Sur une propriété des ensembles F_σ linéaires.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Le but de cette Note est de démontrer le théorème suivant:

Théorème: *Pour qu'un ensemble F_σ linéaire, E, soit une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés disjoints, il faut et il suffit qu'il jouisse de la propriété suivante:*

Si l'intérieur d'un intervalle (a, b) appartient à E, les points a et b appartiennent à E.

La démonstration de ce théorème est plus compliquée qu'on pourrait le croire.

Nous dirons, pour abréger, qu'un ensemble est un F_s, s'il est une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés sans points communs deux à deux (parmi lesquels peuvent être des ensembles vides).

I. *La condition de notre théorème est nécessaire.*

En effet, soit E un ensemble F_s et soit $\delta(a < x < b)$ un intervalle ouvert, contenu dans E. Il est à pouver que $a \in E$ et $b \in E$.

Admettons que a non $\in E$. Soit c un nombre tel que $a < c < b$, et désignons par δ_1 l'intervalle fermé $a \leq x \leq c$ et par δ_0 l'intervalle $a < x \leq c$ qu'on obtient en enlevant de δ_1 son extrémité gauche, a. Nous aurons évidemment $\delta_0 \subset E$, donc $\delta_0 = \delta_0 E$ et, d'après a non $\in E$, $\delta_0 E = \delta_1 E$, donc $\delta_0 = \delta_1 E$. Or, δ_0 étant fermé et E étant un F_s, il résulte que $\delta_1 E$, c'est-à-dire δ_0, est un F_s. Or, c'est impossible, puisque δ_0 est évidemment semblable (géométriquement) à l'intervalle $0 < x \leq 1$, et j'ai démontré dans le vol. X de ce journal, p. 325, que ce dernier n'est pas un F_s. Pareillement on démontre que $b \in E$.

Pour prouver la suffisance de notre condition, nous démontrerons d'abord deux lemmes.

Lemme 1. *Pour que l'ensemble $F_1 - F_2$, où F_1 et F_2 sont deux ensembles linéaires fermés, soit un F_s, il faut et il suffit que la conditon C suivante soit remplie:*

Si d est un intervalle fermé contenu dans F_1 et ayant un point commun avec F_2, d est contenu dans F_2.

Démonstration.

La condition C est nécessaire. En effet, soit d un intervalle fermé contenu dans F_1 et ayant un point p commun avec F_2, et supposons que d n'est pas contenu dans F_2: il existe donc un point q de d qui n'appartient pas à F_2. L'extrémité p de l'intervalle (p, q) appartient donc à F_2 et l'extrémité q n'appartient pas à F_2: l'ensemble F_2 étant fermé, il existe dans (p, q) un point de F_2, dont la distance à q est minimum; soit r ce point.

Tous les points de l'intervalle (r, q), sauf le point r, sont donc étrangers à F_2, et parsuite (l'intervalle (p, q) étant contenu dans d, donc dans F_1) appartiennent à $F_1 - F_2$. Or, d'après $r \in F_2$, le point r n'appartient pas à $F_1 - F_2$: ce dernier ensemble ne jouit pas donc de la propriété P, et parsuite, comme nous avons démontré, ne peut être un F_s.

La condition C est suffisante. En effet, supposons que les ensembles fermés F_1 et F_2 satisfont à la condition C. On a $F_1 - F_2 = F_1 . \mathrm{C} F_2$, où $\mathrm{C} F_2$ est un ensemble ouvert, donc une somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'intervalles ouverts n'empiétant pas les uns sur les autres, soit $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \ldots$ Il suffira évidemment de démontrer que $F_1 \delta_n$ est un F_s (pour $n = 1, 2, \ldots$). Soit $\delta_n = (a, b)$. Je dis qu'il existe, pour tout k naturel, un point x_k n'appartenant pas à F_1 et tel que $0 < x_k - a < {}^1/k$. En effet, dans le cas contraire il existerait un nombre $c > a$, tel que tout nombre x satisfaisant à l'inégalité $a < x \leqslant c$ appartient à F_1, donc aussi $a \in F_1$, puisque F_1 est fermé. Or, il résulte de la définition de δ_n que $a \in F_2$. L'intervalle fermé (a, c) serait donc contenu dans F_1 et aurait le point a commun avec F_2, d'où résulte, d'après la condition C, qu'il est contenu dans F_2, ce qui est impossible, puisque $\delta_n \subset \mathrm{C} F_2$. Les modifications qu'il faudrait faire dans le cas où l'intervalle δ_n est infini, sont évidentes.

Pareillement on démontre qu'il existe, pour tout k naturel, un nombre y_k n'appartenant pas à F_1 et tel que $0 < b - y_k < {}^1/k$.

Nous avons évidemment $\lim_{k=\infty} x_k = a$ et $\lim_{k=\infty} y_k = b$, et on peut extraire de la suite x_k $(k=1,2,3,\ldots)$ une suite infinie décroissante, soit x'_k $(k=1,2,\ldots)$, et de la suite y_k $(k=1,2,\ldots)$ une suite infinie croissante, soit y'_k $(k=1,2,\ldots)$, de sorte qu'on ait $x'_1 < y'_1$. Or, on voit sans peine que les parties de l'ensemble fermé F_1 contenus dans les intervalles (x'_1, y'_1), (x'_2, x'_1), (y'_1, y'_2), (x'_3, x'_2), (y'_2, y'_3), $\ldots$, (x'_{k+1}, x'_k), (y'_k, y'_{k+1}), $\ldots$ sont fermés, sans points communs deux à deux, et que leur somme est l'ensemble $F_1\delta_n$. L'ensemble $F_1\delta_n$ est donc un F_s, c. q. f. d. Notre lemme est ainsi démontré.

Lemme 2. *Si*

(1) $$d_1,\ d_2,\ d_3, \ldots$$

est une suite finie ou infinie d'intervalles fermés n'ayant pas de points communs deux à deux, et si F est un ensemble linéaire fermé, contenant au moins un point de chacun des intervalles (1), *l'ensemble $\Phi = F + d_1 + d_2 + d_3 + \ldots$ est aussi fermé.*

Démonstration. Soit g un point d'accumulation de Φ, étranger à Φ. L'ensemble F étant fermé et contenu dans Φ, g ne peut être un point de F'. Il existe donc un nombre positif ε, tel que l'intervalle $(g-\varepsilon, g+\varepsilon)$ ne contient aucun point de F. Or, g étant un point de Φ', il existe dans l'intervalle $(g-\varepsilon, g+\varepsilon)$ un point de Φ, soit p. De $p \epsilon \Phi$ et p non ϵF résulte que $p \epsilon \Phi - F$, c'est-à-dire que p appartient à un des intervalles (1), soit $p \epsilon d_n = (a_n, b_n)$. Or, nous avons $d_n \subset \Phi$ et g non $\epsilon\, \Phi$: on a donc g non $\epsilon\, d_n$.

Supposons que $g \leqslant p$: d'après $p \epsilon d_n$ on a donc $g \leqslant b_n$. Or, d'après g non $\epsilon\, d_n$, il ne peut être $g \geqslant a_n$: on a donc $g < a_n$. D'autre part, d'après $g \epsilon \Phi'$, il existe un point q de Φ, tel que $g < q < a_n$, donc, d'après $a_n \leqslant p$ et $p \leqslant g + \varepsilon : g < q < g + \varepsilon$, et comme plus haut, nous concluons qu'il existe un intervalle de la suite (1), soit $d_m = (a_m, b_m)$, tel que $q \epsilon d_m$, et, d'après $g < q$, nous trouvons, comme plus haut, $g < a_m$.

S'il était $a_n \leqslant b_m$, on aurait, d'après $a_m \leqslant q < a_n$, l'inégalité $a_m < a_n \leqslant b_m$, et les intervalles d_m et d_n auraient un point commun, a_n, ce qui est impossible. On a donc $b_m < a_n$. Or, F contient, d'après l'hypothèse, un point de d_m, soit x. Nous avons donc $a_m \leqslant x \leqslant b_m$, donc, d'après $g < a_m$, $b_m < a_n$, $a_n \leqslant p$ et $p \leqslant g + \varepsilon$: $g < x < g + \varepsilon$.

S'il était $p \leqslant g$, on conclurait de même qu'il existe un point x de F, tel que $g - \varepsilon < x < g$. Toutefois l'intervalle $(g-\varepsilon, g+\varepsilon)$ contiendrait un point de l'ensemble F, ce qui est impossible.

Notre lemme est ainsi démontré. Il subsiste évidemment, si entre les intervalles (1) il y a des intervalles infinis.

II. La condition de notre théorème est suffisante.

Soit E un ensemble F_σ linéaire, jouissant de la propriété P. L'ensemble de tous les points intérieurs de E est ouvert, et parsuite il est une somme d'un nombre fini $(\geqslant 0)$ ou d'une infinité dénombrable d'intervalles ouverts (finis ou infinis) n'empiétant pas les uns sur les autres, soit $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ Ces intervalles n'ont non plus des extrémités communes. En effet, si δ_m et δ_n avaient une extrémité commune, elle appartiendrait, en vertu de la propriété P, à l'ensemble E, et serait parsuite un point intérieur de E, ce qui est impossible. Les intervalles fermés

(2) $$\overline{\delta_1},\ \overline{\delta_2},\ \overline{\delta_3}, \ldots$$

(fermetures de $\delta_1, \delta_2, \ldots$) sont donc tous contenus dans E, sans points communs deux à deux, et on voit sans peine que si d est un intervalle contenu dans E, il existe un indice k, tel que $d \subset \overline{\delta_k}$.

L'ensemble E étant un F_σ, nous pouvons poser

(3) $$E = F_1 + F_2 + F_3 + \cdots,$$

où F_n $(n = 1, 2, \ldots)$ sont des ensembles fermés, et nous pouvons évidemment supposer que

(4) $$F_1 \subset F_2 \subset F_3 \cdots$$

Désignons par Φ_n l'ensemble qu'on obtient en ajoutant à l'ensemble F_n tout intervalle de la suite (2) qui a au moins un point commun avec F_n: d'après le lemme 2, Φ_n sera fermé.

D'après (3) (les intervalles (2) étant contenus dans E) nous avons évidemment

(5) $$E = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \cdots$$

et, d'après (4):

(6) $$\Phi_1 \subset \Phi_2 \subset \Phi_3 \subset \cdots$$

D'après (5) et (6) nous pouvons encore écrire:

$$E = \Phi_1 + (\Phi_2 - \Phi_1) + (\Phi_3 - \Phi_2) + \dots$$

et, pour démontrer notre théorème, il suffira encore de prouver que l'ensemble $\Phi_{n+1} - \Phi_n$ est un F_s (pour $n = 1, 2, \dots$). D'après le lemme 1, il suffira à ce but de démontrer que les ensembles Φ_{n+1} et Φ_n satisfont à la condition de ce lemme.

Soit donc d un intervalle fermé contenu dans Φ_{n+1} et ayant un point commun avec Φ_n. Nous avons donc, d'après (5), $d \subset E$, et parsuite il existe un intervalle de la suite (2), soit $\bar{\delta}_k$, tel que $d \subset \bar{\delta}_k$. Φ_n ayant un point commun avec d, Φ_n a un point commun avec $\bar{\delta}_k$, donc, d'après la définition de Φ_n, on a $\bar{\delta}_k \subset \Phi_n$ et, à plus forte raison: $d \subset \Phi_n$, ce qui prouve que les ensembles Φ_{n+1} et Φ_n satisfont à la condition du lemme 1, c. q. f. d.

Notre théorème est ainsi démontré complètement.

Sur la continuité des fonctions additives d'intervalle.

Par

G. Poprougénko (Varsovie).

Soit Δ un domaine ouvert plan, borné ou non (qui peut être égal à l'espace entier), et soit $\mathcal{K}$ le plus petit *corps d'ensembles*[1]) superposé à la famille F d'intervalles (finis) fermés appartenant à Δ.

Désignons par E l'ensemble variable parcourant tous les éléments de la famille $\mathcal{K}$.

Soit $\varphi(E)$ une fonction réelle de l'ensemble variable définie sur $\mathcal{K}$.

Nous supposons dans ce qui suit que cette fonction satisfait aux deux conditions fondamentales suivantes:

1) $\varphi(E)$ est additive *au sens restreint* sur $\mathcal{K}$[2]);

2) $\varphi(E)$ est *localement bornée* à tout point ξ de Δ, c'est-à-dire, un point $\xi \in \Delta$ étant donné, ils existent deux nombres $\varepsilon = \varepsilon(\xi) > 0$ et $l = l(\xi) > 0$, tels que la relation

$$|\varphi(E)| < l$$

est remplie pour tout ensemble E appartenant à $\mathcal{K}$ et contenu dans le cercle ouvert $\mathcal{K}(\xi, \varepsilon)$ de rayon ε. On voit sans peine qu'il résulte des conditions 1) et 2) que la fonction $\varphi(E)$ est *partout finie* sur $\mathcal{K}$,

[1]) C'est à dire, la plus petite famille d'ensembles qui remplit les conditions suivantes: $F \subset \mathcal{K}$; la somme, le produit et la différence de deux ensembles appartenant à $\mathcal{K}$ appartient à $\mathcal{K}$.

Pour les détailles v. Hausdorff. Mengenlehre, 1927. § 17.

[2]) Il résulte évidemment de là que la fonction $\varphi(E)$ ne peut prendre sur $\mathcal{K}$ deux valeurs infinies de signes contraires.