D'après (5) et (6) nous pouvons encore écrire:

$$E = \Phi_1 + (\Phi_2 - \Phi_1) + (\Phi_3 - \Phi_2) + \ldots$$

et, pour démontrer notre théorème, il suffira encore de prouver que l'ensemble $\Phi_{n+1} - \Phi_n$ est un F_s (pour $n = 1, 2, \ldots$). D'après le lemme 1, il suffira à ce but de démontrer que les ensembles Φ_{n+1} et Φ_n satisfont à la condition de ce lemme.

Soit donc d un intervalle fermé contenu dans Φ_{n+1} et ayant un point commun avec Φ_n. Nous avons donc, a'après (5), $d \subset E$, et parsuite il existe un intervalle de la suite (2), soit $\bar{\delta}_k$, tel que $d \subset \bar{\delta}_k$. Φ_n ayant un point commun avec d, Φ_n a un point commun avec $\bar{\delta}_k$, donc, d'après la définition de Φ_n, on a $\bar{\delta}_k \subset \Phi_n$ et, à plus forte raison: $d \subset \Phi_n$, ce qui prouve que les ensembles Φ_{n+1} et Φ_n satisfont à la condition du lemme 1, c. q. f. d.

Notre théorème est ainsi démontré complètement.

Sur la continuité des fonctions additives d'intervalle.

Par

G. Poprougénko (Varsovie).

Soit Δ un domaine ouvert plan, borné ou non (qui peut être égal à l'espace entier), et soit $\mathscr{K}$ le plus petit *corps d'ensembles* [1]) superposé à la famille F d'intervalles (finis) fermés appartenant à Δ.

Désignons par E l'ensemble variable parcourant tous les éléments de la famille $\mathscr{K}$.

Soit $\varphi(E)$ une fonction réelle de l'ensemble variable définie sur $\mathscr{K}$.

Nous supposons dans ce qui suit que cette fonction satisfait aux deux conditions fondamentales suivantes:

1) $\varphi(E)$ est additive *au sens restreint* sur $\mathscr{K}$ [2]);

2) $\varphi(E)$ est *localement bornée* à tout point ξ de Δ, c'est-à-dire, un point $\xi \in \Delta$ étant donné, ils existent deux nombres $\varepsilon = \varepsilon(\xi) > 0$ et $l = l(\xi) > 0$, tels que la relation

$$|\varphi(E)| < l$$

est remplie pour tout ensemble E appartenant à $\mathscr{K}$ et contenu dans le cercle ouvert $\mathscr{K}(\xi, \varepsilon)$ de rayon ε. On voit sans peine qu'il résulte des conditions 1) et 2) que la fonction $\varphi(E)$ est *partout finie* sur $\mathscr{K}$,

[1]) C'est à dire, la plus petite famille d'ensembles qui remplit les conditions suivantes: $F \subset \mathscr{K}$; la somme, le produit et la différence de deux ensembles appartenant à $\mathscr{K}$ appartient à $\mathscr{K}$.

Pour les détailles v. Hausdorff. Mengenlehre, 1927. § 17.

[2]) Il résulte évidemment de là que la fonction $\varphi(E)$ ne peut prendre sur $\mathscr{K}$ deux valeurs infinies de signes contraires.

car la supposition contraire entraîne l'existence d'un point $\xi_0 \in \Delta$, tel que $\varphi(E)$ est infinie dans tout voisinage de ce point.

Nous désignons, suivant M. Hahn, par $\pi(\varphi, E)$ et $\nu(\varphi, E)$ les variations positive et négative de la fonction $\varphi(E)$ sur l'ensemble E[1]). On démontre sans peine que les fonctions non-négatives $\pi(\varphi, E)$ *et* $\nu(\varphi, E)$ *satisfont aux conditions 1) et 2) en même temps que* $\varphi(E)$, et qu'on a identiquement:

$$(1) \qquad \varphi(E) = \pi(\varphi, E) - \nu(\varphi, E).$$

Or, les fonctions $\pi(\varphi, E)$ et $\nu(\varphi, E)$ étant finies et monotones, il résulte de la formule (1) que *la fonction* $\varphi(E)$ *est bornée sur tout ensemble* E *appartenant à* $\mathscr{K}$ (sans être nécessairement bornée sur $\mathscr{K}$).

Ceci posé, désignons par $Q(E)$ l'ensemble de valeurs que prend la fonction $\varphi(E)$ sur les sous-ensembles non-vides (appartenant à $\mathscr{K}$) de l'ensemble E, c'est-à-dire l'ensemble défini par l'égalité:

$$(2) \qquad Q(E) = \underset{\varphi(X)}{\mathrm{E}}[X \subset E,\ X \in \mathscr{K},\ X \neq 0]\ ^{2)};$$

soient $m(E)$ et $M(E)$ les bornes inférieure et supérieure de l'ensemble $Q(E)$.

Les nombres $m(E)$ et $M(E)$ sont, dans les conditions présentes, toujours finis, et on voit que *pour qu'il soit simultanément*

$$(3) \qquad \begin{cases} M(E) = \pi(\varphi, E), \\ m(E) = -\nu(\varphi, E), \end{cases}$$

pour un ensemble E *appartenant à* $\mathscr{K}$, *il faut et il suffit qu'on ait*:

$$(4) \qquad m(E) \,.\, M(E) \leqslant 0.$$

Il ne reste qu'à rappeler nos définitions de la continuité d'une fonction de l'ensemble variable que nous avons introduites dans le volume XII de ce journal[3]) sous une forme peu différente.

Soit ξ un point donné du domaine Δ, $\varepsilon > 0$ un nombre arbitraire.

La fonction $\varphi(E)$ *est dite continue sur* $\mathscr{K}$ *au point* ξ, *s'il existe, le nombre* $\varepsilon > 0$ *étant donné, un nombre* $\delta = \delta(\xi) > 0$, *tel que pour*

[1]) Quant à la définition de ces fonctions, v., p. ex., H. Hahn, Theorie d. reellen Functionen, Berlin, 1921, p. 399.

[2]) Cette notation, dont nous fairons souvent l'usage, provient de M. Lebesgue.

[3]) V. G. Poprougénko. Sur la propriété de Darboux etc. Fund. M. XII, p. 255.

tout ensemble E *remplissant les relations*:

$$(5) \qquad E \subset K(\xi, \delta), \quad E \in \mathscr{K},$$

on a:

$$(6) \qquad |\varphi(E)| < \varepsilon.$$

La fonction $\varphi(E)$ est *continue sur l'ensemble* $A \subseteqq \Delta$ (appartenant à $\mathscr{K}$ ou non), si elle est *continue en tout point* $\xi \in A$. Si l'on a dans ce dernier cas $A = \Delta$, je dirai aussi que $\varphi(E)$ *est continue sur* $\mathscr{K}$.

La continuité est *uniforme sur l'ensemble* $A \subset \Delta$, s'il existe, un $\varepsilon > 0$ étant donné, un nombre *fixe* $\delta > 0$, tel que les relations (5) et (6) sont remplies pour tout $\xi \in A$. Remarquons encore qu'il est facile de démontrer la proposition suivante, analogue au théorème connu de la théorie des fonctions de point:

La fonction $\varphi(E)$, *continue sur l'ensemble* $A \subset \Delta$ *fermé et compact, est continue uniformément sur* A[1]).

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème dont la démonstration est le but de ce travail.

Théorème. *Pour que la fonction* $\varphi(E)$ *remplissant les conditions 1) et 2) soit continue sur* $\mathscr{K}$, *il faut et il suffit que l'equation*

$$(7) \qquad \overline{Q(E)} = [-\nu(\varphi, E),\ \pi(\varphi, E)]\ ^{2)}$$

soit satisfaite identiquement sur la famille $\mathscr{K}$.

Démonstration. I *La condition (7) est nécessaire.*

En effet, soit E_0 un ensemble arbitraire non-vide de $\mathscr{K}$. La fonction $\varphi(E)$ étant continue sur $\mathscr{K}$, on a identiquement:

$$(8) \qquad \varphi((\xi)) = 0,$$

pour tous les ensembles (ξ) se composant d'un seul point de Δ. Il résulte de là que l'ensemble E_0 remplit la relation (4) et, parsuite, la relation (3). Or, si l'on a:

$$m(E_0) = -\nu(\varphi, E_0) = \pi(\varphi, E_0) = M(E_0) = 0,$$

la proposition est évidemment vraie; il suffit donc de supposer

[1]) Comp. notre mémoir cité.

[2]) L'expression à droite désigne l'intervalle fermé (qui peut se réduire à un seul point).

que:

$$m(E_0) = -\nu(\varphi, E_0) < \pi(\varphi, E_0) = M(E_0).$$

Soit α un nombre quelconque remplissant la relation:

$$(9) \qquad -\nu(\varphi, E_0) < \alpha < \pi(\varphi, E_0),$$

et soit $\varepsilon > 0$ un nombre arbitraire satisfaisant à l'inégalité suivante:

$$(10) \qquad -\nu(\varphi, E_0) < \alpha - \varepsilon < \alpha + \varepsilon < \pi(\varphi, E_0).$$

Il résulte de (3) et (10) qu'il existe un sous-ensemble E_1 de E_0 appartenant à $\mathcal{K}$ et tel qu'on a:

$$\varphi(E_1) > \alpha + \varepsilon.$$

Or, l'ensemble $\overline{E}_1$ appartient à $\mathcal{K}$ en même temps que E_1. La fonction $\varphi(E)$ étant continue uniformément sur $\overline{E}_1$, on voit bien qu'on peut décomposer l'ensemble E_1 en une somme finie et disjointe d'ensembles A_k $(k = 1, 2, \ldots, l_0)$ appartenant à $\mathcal{K}$ et tels qu'on a $|\varphi(A_k)| < \frac{\varepsilon}{2}$, ce qui donne dans un instant la démonstration exigée.

II *La condition* (7) *est suffisante.*

La démonstration de la suffisance s'appuit sur le lemme suivant.

Lemme. *Si la fonction $\varphi(E)$ remplit, pour tout $E \in \mathcal{K}$, la relation* (7), *les fonctions $\pi(\varphi, E)$ et $\nu(\varphi, E)$ la remplissent aussi.*

Dém. En premier lieu, je dis que la relation (7) entraîne pour la fonction $\varphi(E)$ la relation (8).

En effet, soit ξ_0 un point quelconque de Δ. Supposons que

$$(11) \qquad \varphi((\xi_0)) = c \neq 0,$$

soit $c > 0$. On a, d'après (1) et (2), $\pi(\varphi, (\xi_0)) = c$, $\nu(\varphi, (\xi_0)) = 0$, $Q((\xi_0)) = (c)$. Or, il résulte de la relation (7) que l'ensemble se composant d'un seul nombre doit être dense dans l'intervalle $[0, c]$, qui ne se reduit (d'après (11)) pas à un seul point, ce qui est impossible: la relation (8) et, parsuite, les relations (4) et (3) ont donc lieu partout sur la famille $\mathcal{K}$.

Cela posé, soit $E_0 \in \mathcal{K}$ l'ensemble arbitraire donné. Si l'on a $\varphi(X) \geqslant 0$ pour tout ensemble X, tel que $X \subset E_0$, $X \in \mathcal{K}$, il vient $\pi(\varphi, X) = \varphi(X)$, $\nu(\varphi, X) = 0$, et le lemme est démontré. Il en est de même dans le cas, où il est identiquement $\varphi(X) \leqslant 0$ (pour $X \subset E_0$, $X \in \mathcal{K}$). Il suffit donc de considérer le cas général, où l'on a:

$$(12) \qquad m(E_0) < 0, \quad M(E_0) > 0,$$

et de prouver que le lemme est vrai pour la fonction $\pi(\varphi, E)$, ce qui aura évidemment lieu, si nous démontrerons que l'ensemble de valeurs

$$\underset{\pi(\varphi, X)}{\mathrm{E}}[X \subset E_0, \; X \in \mathcal{K}]$$

est dense dans l'intervalle fermé $[0, \pi(\varphi, E_0)]$.

Soit donc c un nombre donné, satisfaisant à la condition:

$$(13) \qquad 0 < c < \pi(\varphi, E_0),$$

et soit $\varepsilon > 0$ un nombre arbitraire, suffisamment petit pour que les inégalités suivantes soient remplies:

$$(14) \qquad 0 < c - \varepsilon < c + 2\varepsilon < \pi(\varphi, E_0) - \varepsilon.$$

Il existe, d'après (8), (4), (3) et (14), un ensemble E_1, tel que:

$$E_1 \subset E_0, \quad E_1 \in \mathcal{K},$$

$$(15) \qquad \varphi(E_1) = \pi(\varphi, E_1) - \nu(\varphi, E_1) > \pi(\varphi, E_0) - \varepsilon,$$

et, parsuite ($\pi(\varphi, E)$ étant monotone),

$$(16) \qquad \nu(\varphi, E_1) < \varepsilon.$$

D'autre part on a, d'après (8) et (15):

$$m(E_1) \leqslant 0, \quad M(E_1) > \pi(\varphi, E_0) - \varepsilon.$$

Il existe donc, d'après (3), (14) et la relation (7), supposée remplie, un ensemble E_2, tel que:

$$(17) \qquad \begin{cases} E_2 \subset E_1 \subset E_0, \quad E_2 \in \mathcal{K}, \\ c - \varepsilon < \varphi(E_2) = \pi(\varphi, E_2) - \nu(\varphi, E_2) < c + \varepsilon. \end{cases}$$

Or, la fonction $\nu(\varphi, E)$ étant monotone, il résulte de (16) et (17) qu'on a:

$$c - \varepsilon < \pi(\varphi, E_2) < c + 2\varepsilon, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Revenons à la démonstration de notre théorème. La fonction $\varphi(E)$ étant, d'après ce qui précède, la différence de deux fonctions non-négatives satisfaisant aux conditions 1) et 2) et possédant sur $\mathcal{K}$

la propriété (7), il suffit de supposer qu'on a:

$$\varphi(E) \geqslant 0,$$

pour tout ensemble E appartenant à $\mathscr{K}$.

Soit $\varepsilon > 0$ un nombre donné, ξ — le point arbitraire de Δ; nous supposons, pour simplifier la notation, qu'on a:

$$\xi = (0, 0) \epsilon \Delta.$$

Je dis qu'il existe un nombre α_0 et un carré ouvert Q_0 défini par l'égalité

(18) $$Q_0 = \underset{(x,y)}{\mathrm{E}}[0 < x < \alpha_0,\ 0 < y < \alpha_0],$$

tel que pour tout sous-ensemble E de Q_0 (appartenant à $\mathscr{K}$) on a:

(19) $$\varphi(E) < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Supposons le contraire. Il résulte de cette supposition qu'il existe, pour tout n naturel, un carré Q_n et un ensemble E_n remplissant les relations suivantes:

(20) $$\begin{cases} E_n \subset Q_n = \underset{(x,y)}{\mathrm{E}}\left[0 < x < \frac{1}{n},\ 0 < y < \frac{1}{n}\right], & E_n \epsilon \mathscr{K}, \\ \varphi(E_n) \geqslant \frac{\varepsilon}{8} & (n = 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

Or, on a, d'après (7): $\varphi((\xi)) = 0$ pour tout $\xi \epsilon \Delta$, ce qui donne, d'après (4), (3) et (20):

(21) $$\begin{cases} -\nu(\varphi, E_n) = m(E_n) = 0 \\ \pi(\varphi, E_n) = M(E_n) \geqslant \frac{\varepsilon}{8} \quad (n = 1, 2, \ldots), \end{cases}$$

d'où il s'en suit (d'après (7)) qu'il existe, pour tout n naturel, un ensemble H_n satisfaisant aux conditions:

(22) $$H_n \subset E_n \subset Q_n,\ H_n \epsilon \mathscr{K},$$

(23) $$\frac{\varepsilon}{10} < \varphi(H_n) < \frac{\varepsilon}{9} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Supposons que pour l'infinité de termes de la suite $\{H_n\}$ on a:

(24) $$\varrho((0, 0), H_n) > 0.$$

Cette supposition entraîne nécessairement l'existence d'une suite infinie choisie d'ensembles $\{H_{n_k}\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *sans points communs deux à deux*, ce qui est impossible d'après les relations (22) et (23), la fonction (additive) $\varphi(E)$ étant supposée localement borneté au point (0, 0). Il en résulte qu'il existe un nombre naturel n_0, tel que l'ensemble H_{n_0} satisfait à la condition

(25) $$\varphi((0, 0)), H_{n_0}) = 0,$$

et, d'après ce qui précède, aux conditions

(26) $$H_{n_0} \subset \underset{(x,y)}{\mathrm{E}}\left[0 < x < \frac{1}{n_0},\ 0 < y < \frac{1}{n_0}\right],\ H_{n_0} \epsilon \mathscr{K}.$$

Or, tout ensemble $E \epsilon \mathscr{K}$ étant (d'après la construction du corps $\mathscr{K}$[1])) le résultat d'un groupe *fini* d'opérations „algébriques" executées sur un nombre fini d'intervalles de la famille F, il en résulte, comme on voit sans peine, que l'ensemble H_{n_0}, remplissant simultanément les relations (25) et (26), doit être assujeti à la condition suivante: *il existe un nombre $a > 0$ et un carré ouvert*

$$Q = \underset{(x,y)}{\mathrm{E}}[0 < x < a,\ 0 < y < a],$$

tel que

(27) $$Q \subset H_{n_0}.$$

On a donc, d'après (23), (27), et la monotonie de la fonction $\varphi(E)$:

$$\varphi(Q) < \frac{\varepsilon}{9},\ \varphi(E) < \frac{\varepsilon}{9},$$

pour tout $E \subset Q$, $E \epsilon \mathscr{K}$, contrairement aux relations (20).

Notre affirmation (v. (18) et (19)) est ainsi démontrée.

Pareillement, en remarquant que pour tout $E \epsilon \mathscr{K}$ les conditions

$$E \subset \underset{(x,y)}{\mathrm{E}}[0 \leqslant x,\ y = 0],$$
$$\varrho(E_1(0, 0)) = 0,$$

entraînent l'existence d'un nombre $a_1 > 0$ et d'un intervalle (linéaire) $I = \underset{(x,y)}{\mathrm{E}}[0 < x < a_1,\ y = 0]$ contenu dans E, on démontre qu'il existe un nombre $\beta_0 > 0$, et, par analogie, un nombre $\gamma_0 > 0$, tels que les relations

$$E \subset \underset{(x,y)}{\mathrm{E}}[0 < x < \beta_0,\ y = 0],\ E \epsilon \mathscr{K},$$

[1]) V. Hausdorff. O. c., § 17.

icm

soit:

$$E \subset \underset{(x,y)}{\mathrm{E}}[x=0,\ 0<y<\gamma_0],\ E \in \mathcal{K},$$

entraînent nécessairement:

$$\varphi(E) < \frac{\varepsilon}{8}.$$

En appliquant le même raisonnement à toutes les demi-axes de coordonnées et aux secteurs intermédiaires, on obtient, d'après ce qui précède (et l'égalité $\varphi((0,0))=0$), le résultat suivant:

il existe un nombre $c>0$ et un carré ouvert

$$Q = \underset{(x,y)}{\mathrm{E}}[-c<x<c,\ -c<y<c]$$

tel que pour tout ensemble E, remplissant les relations:

(28) $$E \subset Q,\quad E \in \mathcal{K},$$

on a:

(29) $$\varphi(E) < \varepsilon.$$

Or, le point (0, 0) étant remplacé par tout autre point de Δ, tous les raisonnements précédents subsistent: les formules (28) et (29) démontrent donc notre théorème.

Il est immédiatement clair que le théorème démontré est vrai dans l'espace euclidien à un nombre quelconque de dimensions.

D'autre part on voit sans peine que ce théorème est vrai pour toute fonction d'ensemble normal[1]) additive (au sens absolu ou non) bornée, définie sur un corps d'ensembles quelconque (sommable au sens complet ou non) contenant la famille d'intervalles fermés (d'un domaine Δ).

[1]) Au sens de M. de la Vallée Poussin. V. Intégrales de Lebesgue etc., Paris, 1916, p. 86.

Sur un problème conduisant à un ensemble non mesurable, ne contenant aucun sous-ensemble parfait.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

M. Knaster m'a posé le problème suivant:

Est ce qu'on peut nommer une correspondance qui ferait correspondre à tout ensemble parfait linéaire un de ses points, de sorte qu'aux ensembles différents correspondent des points différents? [1])

Je prouverai ici que *si l'on pouvait nommer une telle correspondance, on saurait nommer un ensemble non mesurable* (*L*) *et ne contenant aucun sous-ensemble parfait.*

En effet, supposons qu'à tout ensemble parfait linéaire P correspond un point $f(P)$ de P et qu'on a toujours $f(P_1) \neq f(P_2)$, si $P_1 \neq P_2$.

Désignons par N l'ensemble de tous les points $f(P)$ correspondants aux ensembles parfaits P de mesure positive. Je dis que

I. *L'ensemble N ne contient aucun sous-ensemble parfait.*

II. *L'ensemble N est non mesurable* (*L*).

Admettons que N contienne un sous-ensemble parfait. L'ensemble N contiendrait alors aussi un sous-ensemble parfait de mesure nulle, soit P_0, donc aussi le point $f(P_0)$ de P_0. Or, il résulte tout de suite de la définition de l'ensemble N et de la propriété de la fonction f que le point $f(P_0)$ n'appartient pas à N. On a donc une contradiction, et la propriété I est démontrée.

[1]) Il résulte sans peine du théorème de M. Zermelo (*Wohlordnungssatz*) qu'une telle correspondance existe.