Sur les images continues des ensembles de points.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Théorème. *Quelle que soit la famille $\mathscr{F}$ de puissance du continu d'ensembles de points (situés dans l'espace à m dimensions), il existe un ensemble de nombres réels H, tel que tout ensemble de la famille $\mathscr{F}$ est une image continue de l'ensemble H.*

Démonstration.

Dans le vol. XIII de ce journal, p. 230 (lemme I) j'ai démontré que l'espace à m dimensions, R_m, est une image continue de l'ensemble de tous les nombres irrationnels de l'intervalle $(0, 1)$. Il en résulte tout de suite que tout ensemble de points situé dans R_m est une image continue d'un ensemble formé de nombres irationnels. Il suffira donc, pour démontrer notre théorème, de supposer que les ensembles de la famille $\mathscr{F}$ sont formés de nombres irrationnels.

En modifiant légèrement la démonstration d'un lemme que j'ai donné dans le vol. XI de ce journal, p. 118, on obtient le suivant

Lemme: *Si H est un ensemble de nombres irrationnels, tout sous-ensemble de H fermé dans H est une image continue de H.*

t étant un nombre irrationnel, dont le développement dyadique est

$$t = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \dots,$$

désignons par $P(t)$ l'ensemble formé de tous les nombres réels x dont le développement dyadique est

$$x = \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2^2} + \frac{c_3}{2^3} + \dots,$$

où $c_{2n} = a_n$, pour $n = 1, 2, 3, \dots$ (les chiffres c_{2n-1} étant arbitraires, pour $n = 1, 2, 3, \dots$) [1]).

[1]) Cf. *Fund. Math.* t. VIII, p. 195.

On voit sans peine que les ensembles $P(t)$ correspondant aux nombres irrationnels t de $(0, 1)$ sont parfaits et que $P(t_1)\,P(t_2) = 0$, si $t_1 \neq t_2$. Chaque ensemble $P(t)$ contient donc un sous-ensemble $X(t)$ homéomorphe à l'ensemble de tous les nombres irrationnels.

Soit $\mathscr{F}$ une famille de puissance du continu, formée des ensembles de nombres irrationnels. Il existe donc une correspondance biunivoque entre les nombres irrationnels t de $(0, 1)$ et les ensembles de la famille $\mathscr{F}$: soit $E(t)$ l'ensemble de $\mathscr{F}$ correspondant au nombre t dans cette correspondance. L'ensemble $X(t)$ étant homéomorphe à l'ensemble de tous les nombres irrationnels, il existe un sous-ensemble $X_1(t)$ de $X(t)$ homéomorphe à $E(t)$. Désignons par H l'ensemble-somme de tous les ensembles $X_1(t)$ correspondants aux nombres irrationnels t de $(0, 1)$. On a évidemment, pour tout nombre irrationnel t de $(0, 1)$: $X_1(t) \subset X(t) \subset P(t)$, donc, $P(t)$ étant fermé: $X_1'(t) \subset P(t)$, et parsuite: $H.X_1'(t) \subset H.P(t)$; or, il résulte de la définition de l'ensemble H (les ensembles $P(t_1)$ et $P(t_2)$ étant disjoints pour $t_1 \neq t_2$) que $H\ P(t) = X_1(t)$. On a donc $H.X_1'(t) \subset X_1(t)$, c'est-à-dire les ensembles $X_1(t)$ sont fermés dans H. Donc, d'après notre lemme, chacun des ensembles $X(t)$, et parsuite aussi chacun des ensembles $E(t)$, c'est-à-dire chacun des ensembles de la famille $\mathscr{F}$, est une image continue de l'ensemble H, et notre théorème est démontré

P et Q étant deux ensembles (linéaires), convenons d'écrire $cP = cQ$, si Q est une image continue de P, et P est une image continue de Q, et convenons d'écrire $cP < cQ$ (ou $cQ > cP$), si P est une image continue de Q, mais Q n'est pas une image continue de P [1]).

On voit sans peine qu'il existe pour tout ensemble linéaire P un ensemble linéaire Q, tel que $cP < cQ$.

En effet, l'ensemble P est, comme on sait, homéomorphe à un ensemble P_1 de points intérieurs à l'intervalle $(0, 1)$. D'autre part l'ensemble de tous les images continues de P a la puissance du

[1]) P et Q étant deux ensembles donnés, cP et cQ ne sont pas nécessairement comparables, c'est-à-dire susceptibles à être liés par un des signes: $<$, $=$ et $>$ (P. e. si P est un ensemble formé de deux points et si Q est un segment, cP et cQ sont incomparables). On ne sait pas s'il existe une suite infinie d'ensembles linéaires $E_1, E_2, E_3, \dots$, tels que cE_m et cE_n ne soient pas comparables, pour $m \neq n$. (Problème de M. Kuratowski).

continu, et l'ensemble de tous les sous-ensembles de l'intervalle $(2, 3)$ a une puissance supérieure à celle du continu. Il existe donc dans l'intervalle $(2, 3)$ un ensemble Q_1 qui n'est pas une image continue de P. Posons $Q = P_1 + Q_1$: on voit sans peine que P_1, donc aussi P, est une image continue de Q: on a donc $cP \leqslant cQ$. Or, Q_1 est aussi une image continue de Q: s'il était $cP = cQ$, Q et parsuite aussi Q_1 serait donc une image continue de P, contrairement à la définition de Q_1. On a donc $cP < cQ$, c. q. f. d.

Cette remarque permet de déduire de notre théorème le suivant

Corollaire 1. *Si $\mathcal{F}$ est une famille de puissance du continu d'ensembles (linéaires), il existe un ensemble Q, tel qu'on a $cQ > cP$, pour chaque ensemble P de la famille $\mathcal{F}$.*

En effet, d'après notre théorème il existe un ensemble linéaire H, tel que qu'on a, selon les notations adoptées: $cH \geqslant cP$ pour tout ensemble P de la famille $\mathcal{F}$. Or, comme nous venons de démontrer, il existe un ensemble (linéaire) Q, tel que $cQ > cH$, et il est évipeut que cet ensemble Q satisfait aux conditions du corollaire 1 qui est ainsi démontré.

Du corollaire 1 on peut sans peine déduire encore ce

Corollaire 2. *Il existe une suite transfinie de puissance $> 2^{\aleph_0}$ d'ensembles linéaires*

$$E_1, E_2, E_3, \ldots, E_\omega, E_{\omega+1}, \ldots, E_\xi, \ldots$$

telle qu'on a toujours $cE_\xi < cE_\eta$, pour $\xi < \eta$.

Du corollaire 2 résulte qu'il existe une famille de puissance supérieure à celle du continu d'ensembles linéaires distincts, tels que de deux ensembles de cette famille un est toujours une image continue de l'autre

Sur les fonctions semicontinues par rapport à chacune de deux variables.

Par

Stefan Kempisty (Wilno, Pologne).

M. Baire a établi, dans sa thèse [1]), qu'une fonction $f(x, y)$, continue par rapport à chacune de variables, est ponctuellement discontinue relativement à tout ensemble parfait dans le plan xy, et par suite est limite d'une suite de fonctions continues.

Une méthode simple de construction de cette suite a été ensuite donnée par M. Lebesgue [2]).

Or, comme il résulte d'un exemple de M. Sierpiński, une fonction de deux variables, semicontinue supérieurement par rapport à chacune d'elles, peut être même non mesurable [3]).

Cependent, nous allons le voir, *une fonction $f(x, y)$, semicontinue supérieurement de l'une des variables et semicontinue inférieurement par rapport à l'autre, est limite des fonctions continues.*

On arrive à ce résultat en étudiant les bornes de la fonction $f(x, y)$ sur les segments paralleles aux axes.

Ces bornes interviennent dans une note récente de M. Baire „Sur l'origine de la notion de semicontinuité" [4]), où nous trouvons le théorème suivant:

Si $f(x, y)$ est continue dans un rectangle parallèle aux axes, par rapport à chacune de variables, la borne supérieure des valeurs

[1]) Sur les fonctions des variables réelles, Annali di Math., 1899.

[2]) Sur les fonctions représentables analytiquement, Journal de Math., 190 p. 201.

[3]) W. Sierpiński. *Funkcje przedstawialne analityczne*, Warszawa, 1925 p. 68 note [2]).

[4]) Bulletin de la Societé Mathematique de France t. 54 (1927) p. 141.