à condition que la classe A normale est un invariant de l'homéomorphie et que $(G_\delta) \times^* A_0 \subset A_0$ et $(G_\delta) \times^* C_0 \subset C_0$. Nous n'entrerons pas dans les détails de la démonstration et nous nous bornerons de remarquer que la démonstration s'appuie sur le fait que, quel que soit $\alpha < \omega_2$, on a $(G_\delta) \times^* M_\alpha \subset M_\alpha$, $(G_\delta) \times^* A_\alpha \subset A_\alpha$, et $(G_\delta) \times^* C_\alpha \subset C_\alpha$. Ces relations se démontrent sans peine par l'induction transfinie.

Si l'on suppose que la classe A ne contient que des ensembles mesurables (L), il en résulte que les ensembles appartenant à n'importe quelle classe M_α, A_α, C_α sont aussi mesurables (L). Cela se démontre au moyen du principe de l'induction transfinie et en s'appuyant surtout sur le théorème suivant [30]) de MM. N. Lusin et W. Sierpiński: l'opération (A) effectuée sur des ensembles mesurables (L) donne des ensembles mesurables (L).

Dans le cas, où tous les ensembles de la classe A jouissent de le propriété connue de Baire, toutes les classes M_α, A_α, C_α ne contiennent que des ensembles jouissant de la propriété de Baire. En effet, ce théorème peut être démontré au moyen du théorème suivant [31]): l'opération (A) effectuée sur des ensembles jouissant de la propriété de Baire ne donne que des ensembles jouissant de la propriété de Baire.

En particulier, si l'on prend pour A la classe de toutes les ensembles fermés de R_p et qu'on en construit l'échelle de classes M_α, A_α, C_α conformément à la *définition V*, on obtient une classification des ensembles „lusiniens" dont nous avons parlé plus haut. L'échelle de classes M_α (qui sont tous des invariants de l'homéomorphie) est du type Ω^2. Leur somme $M_{\Omega^2} = Л$ ne contient que des ensembles mesurables (L) et jouissant de la propriété de Baire [33]).

Il serait intéressant de rechercher les liaisons entre les ensembles $Л$ et les ensembles du type de projections des complémentaires des ensembles (A). Le problème correspondant parait être très difficile [32]).

[30]) *Sur quelques propriétés des ensembles* (A), *Bull. Ac. Crac. 1918. Sér. A. p. 48.*

[31]) O. Nikodym. *Sur quelques propriétés de l'opération* (A) *C. R. d. séances de la Soc. des Sc. et d. L. de Varsovie XIX. 1926 Classe III p. 294—298.*

[32]) voir N. Lusin. *Comptes rendus* t. 180. p. 1817. 15. VI. 1925. *Les propriétés des ensembles projectifs.*

[33]) voir [5]) et aussi E. Sélivanowski. *Sur une classe d'ensembles effectifs (ensembles C). Recueil Mathématique de la soc. Math. de Moscou (en russe)* XXXV. 3—4. 1928.

Sur la décomposition des ensembles en sous-ensembles presque disjoints.

(Supplément à la note sous le même titre du Volume XII de ce Journal).

Par

Alfred Tarski (Varsovie).

Dans ma note „*Sur la décomposition des ensembles en sous-ensembles presque disjoints*" du Volume XII de ce Journal j'ai posé [1]) plusieurs problèmes que je ne savais alors résoudre même à l'aide d'ainsi dite *hypothèse de Cantor sur les alephs* ou *hypothèse du continu généralisée*. Je vais donner à présent la solution de tous ces problèmes, en admettant cependant dans la plupart des cas l'hypothèse indiquée.

Pour les signes et notions, dont je vais faire usage ici, on se rapportera à l'article précité. Les nombres des définitions et théorèmes de cet article seront dans la note présente munis d'un astérisque (p ex. „def. 2*", „th 25*" etc.).

Je vais établir d'abord quelques théorèmes auxiliaires.

Théorème 1. *Si un nombre ordinal* α *n'est pas confinal avec* ω_β, *si en outre* $E \subset A(\alpha)$ [2]) *et* $\overline{\overline{E}} \geqslant \aleph_\beta$, *alors il existe un nombre ordinal* η *tel que l'on a* $\eta < \alpha$ *et* $\overline{\overline{A(\eta) \cdot E}} \geqslant \aleph_\beta$.

Démonstration. La formule: $\overline{\overline{E}} \geqslant \aleph_\beta$ implique aussitôt que $\overline{E} \geqslant \omega_\beta$ [3]). Considérons donc les deux cas possibles:

(a) $$\overline{E} = \omega_\beta.$$

Dans ce cas, conformément à l'hypothèse du théorème, l'ensemble $A(\alpha)$ du type α n'est pas confinal avec E. Comme d'autre part

[1]) P. 195 et 204

[2]) Le signe „$A(\xi)$", où ξ est un nombre ordinal, dénote l'ensemble de tous les nombres ordinaux plus petits que ξ.

[3]) Le signe „$\overline{E}$" dénote le type de l'ensemble E de nombres ordinaux ordonnés selon la grandeur.

$E \subset A(\alpha)$, l'ensemble E est contenu dans un segment de $A(\alpha)$. Il existe donc un nombre η vérifiant les formules: $\eta < \alpha$ et $E \subset A(\eta)$, d'où $A(\eta) . E = E$, $\overline{\overline{A(\eta) . E}} \geqslant \aleph_\beta$.

(b) $$\overline{E} > \omega_\beta.$$

On en déduit immédiatement que E contient un segment E_1 de type ω_β, donc de puissance $\aleph_\beta$. Soit η l'élément de E qui détermine le segment E_1. Comme $E \subset A(\alpha)$, on a $\eta < \alpha$; d'autre part on en conclut facilement que $E_1 \subset A(\eta)$, $A(\eta) . E = A(\eta) . E_1 = E_1$, d'où enfin $\overline{\overline{A(\eta) . E}} \geqslant \aleph_\beta$.

Le théorème est ainsi établi.

Théorème 2. *Si un ensemble M de puissance $\aleph_\alpha$ se laisse décomposer en une classe $\boldsymbol{K}$ formée d'ensembles de puissance $\geqslant \aleph_\beta$ et telle que $\mathfrak{d}(\boldsymbol{K}) \leqslant \aleph_\beta$, si en outre $cf(\alpha) \neq cf(\beta)$, alors on a*

$$\overline{\overline{\boldsymbol{K}}} \leqslant \aleph_\alpha . \sum_{\xi < \alpha} \aleph_\xi^{\aleph_\beta}.$$

Démonstration. Il est évident, qu'il suffit d'établir le théorème pour un seul ensemble M de puissance $\aleph_\alpha$. Il est le plus commode de poser

(1) $$M = A(\omega_\alpha).$$

On déduit de la formule $cf(\alpha) \neq cf(\beta)$ que le nombre ordinal ω_α n'est pas confinal avec ω_β. En appliquant le th. 1 et en tenant compte de (1) on en conclut que

(2) *à tout ensemble E de la classe $\boldsymbol{K}$ il correspond un nombre ordinal η tel que $\eta < \alpha$ et $\overline{\overline{A(\eta) . E}} \geqslant \aleph_\beta$.*

Soit

(3) *$\boldsymbol{K}_\eta$ la classe de tous les ensembles E appartenant à $\boldsymbol{K}$ pour lesquels η est le plus petit nombre ordinal vérifiant la formule $\overline{\overline{A(\eta) . E}} \geqslant \aleph_\beta$.*

Il résulte facilement de (2) et (3) que $\boldsymbol{K} = \sum_{\eta < \omega_\alpha} \boldsymbol{K}_\eta$, d'où, les classes $\boldsymbol{K}_\eta$ étant disjointes,

(4) $$\overline{\overline{\boldsymbol{K}}} = \sum_{\eta < \omega_\alpha} \overline{\overline{\boldsymbol{K}}}_\eta.$$

Or, observons encore que

(5) *E_1 et E_2 étant deux ensembles arbitraires différents de la classe $\boldsymbol{K}$, on a $\overline{\overline{(A(\eta) . E_1) . (A(\eta) . E_2)}} < \aleph_\beta$; si en outre les ensembles E_1 et E_2 appartiennent à $\boldsymbol{K}_\eta$, on a $A(\eta) . E_1 \neq A(\eta) . E_2$.*

En effet, conformément à l'hypothèse, on a $\mathfrak{d}(\boldsymbol{K}) \leqslant \aleph_\beta$, d'où, en vertu de la déf. 2*: $\overline{\overline{E_1 . E_2}} < \aleph_\beta$ et à fortiori

$$\overline{\overline{(A(\eta) . E_1) . (A(\eta) . E_2)}} < \aleph_\beta.$$

Si en outre $E_1 \in \boldsymbol{K}_\eta$ et $E_2 \in \boldsymbol{K}_\eta$, les ensembles $A(\eta) . E_1$ et $A(\eta) . E_2$ ne peuvent être identiques, car en raison de (3) la puissance de leur partie commune est inférieure à la puissance de chacun de ces ensembles.

Soit ensuite

(6) *$\boldsymbol{L}_\eta$ la classe de tous les ensembles $A(\eta) . E$, où $E \in \boldsymbol{K}$.*

On déduit de (3), (5) et (6) qu'à tout ensemble E de la classe $\boldsymbol{K}_\eta$ correspond d'une façon univoque un ensemble $A(\eta) . E$ de $\boldsymbol{L}_\eta$ et qu'à deux ensembles différents de la première de ces classes correspondent les ensembles différents de la seconde. Par conséquent $\overline{\overline{\boldsymbol{K}}}_\eta \leqslant \overline{\overline{\boldsymbol{L}}}_\eta$, d'où selon (4)

(7) $$\overline{\overline{\boldsymbol{K}}} \leqslant \sum_{\eta < \omega_\alpha} \overline{\overline{\boldsymbol{L}}}_\eta.$$

D'autre part, conformément à la déf. 2*, les conditions (5) et (6) entraînent que

(8) $$\mathfrak{d}(\boldsymbol{L}_\eta) \leqslant \aleph_\beta.$$

Comme enfin, en raison de (1) et de l'hypothèse du théorème, on a $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{K}) = A(\omega_\alpha)$, on conclut de (6) que

(9) $$\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{L}_\eta) = A(\eta) \quad \textit{pour} \quad \eta < \omega_\alpha.$$

Or, les formules (8) et (9) expriment que l'ensemble $A(\eta)$ de la puissance $\overline{\overline{A(\eta)}} = \overline{\eta}$ $(\eta < \omega_\alpha)$ se laisse décomposer en une classe d'ensembles $\boldsymbol{L}_\eta$ de la puissance $\overline{\overline{\boldsymbol{L}}}_\eta$ dont le degré de disjonction est $\leqslant \aleph_\beta$. En faisant donc usage du th. 1* on parvient à la conclusion que

(10) $$\overline{\overline{\boldsymbol{L}}}_\eta \leqslant \overline{\eta}^{\aleph_\beta} \quad \textit{pour} \quad \eta < \omega_\alpha.$$

Les formules (7) et (10) donnent aussitôt

(11) $$\overline{\overline{K}} \leqslant \sum_{\eta < \omega_\alpha} \overline{\eta}^{\aleph_\beta}.$$

α étant différent de 0 (ce qui résulte facilement de l'hypothèse), on peut effectuer les transformations suivantes:

(12) $$\sum_{\eta < \omega_\alpha} \overline{\eta}^{\aleph_\beta} = \sum_{\eta < \omega} \overline{\eta}^{\aleph_\beta} + \sum_{\xi < \alpha} \sum_{\omega_\xi \leqslant \eta < \omega_{\xi+1}} \overline{\eta}^{\aleph_\beta} = \sum_{\xi < \alpha} \sum_{\omega_\xi \leqslant \eta < \omega_{\xi+1}} \overline{\eta}^{\aleph_\beta} =$$
$$= \sum_{\xi < \alpha} \aleph_\xi^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\xi+1} \leqslant \aleph_\alpha \cdot \sum_{\xi < \alpha} \aleph_\xi^{\aleph_\beta}.$$

De (11) et (12) on obtient enfin

$$\overline{\overline{K}} \leqslant \aleph_\alpha \cdot \sum_{\xi < \alpha} \aleph_\xi^{\aleph_\beta}, \quad \text{c. q. f. d.}$$

Théorème 3. *Si les nombres ω^α et β sont confinaux avec le même nombre γ et si $\omega^\alpha \geqslant \beta$, alors ω^α est confinal avec β* [1]).

Démonstration. L'hypothèse du théorème entraîne l'existence de deux suites $\{\varrho_\zeta\}$ et $\{\sigma_\zeta\}$ de nombres ordinaux, satisfaisant aux conditions suivantes [2]):

(1) $\varrho_{\zeta_1} < \varrho_{\zeta_2}$, *lorsque* $\zeta_1 < \zeta_2 < \gamma$, *et* $\omega^\alpha = \lim\limits_{\zeta < \gamma} \varrho_\zeta$,

(2) $\sigma_{\zeta_1} < \sigma_{\zeta_2}$, *lorsque* $\zeta_1 < \zeta_2 < \gamma$, *et* $\beta = \lim\limits_{\zeta < \gamma} \sigma_\zeta$.

On peut de plus supposer que

(3) $\sigma_0 = 0$ *et* $\sigma_\xi = \lim\limits_{\zeta < \xi} \sigma_\zeta$, *lorsque ξ est un nombre de 2^{me} espèce,* $0 < \xi < \gamma$.

Si, en effet, la suite $\{\sigma_\zeta\}$ ne remplit pas la condition (3), on obtient facilement une nouvelle suite $\{\sigma'_\zeta\}$, qui vérifie simultanément les formules (2) et (3): dans ce but il suffit de poser $\sigma'_0 = 0$, $\sigma'_\zeta = \sigma_\zeta$ pour ζ de 1^{re} espèce, où $\zeta < \gamma$, et $\sigma'_\xi = \lim\limits_{\zeta < \xi} \sigma_\zeta$ pour ξ de 2^{me} espèce, où $0 < \xi < \gamma$.

[1]) Un théorème du même genre a été établi par M. Hausdorff dans ses *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, p. 131—132, à savoir: *si le même nombre ordinal a est confinal avec les nombres ω_β et γ et si $\omega_\beta \geqslant \gamma$, alors ω_β est confinal avec γ.*

[2]) Nous omettons le cas banal où $\alpha = 0$.

On déduit sans difficulte des formules (2) et (3) que

(4) *tout nombre $\eta < \beta$ détermine d'une façon univoque un nombre $\zeta < \gamma$ tel que $\sigma_\zeta \leqslant \eta < \sigma_{\zeta+1}$.*

A l'aide de (4) on peut définir une nouvelle suite $\{\tau_\eta\}$ de nombres ordinaux, notamment en posant:

(5) $$\tau_\eta \overset{\text{d}}{=} \varrho_\zeta + \eta, \quad \text{où} \quad \eta < \beta, \quad \zeta < \gamma \quad \text{et} \quad \sigma_\zeta \leqslant \eta < \sigma_{\zeta+1}.$$

Envisageons deux nombres arbitraires η_1 et η_2 tels que $\eta_1 < \eta_2 < \beta$. Déterminons, conformément à (4), les nombres ζ_1 et ζ_2, vérifiant les formules: $\zeta_1 < \gamma$, $\sigma_{\zeta_1} \leqslant \eta_1 < \sigma_{\zeta_1+1}$, $\zeta_2 < \gamma$ et $\sigma_{\zeta_2} \leqslant \eta_2 < \sigma_{\zeta_2+1}$. En vertu de (1) et (2) nous obtenons successivement: $\sigma_{\zeta_1} \leqslant \sigma_{\zeta_2}$, $\zeta_1 \leqslant \zeta_2$, $\varrho_{\zeta_1} \leqslant \varrho_{\zeta_2}$ et enfin $\varrho_{\zeta_1} + \eta_1 < \varrho_{\zeta_2} + \eta_2$. On a donc en raison de (5):

(6) $$\tau_{\eta_1} < \tau_{\eta_2}, \quad \text{lorsque} \quad \eta_1 < \eta_2 < \beta.$$

Remarquons d'autre part que les formules $\zeta < \gamma$ et $\eta < \beta$ entraînent, selon (1) et l'hypothèse du théorème, que $\varrho_\zeta < \omega^\alpha$ et $\eta < \omega^\alpha$, d'où, suivant la propriété connue des puissances du nombre ω, $\varrho_\zeta + \eta < \omega^\alpha$. En vertu de (4) et (5) on obtient donc: $\tau_\eta < \omega^\alpha$ pour $\eta < \beta$ et par conséquent

(7) $$\omega^\alpha \geqslant \lim_{\eta < \beta} \tau_\eta.$$

Considérons enfin la suite $\{\tau_{\sigma_\zeta}\}$. En raison de (2), (5) et (6) c'est une suite croissante de nombres ordinaux du type γ, satisfaisant à la condition: $\varrho_\zeta \leqslant \tau_{\sigma_\zeta}$ pour $\zeta < \gamma$. On en conclut selon (1) que $\omega^\alpha = \lim\limits_{\zeta < \gamma} \varrho_\zeta \leqslant \lim\limits_{\zeta < \gamma} \tau_{\sigma_\zeta}$ et comme la suite $\{\tau_{\sigma_\zeta}\}$ (du type γ) est extraite de la suite croissante $\{\tau_\eta\}$ (du type β) on a à plus forte raison:

(8) $$\omega^\alpha \leqslant \lim_{\eta < \beta} \tau_\eta.$$

Les formules (7) et (8) donnent aussitôt:

(9) $$\omega^\alpha = \lim_{\eta < \beta} \tau_\eta.$$

Or, suivant (6) et (9), il existe une suite croissante des nombres ordinaux du type β admettant comme limite le nombre ω^α. En d'autres termes, ω^α est confinal avec β, c. q. f. d.

On peut facilement généraliser la théorème précédent, en envisageant les nombres de la forme $\omega^\alpha . \nu$, où $\nu < \omega$, au lieu des nombres ω^α; ce n'est pas cependant la classe la plus vaste de nombres ordinaux, auxquels peut être étendu le théorème considéré.

Théorème 4. *Si $\mathfrak{m} = \mathfrak{q}^{\aleph_\alpha}$ ou bien si $\aleph_\alpha$ est le plus petit nombre cardinal vérifiant la formule $\mathfrak{m} < \mathfrak{q}^{\aleph_\alpha}$, si en outre $cf(\alpha) = cf(\beta)$ et $\alpha \geqslant \beta$, alors tout ensemble M de puissance $\mathfrak{m}$ se laisse décomposer en une classe $\boldsymbol{K}$ de puissance $\mathfrak{q}^{\aleph_\alpha}$ d'ensembles presque disjoints de puissance $\aleph_\alpha$, donc telle que $\mathfrak{d}(\boldsymbol{K}) \leqslant \aleph_\alpha$.*

Démonstration. Le théorème considéré présente une généralisation du th. 7*; les démonstrations de ces deux théorèmes ne diffèrent qu'en détails. C'est pourquoi nous nous bornons ici à indiquer la marche générale du raisonnement.

On prouve donc en premier lieu que $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_\alpha \geqslant \aleph_\beta$, d'où $\mathfrak{m} = \mathfrak{m} . \aleph_\beta$. On envisage ensuite un ensemble arbitraire Q de puissance $\mathfrak{q}$ et on désigne par „Q_ξ" l'ensemble de toutes les suites du type ξ (ξ étant un nombre ordinal), dont les termes appartiennent à Q.

Ici il se présente une certaine différence avec la démonstration du th. 7*. De la formule: $cf(\alpha) = cf(\beta)$, donnée dans l'hypothèse, on déduit notamment que les nombres ω_α et ω_β sont confinaux avec le même nombre $\omega_{cf(\alpha)} = \omega_{cf(\beta)}$. Comme on a de plus $\omega_\alpha \geqslant \omega_\beta$ et ω_α est une puissance de ω (vu la formule connue: $\omega_\alpha = \omega^{\omega_\alpha}$), on en conclut à l'aide du th. 3 que ω_α est confinal avec ω_β; autrement dit, il existe une suite croissante des nombres ordinaux $\{\tau_\eta\}$ du type ω_β qui converge vers la limite ω_α. On pose alors: $M_1 = \sum_{\eta < \omega_\beta} Q_{\tau_\eta}$ et on prouve que $\overline{\overline{M_1}} \leqslant \mathfrak{m}$.

Décomposons maintenant l'ensemble M_1 en sous-ensembles, plaçant dans le même sous-ensemble deux suites, qui sont éléments de M_1, lorsqu'elles sont des segments d'une même suite appartenant à Q_{ω_α}. En raisonnant dès lors tout comme dans la démonstration du th. 7* on montre que la classe $\boldsymbol{K}_1$ de tous ces sous-ensembles est de puissance $\mathfrak{q}^{\aleph_\alpha}$ et qu'elle se compose d'ensembles presque disjoints de puissance $\aleph_\beta$.

On considère enfin un ensemble arbitraire M_2 de puissance $\mathfrak{m}$, mais disjoint de M_1. En utilisant la formule: $\mathfrak{m} = \mathfrak{m} . \aleph_\beta$ établie auparavant, on peut décomposer cet ensemble en une classe $\boldsymbol{K}_2$ d'ensembles disjoints, qui est elle-même de la puissance $\mathfrak{m}$ et dont les éléments sont de puissance $\aleph_\beta$. Lorsqu'on pose: $M = M_1 + M_2$ et $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_1 + \boldsymbol{K}_2$, on constate sans peine que la classe $\boldsymbol{K}$ donne la décomposition cherchée de l'ensemble M de puissance $\mathfrak{m}$. On en conclut aussitôt que tout ensemble de la même puissance se laisse aussi décomposer de la même manière, c. q. f. d.

Après ces raisonnements préliminaires je passe aux problèmes qui constituent le principal objet de cette Note.

Dans mon article précité j'ai établi au th. 25*, en admettant l'hypothèse de Cantor sur les alephs, une simple condition nécessaire et suffisante pour que tout ensemble M de puissance $\aleph_\alpha$ soit décomposable en une classe $\boldsymbol{K}$ de puissance $< \aleph_\alpha$ formée d'ensembles presque disjoints et telle que $\mathfrak{d}(\boldsymbol{K}) \leqslant \aleph_\beta$; cette condition se présente sous la forme de l'inégalité $cf(\alpha) \leqslant \beta$. Il résulte du même théorème que dans des cas particuliers, notamment pour $\beta = cf(\alpha)$ et pour $\beta = \alpha$, la décomposition de l'ensemble M peut être effectuée de manière que la classe $\boldsymbol{K}$ soit formée exclusivement d'ensembles de puissance $\aleph_\beta$. Or, la question suivante s'était imposée d'une façon naturelle: est-il possible d'effectuer cette décomposition de la manière indiquée pour d'autres valeurs de β, à condition que ces valeurs remplissent la formule: $cf(\alpha) \leqslant \beta \leqslant \alpha$? Je ne savais alors résoudre ce problème même dans le cas le plus simple de $\alpha = \omega$ et $\beta = 1$.

Dans le théorème suivant je vais donner la solution de ce problème; je montre notamment à l'aide de l'hypothèse de Cantor qu'une telle décomposition n'est pas toujours possible et que la condition nécessaire et suffisante pour l'existence de cette décomposition s'exprime par la formle $cf(\alpha) = cf(\beta)$ (accompagnée de l'inégalité évidente $\beta \leqslant \alpha$). On en conclut en particulier que l'ensemble arbitraire M de puissance $\aleph_{\omega+\omega}$ se laisse décomposer en une classe $\boldsymbol{K}$ de puissance $> \aleph_{\omega+\omega}$ formée d'ensembles presque disjoints de puissance $\aleph_\omega$, donc telle que $\mathfrak{d}(\boldsymbol{K}) \leqslant \aleph_\omega$; par contre une décompomposition analogue d'un ensemble M de puissance $\aleph_\omega$ en une classe $\boldsymbol{K}$ formée d'ensembles de puissance $\aleph_1$ est impossible.

Théorème 5. *L'hypothèse (H) entraîne des conséquences suivantes:*

I. *Lorsque $cf(\alpha) \neq cf(\beta)$, aucun ensemble M de puissance $\aleph_\alpha$ ne se laisse décomposer en une classe $\boldsymbol{K}$ de puissance $> \aleph_\alpha$ d'ensembles de puissance $\geqslant \aleph_\beta$ et telle que $\mathfrak{d}(\boldsymbol{K}) \leqslant \aleph_\beta$.*

II. *Lorsque $cf(\alpha) = cf(\beta)$ et $\beta \leqslant \alpha$, tout ensemble M de puissance*

$\aleph_\alpha$ se laisse décomposer en une classe $\boldsymbol{K}$ de puissance $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$, donc de puissance $> \aleph_\alpha$, d'ensembles presque disjoints de puissance $\aleph_\beta$, donc telle que $\mathfrak{d}(\boldsymbol{K}) \leqslant \aleph_\beta$.

Démonstration. Pour établir la partie I du théorème envisageons deux nombres ordinaux α et β vérifiant la formule $cf(\alpha) \neq cf(\beta)$ et supposons qu'un ensemble M de puissance $\aleph_\alpha$ soit décomposé en une classe $\boldsymbol{K}$ formée d'ensembles de puissance $\geqslant \aleph_\beta$ et telle que $\mathfrak{d}(\boldsymbol{K}) \leqslant \aleph_\beta$. Comme on voit sans peine

$$(1) \qquad \beta < \alpha.$$

Suivant le th. 2 il résulte ensuite de notre supposition que

$$(2) \qquad \overline{\overline{\boldsymbol{K}}} \leqslant \aleph_\alpha \cdot \sum_{\xi < \alpha} \aleph_\xi^{\aleph_\beta}.$$

Or, l'hypothèse (H) implique que $\aleph_\xi^{\aleph_\beta}$ n'admet qu'une de trois valeurs: $\aleph_\xi$, $\aleph_{\xi+1}$ et $\aleph_{\beta+1}$ [1]), d'où on obtient facilement

$$(3) \qquad \aleph_\xi^{\aleph_\beta} \leqslant \aleph_\alpha \quad \textit{pour} \quad \xi < \alpha \quad \textit{et} \quad \beta < \alpha.$$

Les formules (1) — (3) donnent aussitôt:

$$\overline{\overline{\boldsymbol{K}}} \leqslant \aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha \cdot \overline{\alpha} \leqslant \aleph_\alpha^3 = \aleph_\alpha.$$

Nous parvenons donc à la conclusion conforme à l'énoncé du théorème que la classe $\boldsymbol{K}$ ne peut être de puissance $> \aleph_\alpha$.

Dans la démonstration de la partie II on raisonne tout comme dans la démonstration de la même partie du th. 25*. Il résulte notemment de l'hypothèse (H) que pour $\mathfrak{m} = \aleph_\alpha$ et $\mathfrak{q} = 2$ le nombre cardinal $\aleph_\alpha$ est le plus petit qui remplisse l'inégalité $\mathfrak{m} < \mathfrak{q}^{\aleph_\alpha}$. A l'aide du th. 4 nous en concluons que dans les hypothèses $cf(\alpha) = cf(\beta)$ et $\beta \leqslant \alpha$ tout ensemble M de puissance $\aleph_\alpha$ est décomposable de la façon cherchée.

Le théorème est ainsi entièrement établi.

Le th. 25*, envisagé ci-dessus, a donné lieu de plus à un autre problème, d'ailleurs très rapproché. Il s'agit notamment si l'on peut exiger dans la partie II de ce théorème que la classe $\boldsymbol{K}$ soit toujours (et non seulement pour $\beta = \alpha$) composée d'ensembles de puissance $\aleph_\alpha$ ou — d'une façon plus générale — d'ensembles de puissance $> \aleph_\beta$. Je ne savais alors resoudre ce problème même dans le

[1]) Cf. ma note *Quelques théorèmes sur les alephs*, Fund. Math., VII, p. 9 et 10.

cas le plus simple de $\beta = 0$, ignorant s'il existe ou non un ensemble M qui sont décomposable en une classe d'ensembles non-dénombrables $\boldsymbol{K}$ de puissance $> \overline{\overline{M}}$ et telle que $\mathfrak{d}(\boldsymbol{K}) \leqslant \aleph_0$. Dans le corollaire suivant je vais montrer que la solution de tous ces problèmes est négative et que les décompositions en question sont impossibles.

Corollaire 6. *L'hypothèse (H) entraîne la conséquence suivante:*

Aucun ensemble M de puissance $\aleph_\alpha$ en se laisse decomposer en une classe $\boldsymbol{K}$ de puissance $> \aleph_\alpha$ d'ensembles de puissance $> \aleph_\beta$ et telle que $\mathfrak{d}(\boldsymbol{K}) \leqslant \aleph_\beta$.

Démonstration. Conformément à la partie I du théorème précédent, la décomposition de la sorte est certainement impossible lorsque $cf(\alpha) \neq cf(\beta)$. Considérons donc le cas où $cf(\alpha) = cf(\beta)$. Comme $cf(\beta) \leqslant \beta$ et $cf(\beta+1) = \beta+1$ [1]), on a alors $cf(\alpha) \neq cf(\beta+1)$. Or remplaçons dans la partie I du th. 5 „β" par „$\beta+1$"; remarquons ensuite que les ensembles de puissance $> \aleph_\beta$ sont en même temps de puissance $\geqslant \aleph_{\beta+1}$ et que la formule $\mathfrak{d}(\boldsymbol{K}) \leqslant \aleph_\beta$ entraîne à plus forte raison la formule $\mathfrak{d}(\boldsymbol{K}) \leqslant \aleph_{\beta+1}$. Nous parvenons ainsi à la conclusion que la décomposition cherchée est impossible également dans le second cas, c. q. f. d.

Il est remarquable que l'on ne sait établir le corollaire précédent sans l'aide de l'hypothèse généralisée du continu, même dans le cas le plus simple et le plus intuitif de $\beta = 0$. On peut cependant prouver que dans ce cas particulier il suffit d'admettre au lieu de l'hypothèse (H) une hypothèse plus faible (H_0) qui peut être énoncée dans une de trois formes suivantes équivalentes entre eux:

I. *α étant un nombre ordinal arbitraire, on a $\aleph_\alpha^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$ ou bien $\aleph_\alpha^{\aleph_0} = \aleph_{\alpha+1}$ (en d'autres termes, aucun nombre cardinal $\mathfrak{m}$ ne satisfait à la formule $\aleph_\alpha < \mathfrak{m} < \aleph_\alpha^{\aleph_0}$).*

II. *Si $cf(\alpha) \neq 0$, on a $\aleph_\alpha^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$.*

III. *Si $cf(\alpha) = 0$, on a $\aleph_\alpha^{\aleph_0} = \aleph_{\alpha+1}$.*

Comme des propositions équivalentes à l'hypothèse (H_0) on peut indiquer encore les parties 1° et 2° du cor. 26* [1]).

Il mérite peut-être d'attention que les résultats obtenus dans le th. 5 et le cor. 5 à l'aide de l'hypothèse (H) se laissent partiellement établir sans cette hypothèse à condition que l'on restreigne le champs des considérations aux nombres cardinaux d'un système spécial $\{\aleph_{\pi(\alpha)}\}$ (cf. la déf. 3*). On peut notamment démontrer le suivant

[1]) Cf. mon article cité de Fund. Math. XII, p. 201—202, note [2]).

[1]) J'omets ici la démonstration de l'équivalence de toutes ces formes de l'hypothèse (H_0) qui s'appuie sur les résultats établis dans mes deux notes précitées de Fund. Math. VII et XII.

Théoréme 7. *Etant donné un nombre ordinal α de 2^me^ espèce,*

I. *si* $cf(\alpha) \neq cf(\beta)$, *aucun ensemble M de puissance* $\aleph_{\pi(\alpha)}$ *ne se laisse décomposer en une classe* $\boldsymbol{K}$ *de puissance* $> \aleph_{\pi(\alpha)}$ *d'ensembles de puissance* $\geqslant \aleph_\beta$ *et telle que* $\mathfrak{d}(\boldsymbol{K}) \leqslant \aleph_\beta$;

II. *si* $cf(\alpha) = cf(\beta)$ *et* $\beta \leqslant \alpha$, *tout ensemble M de puissance* $\aleph_{\pi(\alpha)}$ *se laisse décomposer en une classe* $\boldsymbol{K}$ *de puissance* $2^{\aleph_{\pi(\alpha)}}$, *donc de puissance* $> \aleph_{\pi(\alpha)}$, *formée d'ensembles presque disjoints de puissance* $\aleph_\beta$, *donc telle que* $\mathfrak{d}(\boldsymbol{K}) \leqslant \aleph_\beta$.

La démonstration, qui est tout-à-fait analogue à celle du th. 5, repose sur les propriétés connues des nombres $\aleph_{\pi(\alpha)}$ [1]; on y fera usage de la formule suivante qui se laisse établir sans difficulté: $cf(\pi(\alpha)) = cf(\alpha)$ pour α de 2^me^ espèce

Corollaire 8. *α étant un nombre ordinal de 2^me^ espèce, aucun ensemble M de puissance* $\aleph_{\pi(\alpha)}$ *ne se laisse décomposer en une classe* $\boldsymbol{K}$ *de puissance* $> \aleph_{\pi(\alpha)}$ *d'ensembles de puissance* $> \aleph_\beta$ *et telle que* $\mathfrak{d}(\boldsymbol{K}) \leqslant \aleph_\beta$.

La démonstration ne diffère en rien de celle du cor. 6.

Ce n'est que dans le cas où $\beta = 0$ que nous savons étendre le th. 7 et le cor. 8 aux nombres α de 1^re^ espèce. Une telle extension du th. 7 est contenue dans le cor. 28*, tandis que l'extension analogue du cor. 8 va être formulée ici d'une façon explicite.

Corollaire 9. *Aucun ensemble M de puissance* $\aleph_{\pi(\alpha)}$ *ne se laisse décomposer en une classe d'ensembles non-dénombrables* $\boldsymbol{K}$ *de puissance* $> \aleph_{\pi(\alpha)}$ *et telle que* $\mathfrak{d}(\boldsymbol{K}) \leqslant \aleph_0$.

Ce corollaire présente une conséquence immédiate du corollaire précédent (pour α de 2^me^ espèce) et du cor. 28* (dans le cas où α est de 1^re^ espèce).

Le th. 7. nous permet de résoudre d'une façon négative (sans l'aide de l'hypothèse de Cantor) certains problèmes qui ont été également posés dans ma note précitée de Fund. Math. XII, mais dont il n'a pas été ici question jusqu'à présent. A l'aide de ce théorème on peut notamment montrer que *les propositions (P) et (Q)* formulées alors pour être examinées *sont fausses et que le cor. 2* ne se laisse invertir dans toute son étendue.* Pour s'en convaincre, il suffit de poser: $\mathfrak{m} = \aleph_{\pi(\omega)}$, $\mathfrak{p} = \aleph_1$ et $\mathfrak{n} = \aleph_{\pi(\omega)}^{\aleph_1}$; il résulte du th. 7 qu'aucun ensemble M de puissance $\mathfrak{m}$ n'est pas décomposable en une classe $\boldsymbol{K}$ de puissance $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}$ d'ensembles de puissance $\geqslant \mathfrak{p}$ et telle que $\mathfrak{d}(\boldsymbol{K}) \leqslant \mathfrak{p}$.

[1] Cf. Fund. Math. VII, l. cit.

On peut caractériser tout court les résultats de ma note du Volume XII et de la note présente comme il suit: nous avons étudié (en admettant dans la partie considérable de nos raisonnements l'hypothèse de Cantor sur les alephs) tous les rapports qui existent entre quatre nombres cardinaux que l'on peut faire correspondre à une classe arbitraire d'ensembles $\boldsymbol{K}$, à savoir la puissance de cette classe, la puissance de la somme de tous les ensembles-éléments de $\boldsymbol{K}$, le degré de disjonction de cette classe et le minimum de $\boldsymbol{K}$ (c.-à-d. le plus petit nombre cardinal étant la puissance d'un ensemble de la classe $\boldsymbol{K}$). En quelle mésure l'hypothèse généralisée du continu doit intervenir dans les démonstrations des théorèmes de ce domaine, c'est une question à élucider.