soit:

$$E \subset \underset{(x,y)}{\mathrm{E}}[x=0,\ 0<y<\gamma_0],\ E \in \mathcal{K},$$

entraînent nécessairement:

$$\varphi(E) < \frac{\varepsilon}{8}.$$

En appliquant le même raisonnement à toutes les demi-axes de coordonnées et aux secteurs intermédiaires, on obtient, d'après ce qui précède (et l'égalité $\varphi((0,0))=0$), le résultat suivant:

il existe un nombre $c>0$ et un carré ouvert

$$Q = \underset{(x,y)}{\mathrm{E}}[-c<x<c,\ -c<y<c]$$

tel que pour tout ensemble $E$, remplissant les relations:

(28) $$E \subset Q,\quad E \in \mathcal{K},$$

on a:

(29) $$\varphi(E) < \varepsilon.$$

Or, le point $(0, 0)$ étant remplacé par tout autre point de $\Delta$, tous les raisonnements précédents subsistent: les formules (28) et (29) démontrent donc notre théorème.

Il est immédiatement clair que le théorème démontré est vrai dans l'espace euclidien à un nombre quelconque de dimensions.

D'autre part on voit sans peine que ce théorème est vrai pour toute fonction d'ensemble normal[1]) additive (au sens absolu ou non) bornée, définie sur un corps d'ensembles quelconque (sommable au sens complet ou non) contenant la famille d'intervalles fermés (d'un domaine $\Delta$).

[1]) Au sens de M. de la Vallée Poussin. V. Intégrales de Lebesgue etc., Paris, 1916, p. 86.

# Sur un problème conduisant à un ensemble non mesurable, ne contenant aucun sous-ensemble parfait.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

M. Knaster m'a posé le problème suivant:

*Est ce qu'on peut nommer une correspondance qui ferait correspondre à tout ensemble parfait linéaire un de ses points, de sorte qu'aux ensembles différents correspondent des points différents?* [1])

Je prouverai ici que *si l'on pouvait nommer une telle correspondance, on saurait nommer un ensemble non mesurable* $(L)$ *et ne contenant aucun sous-ensemble parfait.*

En effet, supposons qu'à tout ensemble parfait linéaire $P$ correspond un point $f(P)$ de $P$ et qu'on a toujours $f(P_1) \neq f(P_2)$, si $P_1 \neq P_2$.

Désignons par $N$ l'ensemble de tous les points $f(P)$ correspondants aux ensembles parfaits $P$ de mesure positive. Je dis que

I. *L'ensemble $N$ ne contient aucun sous-ensemble parfait.*

II. *L'ensemble $N$ est non mesurable* $(L)$.

Admettons que $N$ contienne un sous-ensemble parfait. L'ensemble $N$ contiendrait alors aussi un sous-ensemble parfait de mesure nulle, soit $P_0$, donc aussi le point $f(P_0)$ de $P_0$. Or, il résulte tout de suite de la définition de l'ensemble $N$ et de la propriété de la fonction $f$ que le point $f(P_0)$ n'appartient pas à $N$. On a donc une contradiction, et la propriété I est démontrée.

[1]) Il résulte sans peine du théorème de M. Zermelo (*Wohlordnungssatz*) qu'une telle correspondance existe.

Admettons maintenant que l'ensemble $N$ est mesurable $(L)$. Tout ensemble mesurable de mesure positive contenant un sous-ensemble parfait, il résulte de I que $N$ devrait être de mesure nulle. Or, dans ce cas, le complémentaire $Q$ de $N$ contiendrait un sous-enemble parfait $P$ de mesure positive, et le point $f(P)$ de $P$ appartiendrait à $Q$, donc pas à $N$, contrairement à la définition. L'hypothèse que II n'est pas vrai implique donc une contradiction [1]).

Notre proposition est ainsi démontrée.

[1]) On pourrait démontrer sans peine que l'ensemble $Q$ est non mesurable et de deuxième catégorie dans tout intervalle.

---

# Concerning functions of sets.

By

**Stanisław Ulam** (Lwów).

On considering the properties of functions defined on every subset of a certain space [1]) arises the problem of the existence of a function which satisfies the condition of „sustractivity" i. e., that

$$F(A-B)=F(A)-F(B),$$

but does *not* satisfy the „infinite additivity" i. e. the condition:

$$F(A_1+A_2+\ldots+A_n+\ldots)=F(A_1)+F(A_2)+\ldots+F(A_n)+\ldots$$

(the values of the function $F$ are sets!).

I shall prove here the existence of such a function. In the proof Zermelo's axiom of choice will play an essential part.

The space (denoted by 1) on which the function is defined is the set of all natural numbers. We shall call two sets of natural numbers $M$ and $N$ „almost identical" if the set $(M-N)+(N-M)$ is finite or vacuous.

$M$ „almost contains" $N$ will mean, that $M$ contains in the usual sense a set $N_1$ „almost identical" with $N$.

It is easy to conclude, that if $A$ is „almost identical" with $B$ and $B$ with $C$, $A$ is „almost identical" with $C$. Every two finite sets are „almost identical".

The class of all sets of natural numbers $X$ may be ordered with the aid of Zermelo's axiom into a transfinite sequence $\mathfrak{A}$.

We shall place now the sets of the sequence $\mathfrak{A}$ into certain classes: $K_0, K_1, \ldots, K_\alpha \ldots$ in the following way:

[1]) See e. g. A. Tarski Ann. Soc. Pol. Math. VI. pp. 127 et 132.