de η et de k), donc $I_{\nu(y_n,k)} = I_m$ pour $n > \lambda$, et parsuite (d'après $x_n \in I_m$ pour $n > \mu$): $x_n \in I_{\nu(y_n,k)}$, pour $n > \mu + \lambda$, ce qui donne, d'après (3): $x_n \in CP(y_n)$, pour $n > \mu + \lambda$, et parsuite, d'après la définition de l'ensemble M, $(x_n, y_n) \text{ non} \in M$, donc $p_n \text{ non} \in M$, pour $n > \mu + \lambda$, contrairement à la propriété de la suite p_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Nous avons donc $p \in M$ et la formule $HF = HM$ est démontrée.

Or, d'après la définition de l'ensemble M, HM est l'ensemble de tous les points (x, η) du plan, tels que $x \in P(\eta)$: la projection de l'ensemble $HF = HM$ sur l'axe $y = 0$ est donc l'ensemble $P(\eta)$, c. q. f. d.

Nous avons ainsi démontré le suivant

Lemme. *$k_1, k_2, k_3, \ldots$ étant une suite infinie croissante de nombres naturels, $F(k_1, k_2, k_3, \ldots)$ est un ensemble plan fermé, tel que pour tout nombre irrationnel η l'intersection de $F(k_1, k_2, k_3, \ldots)$ par la droite $y = \eta$ est un ensemble, dont la projection sur l'axe $y = 0$ est l'ensemble $P(\eta;\ k_1, k_2, k_3, \ldots)$* (défini par la formule (3)).

3. Nous appellerons F_ϱ tout ensemble (dans un espace à m dimensions) qui est une différence de deux ensembles fermés [1]).

n étant un nombre naturel donné, soit $\mathcal{H}$ la classe de tous les ensembles linéaires ou plans qui sont sommes de n ensembles F_ϱ. Posons

$$(5) \qquad \Phi_k = F(2n + k - 1,\ 4n + k - 1,\ 6n + k - 1, \ldots) \quad (k = 1, 2, \ldots, 2n)$$

et

$$(6) \qquad U = (\Phi_1 - \Phi_2) + (\Phi_3 - \Phi_4) + \ldots + (\Phi_{2n-1} - \Phi_{2n}).$$

De (6) et (5) résulte que U est une somme de n ensembles F_ϱ plans, donc un ensemble de la classe $\mathcal{H}$. Nous prouverons que U est un ensemble plan $\mathcal{H}$ universel.

[1]) Plusieurs propriétés des ensembles F_ϱ ont été étudiées par C. Kuratowski et W. Sierpiński (*Tôhoku Mathematical Journal.* vol. 20, 1921, p. 22 ss.). Citons p. e. le théorème suivant: Pour qu'un ensemble E soit un F_ϱ, il faut et il suffit que l'ensemble $E' - E$ soit fermé (ou vide).

En effet, soit E un ensemble linéaire donné quelconque appartenant à $\mathcal{H}$. Nous pouvons donc écrire

$$E = (F_1 - F_2) + (F_3 - F_4) + \ldots + (F_{2n-1} - F_{2n}), \tag{7}$$

où $F_k (k = 1, 2, \ldots, 2n)$ sont des ensembles fermés (linéaires).

Soit k un indice donné $\leqslant 2n$. L'ensemble CF_k est ouvert: soient $I_{r_1^k}, I_{r_2^k}, I_{r_3^k}, \ldots$, les ensembles consécutifs de la suite (1) contenus dans CF_k; si $CF_k = 0$, posons $r_i^k = 1$, pour $i = 1, 2, 3, \ldots$ On voit sans peine que

$$CF_k = I_{r_1^k} + I_{r_2^k} + I_{r_3^k} + \ldots,$$

donc

$$F_k = C \sum_{i=1}^{\infty} I_{r_i^k}. \tag{8}$$

Posons

$$\eta = \frac{1|}{|\nu_1} + \frac{1|}{|\nu_2} + \frac{1|}{|\nu_3} + \ldots, \tag{9}$$

où

$$\nu_{2ni+k-1} = r_i^k, \quad \text{pour} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, 3, \ldots \\ k = 1, 2, \ldots, 2n \end{matrix} \tag{10}$$

D'après (5) et en vertu de notre lemme (§ 2) l'intersection de l'ensemble Φ_k par la droite $y = \eta$ est l'ensemble dont la projection sur l'axe $y = 0$ est l'ensemble $P(\eta; 2n+k-1, 4n+k-1, 6n+ +k-1, \ldots)$, donc, d'après (3), l'ensemble

$$C \sum_{i=1}^{\infty} I_{\nu(\eta, 2ni+k-1)},$$

c'est-à-dire, d'après (9), (10) et (8), l'ensemble F_k.

On en déduit tout de suite, d'après (6) et (7), que l'intersection de U par la droite $y = \eta$ est l'ensemble, dont la projection sur l'axe $y = 0$ est l'ensemble E. Donc, U est un ensemble plan $\mathcal{H}$ universel.

Or, on voit sans peine que la classe $\mathcal{H}$ jouit des propriétés 1) et 2) du § 1. Il en résulte que $E = DU$ est un ensemble de $\mathcal{H}$, dont le complémentaire H par rapport à la droite D n'est pas un ensemble de $\mathcal{H}$.

Or, H est une somme de 2^n ensembles F_ϱ. En effet, E étant un ensemble de $\mathcal{H}$, nous pouvons l'écrire sous la forme (7), où $F_k (k = 1, 2, \ldots, 2n)$ sont des ensembles fermés linéaires, qu'on peut supposer contenus dans D (puisque $E = DU \subset D$). En désignant par CP le complémentaire de l'ensemble P par rapport à D, nous pourrons écrire la formule (7) sous la forme

$$E = F_1 CF_2 + F_3 CF_4 + \ldots + F_{2n-1} CF_{2n},$$

ce qui donne

$$H = D - E = CE = (CF_1 + F_2)(CF_3 + F_4) \ldots (CF_{2n-1} + F_{2n}).$$

En développant le produit à droite nous obtenons une somme de 2^n ensembles de la forme

$$F_{p_1} F_{p_2} \ldots F_{p_r} . CF_{q_1} . CF_{q_2} \ldots CF_{q_s} = F_{p_1} F_{p_2} \ldots F_{p_r} - (F_{q_1} + F_{q_2} + \ldots + F_{q_s})$$

(où $r + s = n$) qui sont évidemment des ensembles F_ϱ.

Si tout ensemble-somme de $n+1$ ensembles F_ϱ était une somme de n ensembles F_ϱ, il serait de même pour tout ensemble-somme de $n+k$ ensembles F_ϱ, où $k = 1, 2, 3, \ldots$ (ce qu'on prouverait par l'induction), donc aussi pour une somme de 2^n ensembles F_ϱ, et et l'ensemble CF (défini plus haut) serait une somme de n ensembles F_ϱ, donc un ensemble de la classe $\mathcal{H}$, contrairement à la propriété de l'ensemble E. Par conséquent *il existe pour tout nombre n naturel un ensemble (linéaire) qui est une somme de $n+1$ ensembles F_ϱ, sans être une somme de n ensembles F_ϱ.*

Appelons $F_{\varrho\varrho}$ tout ensemble qui est une différence de deux ensembles F_ϱ [1]), $F_{\varrho\varrho\varrho}$ — tout ensemble qui est une différence de deux ensembles $F_{\varrho\varrho}$, et ainsi de suite. On voit sans peine que l'ensemble

$$U_1 = (\Phi_1 - \Phi_2) - (\Phi_3 - \Phi_4),$$

où Φ_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ sont des ensembles fermés plans, définis par la formule (5), pour $n = 2$, sera un ensemble plan $F_{\varrho\varrho}$ universel. Pareillement, en posant

$$U_2 = [(\Phi_1 - \Phi_2) - (\Phi_3 - \Phi_4)] - [(\Phi_5 - \Phi_6) - (\Phi_7 - \Phi_8)],$$

où Φ_k $(k = 1, 2, \ldots, 8)$ sont des ensembles définis par la formule

[1]) Les ensembles $F_{\varrho\varrho}$ coïncident avec les sommes de deux F_ϱ: voir *Fund. Math.* t. III, . 119.

(5), pour $n=4$, nous obtiendrons un ensemble plan $F_{\varrho\varrho\varrho}$ universel, et ainsi de suite.

On en déduit sans peine que DU_1 est un ensemble $F_{\varrho\varrho}$, et que $D-U_1$ n'est pas un ensemble $F_{\varrho\varrho}$. Or, $D-U_1$ est évidemment un $F_{\varrho\varrho\varrho}$ (puisque D et U_1 sont des $F_{\varrho\varrho}$): donc *il existe un* $F_{\varrho\varrho\varrho}$ *qui n'est pas un* $F_{\varrho\varrho}$. Pareillement $D-U_2$ est un ensemble $F_{\varrho\varrho\varrho\varrho}$ qui n'est pas un $F_{\varrho\varrho\varrho}$. On démontre ainsi que *chacune de classes*

$$F_\varrho,\ F_{\varrho\varrho},\ F_{\varrho\varrho\varrho},\ F_{\varrho\varrho\varrho\varrho},\ldots$$

contient des ensembles qui n'appartiennent pas aux classes précédentes.

4. Le lemme du § 2 permet de construire sans peine les ensembles plans universels F, F_σ, $F_{\sigma\delta}$, $F_{\sigma\delta\sigma}, \ldots$

Nous montrerons p. e. comment on pourrait construire un ensemble $F_{\sigma\delta\sigma}$ universel.

Posons, pour p, q, r naturels:

$$\Phi_{p,q,r} = F(2^p 3^q 5^r 7,\ 2^p 3^q 5^r 7^2,\ 2^p 3^q 5^r 7^3, \ldots) \tag{11}$$

et

$$U = \sum_{p=1}^{\infty} \prod_{q=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \Phi_{p,q,r}. \tag{12}$$

De (12) et (11) résulte que U est un ensemble plan $F_{\sigma\delta\sigma}$: nous prouverons que U est un ensemble plan $F_{\sigma\delta\sigma}$ universel.

Soit E un ensemble linéaire $F_{\sigma\delta\sigma}$ donné quelconque.

Nous pouvons donc écrire

$$E = \sum_{p=1}^{\infty} \prod_{q=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} F_{p,q,r}, \tag{13}$$

où $F_{p,q,r}$, (p, q, $r = 1, 2, 3, \ldots$) sont des ensembles linéaires fermés.

Soit (p, q, r) un système donné de trois indices.

L'ensemble $CF_{p,q,r}$ est ouvert: soient $I_{\lambda(p,q,r,1)}$, $I_{\lambda(p,q,r,2)}$, $I_{\lambda(p,q,r,3)}, \ldots$ les ensembles consécutifs de la suite (1) contenus dans $CF_{p,q,r}$; si $CF_{p,q,r}=0$, posons $\lambda(p,q,r,i)=1$, pour $i=1, 2, 3, \ldots$ On voit sans peine que

$$F_{p,q,r} = C\sum_{i=1}^{\infty} I_{\lambda(p,q,r,i)}. \tag{14}$$

Posons

$$\eta = \frac{1|}{|\nu_1} + \frac{1|}{|\nu_2} + \frac{1|}{|\nu_3} + \cdots, \tag{15}$$

où

$$\nu_{2^p 3^q 5^r 7^i} = \lambda(p, q, r, i) \tag{16}$$

pour p, q, r, i naturels, et $\nu_n = 1$ pour les indices n qui ne sont pas de la forme $2^p 3^q 5^r 7^i$.

D'après (2) et en vertu de notre lemme (§ 2) l'intersection de l'ensemble $\Phi_{p,q,r}$ par la droite $y=\eta$ est l'ensemble dont la projection sur l'axe $y=0$ est l'ensemble $P(\eta; 2^p 3^q 5^r 7,\ 2^p 3^q 5^r 7^2, \ldots)$, donc, d'après (3), l'ensemble

$$C\sum_{i=1}^{\infty} I_{\nu(\eta,\, 2^p 3^q 5^r 7^i)},$$

c'est-à-dire, d'après (15), (16) et (14), l'ensemble $F_{p,q,r}$.

On en déduit tout de suite, d'après (12) et (13), que l'intersection de U par la droite $y=\eta$ est l'ensemble dont la projection sur l'axe $y=0$ est l'ensemble E.

Donc U est un ensemble plan $F_{\sigma\delta\sigma}$ universel. Or, on voit sans peine que la classe $\mathscr{K}$ de tous les ensembles $F_{\sigma\delta\sigma}$ linéaires jouit des propriétés 1) et 2) du § 1. Il en résulte que $E=DU$ est un ensemble $F_{\sigma\delta\sigma}$ et que $D-U$ n'est pas un $F_{\sigma\delta\sigma}$, et parsuite que E n'est pas un $G_{\delta\sigma\delta}$. Il en résulte, comme on sait, que la fonction caractéristique de l'ensemble E est une fonction de classe 4 dans la classification de Baire[1]).

Or, on voit sans peine que le complémentaire de l'ensemble U par rapport au plan est un ensemble plan $G_{\delta\sigma\delta}$ universel. Notre méthode permet donc aussi de construire des ensembles plans universels G, G_δ, $G_{\delta\sigma}$, $G_{\delta\sigma\delta}, \ldots$ Elle pourrait même être étendue aux ensembles mesurables (B) de classes transfinies.

5. Si, au lieu de la suite (1), on prend la suite $I_1, I_2, I_3, \ldots$ de tous les intérieurs des cercles rationnels du plan (c'est-à-dire dont les rayons et les coordonnées des centres sont rationnels), et si, n'altérant pas la définition des ensembles $P(x)$ (formule (3)), on désigne par $M=M(k_1, k_2, \ldots)$

[1]) Cf. W. Sierpiński: *Sur une fonction de classe 4*, „In memoriam N. I. Lobačevski", vol. II. Kasan 1926.

l'ensemble de tous les points (x, y, z) d'espace, tels que z est un nombre irrationnel et $(x, y) \epsilon P(z)$, on voit sans peine (en modifiant légèrement la démonstration du § 2) que $F(k_1, k_2, \ldots) = M + M'$ est un ensemble fermé, tel que pour tout nombre irrationnel ζ l'intersection de $F(k_1, k_2, \ldots)$ par le plan $z = \zeta$ est un ensemble, dont la projection sur le plan $z = 0$ est l'ensemble $P(\zeta; k_1, k_2, \ldots)$ (défini par la formule (3)). On en déduit facilement (par un raisonnement tout à fait analogue à celui du § 4) l'existence des ensembles fermés (resp. G, F_σ, G_δ, $F_{\sigma\delta}, \ldots$) dans l'espace à 3 dimensions, dont les intersections par les plans $z =$ const. donnent tous les ensembles fermés (resp. G, F_σ, G_δ, $F_{\sigma\delta}, \ldots$) plans [1]). On pourrait démontrer sans peine que de tels ensembles fermés (resp. G, F_σ, $G_\delta, \ldots$) jouissent de la propriété suivante: tout plan non parallèle au plan $z = 0$ les rencontre en un ensemble plan fermé (resp. G, F_σ, $G_\delta, \ldots$) universel.

Appelons *ensembles* (A) (de M. M. Souslin et Lusin) les projections des ensembles G_δ, et soit Γ un ensemble G_δ dans l'espace à 3 dimensions, dont les intersection par le plans $y =$ const. donnent tous les ensembles G_δ plans. Il est évident que la projection Π de Γ sur le plan $z = 0$ est un ensemble plan (A) universel. Or, on voit sans peine que la classe $\mathscr{K}$ de tous les ensembles (A) linéaires jouit des propriétés 1) et 2) du § 1. Il en résulte que l'intersection de Π par la droite $y = x$ est un ensemble (A) dont le complémentaire n'est pas un ensemble (A).

Appelons A_ϱ les différences de deux ensembles (A). Une modification convenable du raisonnement du § 3 permettrait de démontrer qu'*il existe pour tout nombre naturel n un ensemble linéaire qui est une somme de $n+1$ ensembles A_ϱ sans être une somme de n ensembles A_ϱ*. Pareillement, en introduisant les notations $A_{\varrho\varrho}$ [2]), $A_{\varrho\varrho\varrho}, \ldots$ (analogues à $F_{\varrho\varrho}$, $F_{\varrho\varrho\varrho}, \ldots$) on pourrait prouver que *chacune de classes*

$$A_\varrho, \; A_{\varrho\varrho}, \; A_{\varrho\varrho\varrho}, \ldots$$

contient des ensembles n'appartenant pas aux classes antérieures.

[1]) Quant à l'ensemble fermé jouissant de cette propriété, cf. W. Sierpiński, *Fund. Math.* t. VII, p. 200.

[2]) Ici encore les ensembles $A_{\varrho\varrho}$ coïncident avec les sommes de deux A_ϱ.

On pourrait traiter pareillement les ensembles $A_{\varrho\sigma}$ (sommes d'infinités dénombrables d'ensembles A_ϱ), $A_{\varrho\sigma\varrho}$, les sommes de n ensembles $A_{\varrho\sigma\varrho}$, les ensembles $A_{\varrho\sigma\varrho\varrho}$, $A_{\varrho\sigma\varrho\sigma}$ etc. La méthode d'ensembles universels s'applique aussi aux ensembles *projectifs* de M. Lusin (ensembles qu'on obtient en partant d'ensembles fermés et en appliquant un nombre fini de fois les opérations P (projection) et C (complémentaire)).