En effet, imaginons l'ensemble A transféré sur la surface sphérique et considérons comme tranches de la décomposition de cette surface, outre les tranches de la décomposition de A, les points individuels qui n'appartiennent pas à A. L'hyper-espace de cette décomposition étant, comme nous venons de prouver, de dimension $\leqslant 2$, il en est de même de H ($=$ hyper-espace de la décomposition de A), puisque H en est un sous-ensemble.

Sur les diverses classes d'ensembles.

Par

Otton Nikodym (Cracovie).

Le but du présent travail est de compléter dans une certaine direction les résultats contenus dans le joli travail de M. W. Sierpiński: *Sur l'existence de diverses classes d'ensembles* [1]).

M. Sierpiński y a développé une méthode très générale et élégante permettant de démontrer l'„existence“ le diverses classes d'ensembles. Elle est basée sur la conception de l'ensemble universel [2]) appartenant à une classe donnée d'ensembles. Si l'on sait qu'une classe B admet un ensemble universel on en peut déduire [3]) l'existence d'un ensemble n'appartenant pas à B.

Ce principe permet de démontrer l'existence des ensembles „spécifiques“ appartenant aux diverses classes que l'on obtient en partant d'une classe donnée d'ensembles et en leurs appliquant successivement — suivant un principe, donné d'avance — des opérations élémentaires comme celle de la somme, du produit, de la soustraction et de l'opération (A) [4]). P. ex. on peut démontrer ainsi

[1]) ce volume (XIV) p. 82—91. (achevé en 1925).

[2]) de M. N. Lusin (*Fund. Math.* t. X. p. 79) et de M. Sierpiński. (*Fund. Math.* t. VII. p. 201), voir aussi l. c. [1]) p. 82 et 83.

[3]) l. c. p. 83.

[4]) En ce qui concerne l'opération (A), voir:

N. Lusin et W: Sierpiński. *Sur quelques propriétés des ensembles* (A). Bull. de l'Acad des Sc. de Cracovie 1918, Série A. p. 47.

On dit que l'ensemble e est le résultat de *l'opération* (A) effectuée sur le *système déterminant*

$$\{e_{i_1,\dots,i_k}\}, \quad (i_1,\dots,i_k=1,2,\dots), \quad (k=1,2,\dots) \tag{1}$$

si

$$e=\sum_{i_1,i_2,\dots} e_{i_1}\cdot e_{i_1,i_2}\cdot e_{i_1,i_2,i_3}\cdots$$

L'ensemble e s'appelle le *noyau* du système déterminant (1).

que dans la classification de Baire il existe toujours un ensemble d'une classe donnée et n'appartenant pas aux classes précédentes.

Or, j'ai remarqué que la dite méthode de M. Sierpiński peut être généralisée par un petit changement de la notion de l'*ensemble universel,* de sorte qu'elle s'applique aussi à l'opération de la projection des ensembles.

En outre les méthodes de M. Sierpiński, si l'on introduit des symboles spéciaux, permettent de démontrer d'une manière très naturelle „l'existence" des classes formant des échelles de types transfinis. Dans cet ordre d'idées on peut étudier le problème suivant posé par M. N. Lusin: Rechercher les propriétés de la plus petite classe $\mathfrak{J}$ d'ensembles qui contient tous les ensembles fermés, et qui jouit de deux propriétés suivantes: 1) $\mathfrak{J}$ contient les complémentaires de tous ses ensembles 2) l'opération $(\boldsymbol{A})$ effectuée sur les ensembles de $\mathfrak{J}$ donne des ensembles de $\mathfrak{J}$.

Dans la partie première je donne la définition de la *fonction universelle* appartenant à une classe donnée d'ensembles et j'en démontre les propriétés, en employant les méthodes de M. Sierpiński.

La partie deuxième s'occupe d'une échelle finie de classes d'ensembles, cette étude étant faite au moyen des methodes de M. Sierpiński.

La partie troisième s'occupe d'échelles (de classes d'ensembles) du type Ω et donne, en particulier, une classification très detaillée des ensembles mesurables $(\boldsymbol{B})$.

La quatrième qui a pour but l'étude du problème mentionné [5])

[5]) Le résultat principal (à cet égard) exprimant que la classe $\mathfrak{J}$ peut être construite au moyen d'une échelle de classes plus en plus larges M_α $(1 \leqslant \alpha < \Omega^2)$ et définies presque identiquement que dans la *définition V* du présent mémoire, ainsi que le fait que les ensembles M_α sont différents deux-à-deux j'ai eu démontré en 1925 par une méthode différente de celle d'ici et j'ai présenté le théorème ainsi que l'esquisse de démonstration pendant une des séances de *la Section Mathématique du Congrès des Naturalistes et des Médicins Polonais à Varsovie* en 1925. La méthode y employée était empruntée d'une Note de M. Sierpiński: *C. R. des séances de l'Ac. des Sc. (Paris) t. 175 p. 859, (13. XI. 1922). Sur l'existence de toutes les classes d'ensembles mesurables* $(\boldsymbol{B})$.
Remarquons que M. Eugène Selivanowski a publié dans les *C. R. des séances de l'Acad. des Sc.* (*Paris*) *[t. 184. p. 1311*, (*30. V. 1927*) *Sur une classe d'ensembles définis par une infinité dénombrable de conditions.]* une note dans laquelle il traite un problème semblable, dans lequel l'opération $(\boldsymbol{A})$ est remplacée par l'opération du „*crible*" de M. Lusin.

de M. Lusin (un peu généralisé) s'appuie sur la considération d'une échelle du type Ω_2, où Ω_2 désigne le plus petit nombre transfini ordinal de la puissance $\aleph_2$.

Notations.

1. $co_A E$ désigne le complémentaire de l'ensemble E par rapport à la variété A, c'est-à-dire $co_A E = A - E$. Dans le cas, où la variété A (qui ne sera dans la suite qu'une droite, un plan, un hyperplan cartésien etc.) est fixée, on écrira simplement: $co\, E$.

2. „0" désigne l'ensemble vide et „1" l'ensemble universel, c'est-à-dire, l'ensemble de tous les points de la variété envisagée.

3. $\overline{x_1, \ldots, x_n}\,\{\ldots\}$ *) désigne, selon M. B. Russell, l'ensemble de tous les points dont les coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ satisfont à la condition spécifiée entre les accolades.

4. $proj_A E$ désigne la projection orthogonale de l'ensemble E sur la variété A.

5. $a \,\bar{\epsilon}\, E$ désigne que l'élément a n'appartient pas à la classe E.

Remarque. $\varphi(.x_1, \ldots, x_n.)$ étant une condition (fonction propositionnelle, selon la terminologie de M. B. Russell) pour n variables $x_1, \ldots, x_n$, (coordonnées rectangulaires d'un point variable de l'espace à n-dimensions), on doit faire distinction entre l'ensemble

$$\overline{x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}} \left\{ \begin{matrix} \varphi(.x_1, \ldots, x_n.) \\ x_{n+1} = 0 \end{matrix} \right\}$$

et

$$\overline{x_1, \ldots, x_n}\ \{\varphi(.x_1, \ldots, x_n.)\}.$$

Néanmoins, dans ce qui suit, pour simplifier l'exposé, nous ferons couramment confondre ces deux ensembles, étant assuré qu'on a pas à craindre des confusions condnisant aux contradictions. A cet égard nous laissons à la patience du lecteur des changements, d'ailleurs très simples et évidents qu'on devrait faire pour être complètement précis au point de vue de la logique moderne.

1. Définition. I. B étant une classe d'ensembles, appelons *sa fonction déterminante* toute fonction $\Phi(\xi)$ jouissant des propriétés suivantes:

1) Φ est déterminé pour tous les nombres irrationnels ξ, les valeurs de le fonction étant des ensembles appartenant à la classse B,

2) quel que soit $b \in B$, il existe un nombre irrationnel ξ tel que $b = \Phi(\xi)$.

Soit, réciproquement, $\Phi(\xi)$ une fonction déterminée pour tous les nombres irrationnels ξ et dont les valeurs

*) $\hat{x}\{\ldots\}$

sont des ensembles; nous désignerons par $K(\Phi)$ la classe de tous les ensembles-valeurs de la fonction $\Phi(\xi)$.

La condition nécessaire et suffisante pour que $\Phi(\xi)$ soit une fonction déterminante de la classe B d'ensembles est que $B = K(\Phi)$.

ξ étant un nombre irrationnel, désignons par

$$\xi = E\xi + \frac{1|}{|\xi_1} + \frac{1|}{|\xi_2} + \dots \tag{1}$$

son développement en fraction continue et infinie dont les dénominateurs sont des nombres naturels. Définissons la fonction auxiliaire $\mu(\zeta, \lambda)$ pour tous les nombres irrationnels ζ et λ en posant:

$$\mu(\zeta, \lambda) \underset{df}{=} \frac{1|}{|\zeta_{\lambda_1}} + \frac{1|}{|\zeta_{\lambda_2}} + \dots, \text{*)} \tag{2}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \dots,$ sont les dénominateurs successifs du développement du nombre λ, comme dans (1).

Définition II. En supposant que $K(\Phi)$ ne se compose que d'ensembles de l'espace à n-dimensions ($n \geqslant 1$) pourvu d'un système de coordonnées rectangulaires $x_1, \dots, x_n$, appelons *fonction universelle de* Φ toute fonction $U(\tau)$ jouissant des propriétés suivantes:

1) $U(\tau)$ est déterminée pour tous les nombres irrationnels τ, les valeurs de la fonction étant des ensembles de l'espace R_{n+1} à $n+1$ dimensions (qui provient de R_n par l'adjonction d'une nouvelle coordonnée),

2) quel que soit le nombre irrationnel ζ, la projection orthogonale de l'ensemble:

$$\overline{x_1, \dots, x_n, z}\, \{z = \zeta\} \,.\, U(\tau)$$

sur R_n coïncide avec l'ensemble:

$$\Phi[\mu(\zeta, \tau)],$$

3. la projection orthogonale sur R_n de l'ensemble

$$\overline{x_1, \dots, x_n, z}\, \{x_1 = z\} \,.\, U(\tau)$$

est un ensemble de la classe $K(\Phi)$.

B étant une classe d'ensembles, appelons *fonction universelle de* B toute fonction $U(\tau)$ pour laquelle il existe une fonction déterminante $\Phi(\xi)$ de B telle que $U(\tau)$ est une fonction universelle de Φ.

*) $\underset{df}{=}$ désigne „égal par définition".

Nous démontrerons que, si B possède une fonction universelle, il existe un ensemble $b \in B$ tel que $co\, b$ n'appartient pas à B. Un tel ensemble b peut être construit d'une manière „effective" si l'on connait une fonction universelle de B. En effet, démontrons le théorème suivant [6]):

Théorème I. Soit B une classe d'ensembles de R_n et $U(\tau)$ une fonction universelle de $\Phi(\xi)$, où $B = K(\Phi)$; soit τ un nombre irrationnel tel que

$$\tau_m \neq \tau_n \quad \text{pour} \quad m \neq n.$$

Dans ces conditions l'ensemble

$$\underset{x_1, \dots, x_n}{co}\ \underset{x_1, \dots, x_n}{proj} [\overline{x_1, \dots, x_n, z}\, \{x_1 = z\} \,.\, U(\tau)]$$

n'appartient pas à B.

Démonstration. En imitant le raisonnement [7]) de M. Sierpiński, posons:

$$b = \underset{x_1, \dots, x_n}{proj} [\overline{x_1, \dots, x_n, z}\, \{x_1 = z\} \,.\, U(\tau)] \tag{1}$$

et supposons que $co\, b \in B$. Il existe alors un nombre irrationnel ξ tel que

$$co\, b = \Phi(\xi).$$

Je dis qu'il existe un nombre irrationnel ζ tel que

$$\xi = \mu(\zeta, \tau).$$

En effet, on a, en vertu de l'hypothèse, $\tau_n \neq \tau_m$ si $n \neq m$. Définissons les nombres naturels ζ_m que voici: Dans le cas, où il existe un indice s tel que $m = \tau_s$, posons $\zeta_m = \xi_s$ et dans le cas restant posons $\zeta_m = 1$.

Les nombres ζ_m sont ainsi determinés d'une manière univoque

[6]) analogue au Théorème (p. 83) se trouvant dans le memoire cité [1]) de M. Sierpiński.

[7]) l. c. [1]) p. 83.

Le nombre

$$\zeta \underset{df}{=} \frac{1|}{|\zeta_1} + \frac{1|}{|\zeta_2} + \dots$$

possède la propriété en question, parce que

$$\zeta_{\tau_k} = \xi_k \quad (k = 1, 2, \dots),$$

d'où

$$\mu(\zeta, \tau) = \frac{1|}{|\zeta_{\tau_1}} + \frac{1|}{|\zeta_{\tau_2}} + \dots = \frac{1|}{|\xi_1} + \frac{1|}{|\xi_2} + \dots = \xi.$$

Le nombre ζ étant trouvé, on a:

$$proj\, [\widehat{x, z}\, \{z = \zeta\} \,.\, U(\tau)] = \Phi[\mu(\zeta, \tau)] = \Phi(\xi),$$

donc

(2) $$co\, b = proj\, [\widehat{x, z}\, \{z = \zeta\} \,.\, U(\tau)].$$

Envisageons maintenant un point [8])

$$p \underset{df}{=} (\zeta, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}),$$

où $x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$ sont arbitraires.

Supposons que

(3) $$p \in co\, b.$$

En vertu de (2) il existe un point P appartenant à

$$\widehat{x, z}\, \{z = \zeta\} \,.\, U(\tau),$$

tel que sa projection coïncide avec p. Ce point est unique, à savoir:

$$P = (\zeta, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}, \zeta).$$

Puisque $P \in \widehat{x, z}\, \{x_1 = z\} \,.\, U(\tau)$, on a aussi

$$p \in \underset{x_1, \dots, x_n}{proj}\, [\widehat{x, z}\, \{x_1 = z\} \,.\, U(\tau)],$$

donc, d'après (1): $p \in b$ contrairement à (3).

On a donc

(4) $$p \in b.$$

D'après (1), il existe un point P' tel que $p = proj\, P'$ et que $P' \in \widehat{x, z}\, \{x_1 = z\} \,.\, U(\tau)$. On voit que $P' = P$, d'où:

$$P' \in \widehat{x, z}\, \{z = \zeta\}.$$

[8]) Dans le cas $n = 1$ les nombres $x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$ manquent.

Comme en outre on a, $P' \in U(\tau)$, on en déduit:

$$p \in proj\, [\widehat{x, z}\, \{z = \zeta\} \,.\, U(\tau)],$$

donc, d'après (2): $p \in co\, b$, ce qui est en contradiction avec (4). La supposition $co\, b \in B$ étant fausse, le théorème est démontré.

Theorème II. [9]) Dans le cas, où la classe B se compose de tous les ensembles fermés de l'espace R_n, il existe une fonction universelle de B. Une telle fonction ainsi que la fonction déterminante y appartenant peut être construite d'une manière „effective".

Démonstration. En répétant le raisonnement [10]) de M. Sierpiński, envisageons une suite simplement infinie

$$I_2, I_3, \dots$$

formée de toutes les sphères ouvertes et „rationnelles" [11]) de l'espace R_n et désignons par I_1 l'ensemble vide. Posons:

(1) $$\Phi(\xi) \underset{df}{=} co \sum_{i=1}^{\infty} I_{\xi_i}.$$

On voit aisément que

(2) $$B = K(\Phi).$$

En effet, les I_{ξ_i} étant des ensembles ouverts (ou vides), $\Phi(\xi)$ est toujours fermé.

Par conséquent $K(\Phi) \subset B$.

Soit maintenant b un ensemble fermé quelconque de R_n. Dans le cas, où $b = R_n$, on a $co\, b = 0$; donc

$$b = co \sum_{i=1}^{\infty} I_1 = \Phi\left(\frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \dots\right).$$

Dans le ces $b \neq R_n$ on a $co\, b \neq 0$, d'où il existe au moins une sphère I_m telle que $I_m \subset co\, b$. Déterminons tous les indices n pour lesquels $I_n \subset co\, b$. En désignant ces indices succesivement par $k_1 \leqslant k_2 \leqslant \dots$, on a [12])

$$b = co \sum_{i=1}^{\infty} I_{k_i} = \Phi\left(\frac{1|}{|k_1} + \frac{1|}{|k_2} + \dots\right).$$

[9]) analogue au lemme de M. Sierpiński l. c. [1]) p. 85.

[10]) l. c. [1]) p. 84 et 85.

[11]) le rayon ainsi que les coordonnées du centre sont rationnelles.

[12]) Dans le cas, où il n'y a qu'un nombre fini d'indices différentes nous écrirons le dernier une infinité de fois.

La relation (2) est ainsi démontrée.

Désignons par $V(\tau)$ l'ensemble de tous les points $(x_1, \dots, x_n, z)$ de l'espace R_{n+1}, pour lesquels z est irrationnel et où

$$(3) \qquad (x_1, \dots, x_n) \in co \sum_{i=1}^{\infty} I_{z_{\tau_i}}.$$

Je dis que

$$(4) \qquad U(\tau) \underset{df}{=} V(\tau) + [V(\tau)]'$$

est une fonction universelle pour Φ.

$U(\tau)$ est évidemment fermé; donc la R_n-projection de l'ensemble

$$\overbrace{x_1, \dots, x_n, z} \{x_1 = z\} . U(\tau)$$

est un ensemble fermé. Soit ζ un nombre irrationnel fixe; posons

$$(5) \qquad H \underset{df}{=} \overbrace{x_1, \dots, x_n, z} \{z = \zeta\}.$$

Nous prouverons d'abord que

$$H . V(\tau) = H . U(\tau)$$

pour tout τ irrationnel. D'après (4) il suffit de démontrer que $H : V' \subset V$. Soit donc $p(x_1, \dots, x_n, \zeta)$ un point de $H . V'$. Comme $p \in V'$, il existe une suite infinie $p_m(x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}, \zeta^{(m)})$ $(m = 1, 2, \dots)$ de points de V, telle que $\lim p_m = p$.

Donc $\lim x_k^{(m)} = x_k$ pour $k = 1, \dots, n$ et $\lim \zeta^{(m)} = \zeta$. les $\zeta^{(m)}$ sont irrationnels).

S'il était $p \bar{\in} V$, on aurait, d'après la définition de $V(\zeta)$

$$(x_1, \dots, x_n) \bar{\in} co \sum_{i=1}^{\infty} I_{\zeta_{\tau_i}},$$

c'est-à-dire

$$(x_1, \dots, x_n) \in \sum_{i=1}^{\infty} I_{\zeta_{\tau_i}},$$

donc il existerait un indice k tel que

$$(x_1, \dots, x_n) \in I_{\zeta_{\tau_k}}.$$

L'ensemble $I_{\zeta_{\tau_k}}$ étant ouvert et non vide, on aurait

$$(6) \qquad (x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}) \in I_{\zeta_{\tau_k}}$$

à partir d'un indice m. $(\geqslant \mu)$.

Comme $\lim \zeta^{(m)} = \zeta$ et comme ζ et $\zeta^{(m)}$ sont irrationnels, on a, en vertu d'une propriété connue des développements en fraction continue:

$$[\zeta^{(m)}]_s = \zeta_s$$

dès que $m > \mu_s$, où μ_s dépend de s.

Donc pour tout k

$$[\zeta^{(m)}]_{\tau_k} = \zeta_{\tau_k}$$

si $m > \mu'_k$. En tenant compte de (6) on a pour tous les m surpassant μ et μ'_k:

$$(x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}) \in I_{[\zeta^{(m)}]_{\tau_k}}.$$

Il en résulte:

$$(x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}) \in \sum_{k=1}^{\infty} I_{[\zeta^{(m)}]_{\tau_k}}$$

pour m suffisamment grands.

Par conséquent

$$(x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}, \zeta^{(m)}) \bar{\in} V(\tau)$$

à partir d'un indice m, ce qui est contradictoire. La relation établie $p \in V$ nous permet de conclure que la formule $H . V(\tau) = H . U(\tau)$ est vraie.

Or, d'après la définition de la fonction $V(\tau)$, la R_n-projection de l'ensemble $H . V(\tau)$ coïncide avec l'ensemble:

$$co \sum_{i=1}^{\infty} I_{\zeta_{\tau_i}} = \Phi[\mu(\zeta, \tau)].$$

Par conséquent

$$proj\, [\widehat{x, z} \{z = \zeta\} . U(\tau)] = \Phi[\mu(\zeta, \tau)].$$

Nous avons ainsi démontré que $U(\tau)$ est une fonction universelle pour Φ.

Afin d'aller plus loin, introduisons une conception qui ne sera, au fond, qu'une abreviation symbolique. Soit T un ensemble non vide d'éléments quelconques; envisageons toutes les fonctions $f(t)$

qui sont déterminées pour tous les $t \epsilon T$ et dont les valeurs sont des ensembles de points de R_n; de plus, envisageons toutes les fonctions $F(t)$ déterminées dans T mais dont les valeurs sont des *classes* d'ensembles de R_n. Soit $V(f)$ une opération (fonction) qui fait correspondre à toute fonction f un ensemble. (c'est aux fonctions et *non* à leurs valeurs qu'on fait correspondre les ensembles). Etant donnée une opération $V(f)$ définissons l'opération $V^*(F)$ de la manière suivante:

1) elle est déterminée pour tous les F, les valeurs de $V^*(F)$ étant des classes d'ensembles,

2) pour chaque F la valeur de $V^*(F)$ est la classe de tous les ensembles E, pour lesquels il existe une fonction f telle que

a) $f(t) \epsilon F(t)$ quel que soit t,

b) $E = V(f)$.

Nous appellerons $V^*(F)$ l'*opération adjointe* à $V(f)$. Pour en donner un exemple, définissons T comme l'ensemble de tous les nombres naturels. Dans ce cas f et F représentent respectivement une suite infinie d'ensembles et une suite de classes d'ensembles:

$$f(1),\quad f(2),\quad f(3),\ldots$$
$$F(1),\quad F(2),\quad F(3),\ldots$$

Définissons $V(f)$ que voici:

$$V(f) \underset{df}{=} f(1) + f(2) + \ldots$$

Or, si l'on fixe F, c'est-à-dire, si l'on fixe la suite infinie de classes d'ensembles

$$F(1),\quad F(2),\ldots,$$

$V^*(F)$ est identique avec la classe de tous les ensembles e qu'on peut obtenir en effectuant la somme $e = e_1 + e_2 + \ldots$, où $e_k \epsilon F(k)$, $(k = 1, 2, \ldots)$.

Exple. Pour obtenir la classe de tous les produits de deux ensembles dont l'un appartient à une classe donnée A et l'autre à une classe donnée B, il suffit de définir T comme l'ensemble composé de deux nombres 1 et 2 et définir V et F que voici:

$$V(f) \underset{df}{=} f(1) \cdot f(2).$$
$$F(1) \underset{df}{=} A,\quad F(2) \underset{df}{=} B.$$

La notion de l'opération adjointe étant définie d'une manière

précise, introduisons pour des cas simples quelques dénotations un peu plus maniables.

Dans le cas, où T est l'ensemble $[1, 2]$, $V(f) = f(1) + f(2)$, $F(1) = A$ et $F(2) = B$ écrivons $A +^* B$ pour désigner $V^*(F)$. $A +^* B$ c'est donc la classe de tous les ensembles $e = e_1 + e_2$, où $e_1 \epsilon A$, $e_2 \epsilon B$.

D'une manière analogue, si F est la suite A, B de deux classes d'ensembles et $V(f)$ le produit de deux ensembles, nous écrirons $A \times^* B$ au lieu de $V^*(F)$. Le symbole: $A_1 +^* A_2 +^* \ldots$ représente la classe de tous les ensembles $e = e_1 + e_2 + \ldots$, où $e_k \epsilon A_k$, $(k = 1, 2, \ldots)$ et d'une manière analogue on doit comprendre l'expression $A_1 \times^* A_2 \times^* \ldots$ Etant donné une classe A d'ensembles, désignons par $co^* A$ la classe de tous les ensembles $co\, e$, où $e \epsilon A$. Etant donné un système déterminant

$$\{B_{i_1, i_2, \ldots, i_k}\}, \quad \begin{matrix} (i_1, i_2, \ldots, i_k = 1, 2, \ldots) \\ (k = 1, 2, \ldots) \end{matrix}$$

de classes d'ensembles, désignons par

$$A^* \{B_{i_1, i_2, \ldots, i_k}\}$$

a classe des noyaux de tous les systèmes déterminants

$$\{e_{i_1, i_2, \ldots, i_k}\},$$

où $e_{i_1, \ldots, i_k} \epsilon B_{i_1, \ldots, i_k}$.

Remarque. La symbolique introduite ci-dessus*) n'est qu'une symbolique defectueuse et parsuite elle ne peut être appliquée qu'avec des grandes précautions. En effet une bonne symbolique jouit de la propriété que, si l'on remplace un symbole par un autre représentant la même chose, la signification de l'expression ne doit pas changer. Or, cela ne se présente pas dans notre cas. En effet on a

(1) $$(A +^* B) \times^* C = (A \times^* C) +^* (B \times^* C)$$

mais il n'est pas vrai que

(2) $$(A +^* B) \times^* C = (A \times C) + (B \times^* C')$$

si $C' = C$.

En effet, en suivant l'analogie aux cas simples que nous avons considéré plus haut, le membre droit de (1) peut être défini comme la classe de tous les ensembles

$$e = e_1 \cdot e_3 + e_2 \cdot e_3, \quad \text{où} \quad e_1 \epsilon A,\ e_2 \epsilon B,\ e_3 \epsilon C$$

*) p. 155.

tandisque le membre droit de (2) comme la classe de tous les ensembles

$$e = e_1 . e_3 + e_2 . e_3',\quad \text{où}$$

$$e_1 \in A,\quad e_2 \in B,\quad e_3 \in C \text{ et } e_3' \in C.$$

Pour rendre notre symbolique plus précise convenons d'écrire p. ex. „$A +^* A'$", où $A = A'$" au lieu de „$A +^* A$", dans le cas, où F représente la *suite* de deux classes égales et V l'opération de la somme. $A +^* A$ représente l'opération adjointe à $e + e$ et par conséquent elle ne donne que la classe A. Le vrai caractère de la symbolique en question repose sur le fait que p. ex. $A +^* B$ n'est pas une opération effectuée sur les classes A, B mais c'est une opération effectuée sur la *suite* de deux classes. Les remarques ci-dessus ont causé le fait que nous avons introduit la notion de l'opération adjointe d'une manière particulière.

Voilà quelques règles du calcul pour les symboles introduites.

$$B_1 +^* B_2 = B_2 +^* B_1,\quad (B_1 +^* B_2) +^* B_3 = B_1 +^* (B_2 +^* B_3)$$

$$B_1 \times^* B_2 = B_2 \times^* B_1,\quad (B_1 \times^* B_2) \times^* B_3 = B_1 \times^* (B_2 \times^* B_3).$$

Ces formules aisées à démontrer expriment la loi de commutation et de l'association pour „l'addition" et „la multiplication" des classes d'ensembles. Ces lois sont aussi valables pour l'addition et la multiplication d'une infinité dénombrable de classes.

On a toujours:

$$co^* (co^* B) = B$$

$$co^* (B_1 +^* B_2) = co^* B_1 \times^* co^* B_2$$

$$co^* (B_1 \times^* B_2) = co^* B_1 +^* co^* B_2.$$

Les deux règles de de Morgan sont aussi valables pour une infinité dénombrable d'ensembles.

En ce qui concerne les lois de distribution, on a

$$(B_1 +^* B_2) \times^* B_3 \subset (B_1 \times^* B_3) +^* (B_2 \times^* B_3')$$

$$(B_1 \times^* B_2) +^* B_3 \subset (B_1 +^* B_3) \times^* (B_2 +^* B_3'),$$

où $B_3 = B_3'$ et des relations analogues subsistent pour une infinité dénombrable de termes.

Théorème III. B étant une classe d'ensembles de R_n, supposons que $B = K(\Phi)$ et que $U(\tau)$ soit une fonction universelle de Φ. Dans ces conditions on a

1) $co^* B = K(\Phi_1)$, où $\Phi_1(\xi) \underset{df}{=} \underset{R_n}{co}\, \Phi(\xi)$;

2) $U_1(\tau) \underset{df}{=} \underset{R_{n+1}}{co}\, U(\tau)$ est une fonction universelle de Φ_1.

Démonstration.

Soit $e \in co^* B$. On a $co\, e \in B$, donc il existe un nombre irrationnel ξ, tel que $co\, e \in \Phi(\xi)$. Donc $e \in co\, \Phi(\xi) = \Phi_1(\xi)$. D'autre part on a, quel que soit le nombre irrationnel ξ: $\Phi(\xi) \in B$ et parsuite

$$\Phi_1(\xi) = co\, \Phi(\xi) \in co^* B.$$

Nous avons démontré que

$$(1) \qquad co^* B = K(\Phi_1).$$

Soit maintenant ζ un nombre irrationnel. Posons:

$$H \underset{df}{=} \overline{x_1, \ldots, x_n, z}\,\{z = \zeta\}.$$

La R_n-projection de l'ensemble $H . U(\tau)$ coïncide, en vertu de la définition des fonctions universelles, avec $\Phi[\mu(\zeta, \tau)]$; par conséquent

$$\underset{R_n}{proj}\,[H . U_1(\tau)] = \underset{R_n}{proj}\,[H . \underset{R_{n+1}}{co}\, U(\tau)] = \underset{R_n}{proj}\, \underset{H}{co}\,[H . U(\tau)] =$$

$$= \underset{R_n}{co}\, \underset{R_n}{proj}\,[H . U(\tau)] = \underset{R_n}{co}\, \Phi[\mu(\zeta, \tau)].$$

D'autre part, si l'on pose

$$G \underset{df}{=} \overline{x_1, \ldots, x_n, z}\,\{x_1 = z\},$$

on a:

$$proj\,[G . U_1(\tau)] = proj\,[G . \underset{R_{n+1}}{co}\, U(\tau)] = proj\, \underset{G}{co}\,[G . U(\tau)] =$$

$$= \underset{R_n}{co}\, proj\,[G . U(\tau)].$$

Puisque $proj\,[G . U(\tau)] \in K(\Phi)$ (en vertu de la définition des fonctions universelles), on a:

$$proj\,[G . U_1(\tau)] \in co^* K(\Phi) = co^* B,$$

c'est-à-dire, d'après (1):

$$proj\,[G . U_1(\tau)] \in K(\Phi_1).$$

Le théorème est ainsi démontré.

Théorème IV. Soient $B_1, \dots, B_m$ des classes d'ensembles de R_n, où $m \geqslant 2$ est fini. Supposons que chaqu'une de ces classes possède une fonction universelle. Dans ces conditions la classe

$$B \underset{df}{=} B_1 +^* \dots +^* B_m$$

en possède une aussi. — (Une telle fonction universelle peut être même construite d'une manière „effective" si l'on connait des fonctions universelles $U_k(\tau)$ de B_k et les fonctions $\Phi_k(\xi)$ correspondantes).

Démonstration [14]. Soit

$$B_k = K(\Phi_k) \tag{1}$$

et soit $U_k(\tau)$ une fonction universelle de $\Phi_k(\xi)$, $(k = 1, \dots, m)$. Posons pour tout nombre irrationnel

$$\xi = E\xi + \frac{1|}{|\xi_1} + \frac{1|}{|\xi_2} + \dots :$$

$$\begin{aligned} \Phi(\xi) \underset{df}{=} & \Phi_1\left(\frac{1|}{|\xi_1} + \frac{1|}{|\xi_{m+1}} + \frac{1|}{|\xi_{2m+1}} + \dots\right) + \\ & + \Phi_2\left(\frac{1|}{|\xi_2} + \frac{1|}{|\xi_{m+2}} + \frac{1|}{|\xi_{2m+2}} + \dots\right) + \\ & \dots\dots\dots\dots \\ & + \Phi_m\left(\frac{1|}{|\xi_m} + \frac{1|}{|\xi_{2m}} + \frac{1|}{|\xi_{3m}} + \dots\right), \end{aligned} \tag{2}$$

et pour tout nombre irrationnel

$$\tau = E\tau + \frac{1|}{|\tau_1} + \frac{1|}{|\tau_2} + \dots :$$

$$\begin{aligned} U(\tau) \underset{df}{=} & U_1\left(\frac{1|}{|\tau_1} + \frac{1|}{|\tau_{m+1}} + \frac{1|}{|\tau_{2m+1}} + \dots\right) + \\ & + U_2\left(\frac{1|}{|\tau_2} + \frac{1|}{|\tau_{m+2}} + \frac{1|}{|\tau_{2m+2}} + \dots\right) + \\ & \dots\dots\dots\dots \\ & + U_m\left(\frac{1|}{|\tau_m} + \frac{1|}{|\tau_{2m}} + \frac{1|}{|\tau_{3m}} + \dots\right). \end{aligned} \tag{3}$$

[14] L'idée de la démonstration est empruntée d'un raisonnement de M. Sierpiński l. c. [1] p. 85.

Nous allons prouver que $K(\Phi) = B$ et que $U(\tau)$ est une fonction universelle de Φ.

En effet, soit $b \in B$. Il existe des ensembles $b_1, \dots, b_m$ tels que $b_k \in B_k$, $(k = 1, \dots, m)$ et

$$b = b_1 + \dots + b_m.$$

Comme $B_k = K(\Phi_k)$, il existe un nombre irrationnel $\xi^{(k)}$ tel que $b_k \in \Phi_k(\xi^{(k)})$. Posons

$$\begin{aligned} \xi = & \frac{1|}{|\xi_1^{(1)}} + \frac{1|}{|\xi_1^{(2)}} + \dots + \frac{1|}{|\xi_1^{(m)}} + \\ & + \frac{1|}{|\xi_2^{(1)}} + \frac{1|}{|\xi_2^{(2)}} + \dots + \frac{1|}{|\xi_2^{(m)}} + \\ & \dots\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{4}$$

On a, de (2):

$$\begin{aligned} \Phi(\xi) &= \Phi_1(\xi^{(1)}) + \dots + \Phi_m(\xi^{(m)}) \\ &= b_1 + \dots + b_m = b. \end{aligned}$$

Il en résulte

$$B \subset K(\Phi). \tag{5}$$

Pour démontrer l'inclusion inverse, envisageons un nombre irrationnel η quelconque. On a, de (2):

$$\Phi(\eta) = \Phi_1(\eta^{(1)}) + \dots + \Phi_m(\eta^{(m)}),$$

où

$$\eta^{(k)} \underset{df}{=} \frac{1|}{|\eta_k} + \frac{1|}{|\eta_{m+k}} + \frac{1|}{|\eta_{2m+k}} + \dots, \qquad (k = 1, \dots, m);$$

donc, comme, d'après (1):

$$\Phi_k(\eta^{(k)}) \in B_k,$$

on a $\Phi(\eta) \in B_1 +^* \dots +^* B_m = B$. Par conséquent $K(\Phi) \subset B$, ce qui donne (avec (5)) la relation

$$B = K(\Phi). \tag{6}$$

Pour démontrer que $U(\tau)$ représente une fonction universelle de $\Phi(\xi)$, fixons le nombre irrationnel τ et envisageons le nombre irrationnel ζ quelconque. En posant $H \underset{df}{=} \overline{x_1, \dots, x_n, z}\,\{z = \zeta\}$, considérons l'ensemble:

$$\underset{R_n}{proj}\,[H\,.\,U(\tau)]=\sum_{k=1}^{m} proj\,[H\,.\,U_k(\tau^{(k)})],\qquad \text{(voir (3))},$$

où

$$\tau^{(k)}\underset{df}{=}\frac{1\,|}{|\,\tau_k}+\frac{1\,|}{|\,\tau_{m+k}}+\frac{1\,|}{|\,\tau_{2m+k}}+\dots\qquad (k=1,\dots,m).$$

On a

$$proj\,[H\,.\,U_k(\tau^{(k)})]=\Phi_k[\mu(\zeta,\tau^{(k)})]$$

parce que U_k est une fonction universelle pour Φ_k. Par conséquent:

$$proj\,[H\,.\,U(\tau)]=\sum_{k=1}^{m}\Phi_k[\mu(\zeta,\tau^{(k)})]$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\Phi_k\left[\frac{1\,|}{|\,\zeta_{\tau_1^{(k)}}}+\frac{1\,|}{|\,\zeta_{\tau_2^{(k)}}}+\dots\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\Phi_k\left[\frac{1\,|}{|\,\zeta_{\tau_k}}+\frac{1\,|}{|\,\zeta_{\tau_{m+k}}}+\dots\right],$$

donc, en vertu de (2):

$$proj\,[H\,.\,U(\tau)]=\Phi\left[\frac{1\,|}{|\,\zeta_{\tau_1}}+\frac{1\,|}{|\,\zeta_{\tau_2}}+\frac{1\,|}{|\,\zeta_{\tau_3}}+\dots\right]=\Phi[\mu(\zeta,\tau)].$$

La première propriété des fonctions universelles subsiste ainsi pour $U(\tau)$.

En procédant à la démonstration de la seconde propriété, considérons l'ensemble $proj\,[G\,.\,U(\tau)]$, où on a posé:

$$G\underset{df}{=}\overbrace{x_1,\dots,x_n,z}\,\{x_1=z\}.$$

On a, d'après (3):

$$proj\,[G\,.\,U(\tau)]=proj\sum_{k=1}^{m}G\,.\,U_k(\tau^{(k)}),$$

où

$$\tau^{(k)}\underset{df}{=}\frac{1\,|}{|\,\tau_k}+\frac{1\,|}{|\,\tau_{m+k}}+\frac{1\,|}{|\,\tau_{2m+k}}+\dots$$

Donc

$$proj\,[G\,.\,U(\tau)]=\sum_{k=1}^{m}proj\,[G\,.\,U_k(\tau^{(k)})].$$

Les termes de la somme du membre droit étant, d'après l'hypothèse, des ensembles de B_k, il en résulte que le membre gauche est un ensemble appartenant à $B_1 +^* \dots +^* B_m$, donc à B.

Le théorème est ainsi démontré.

Voilà une application des théorèmes III et IV. Soit donné une expression ne contenant qu'un nombre fini „d'additions", de „multiplications", de „soustractions" et de l'opérations „co*" effectuées sur des classes d'ensembles de R_n. Supposons de plus que la dite expression ne contient pas deux ou plusieures fois une même lettre désignant une classe d'ensembles. Or, si l'on suppose que toute classe figurant dans notre expression possède une fonction universelle, on peut démontrer (en appliquant de prôche en prôche les dits théorèmes) que B en possède une aussi. En effet on a

$$B_1\times^*\dots\times^* B_m = co^*[co^* B_1 +^* \dots +^* co^* B_m]$$
$$B_1 -^* B_2 = B_1\times^*(co^* B_2).$$

En tenant compte du théorème I, on démontre aisément que les classes [15]) $F_\varrho, F_{\varrho\varrho}, F_{\varrho\varrho\varrho},\dots$ possèdent des fonctions universelles qui peuvent être construites „effectivement"

Théorème V. Si toutes les classes $B_1, B_2,\dots$ d'ensembles de R_n, en nombre infini dénombrable, possèdent des fonctions universelles, la classe

$$B\underset{df}{=}B_1 +^* B_2 +^* \dots$$

en possède une aussi. Une telle fonction peut être déterminée d'une manière „effective" dès qu'on connait les fonctions universelles $U_k(\tau)$ de B_k et les fonctions détérminantes $\Phi_k(\xi)$ y correspondant.

Démonstration. Soit $B_k=K(\Phi_k)$ et soit $U_k(\tau)$ une fonction universelle pour Φ_k, $(k=1,2,\dots)$.

La fonction auxiliaire:

$$N(p,q)\underset{df}{=}\frac{(p+q-1)(p+q-2)}{2}+p,$$

[15]) F désignant de classe de tous les ensembles fermés de R_n, on définit $F_\varrho \underset{df}{=} F -^* F'$, où $F=F'$; $F_{\varrho\varrho}\underset{df}{=}F_\varrho -^* F_\varrho'$ etc. W. Sierpiński l. c. [1]) p. 85—88.

définie pour tous les nombres naturels p, q n'admette que des valeurs naturelles.

On voit aisément que l'équation

$$m = N(a, b)$$

peut être résolue par rapport à a et b et qu'elle donne une solution déterminée parfaitement pour tout m naturel

Soit $a = p(m)$, $b = q(m)$ cette solution.

On a

(1) $$p[N(a, b)] = a, \quad q[N(a, b)] = b.$$

Posons pour tout nombre irrationnel

$$\xi = E\xi + \frac{1|}{|\xi_1} + \frac{1|}{|\xi_2} + \dots:$$

(2) $$\Phi(\xi) \underset{df}{=} \Phi_1\left(\frac{1|}{|\xi_{N(1,1)}} + \frac{1|}{|\xi_{N(2,1)}} + \dots\right) + \\ + \Phi_2\left(\frac{1|}{|\xi_{N(1,2)}} + \frac{1|}{|\xi_{N(2,2)}} + \dots\right) + \dots$$

et pour tout nombre irrationnel

$$\tau = E\tau + \frac{1|}{|\tau_1} + \frac{1|}{|\tau_2} + \dots:$$

(3) $$U(\tau) \underset{df}{=} U_1\left(\frac{1|}{|\tau_{N(1,1)}} + \frac{1|}{|\tau_{N(2,1)}} + \dots\right) + \\ + U_2\left(\frac{1|}{|\tau_{N(1,2)}} + \frac{1|}{|\tau_{N(2,2)}} + \dots\right) + \dots$$

Démontrons que $K(\Phi) = B$ et que $U(\tau)$ est une fonction universelle pour Φ.

Soit $b \in B$. Il existe une suite infinie d'ensembles $b_1, b_2, \dots$, telle que $b = b_1 + b_2 + \dots$, $b_k \in B_k$, $(k = 1, 2, \dots)$.

Soit $\xi^{(k)}$ un nombre irrationnel tel que

(4) $$b_k = \Phi_k(\xi^{(k)}), \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Posons

(5) $$\xi \underset{df}{=} \frac{1|}{|\xi^{q(1)}_{p(1)}} + \frac{1|}{|\xi^{q(2)}_{p(2)}} + \dots.$$

On a, en vertu de (2)

$$\Phi(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k\left(\frac{1|}{|\xi_{N(1,k)}} + \frac{1|}{|\xi_{N(2,k)}} + \dots\right)$$

(voir (5)) $$= \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k\left(\frac{1|}{|\xi^{q[N(1,k)]}_{p[N(1,k)]}} + \frac{1|}{|\xi^{q[N(2,k)]}_{p[N(2,k)]}} + \dots\right)$$

(voir (1)) $$= \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k\left(\frac{1|}{|\xi^k_1} + \frac{1|}{|\xi^k_2} + \dots\right)$$

(voir (4)) $$= \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(\xi^k) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k = b.$$

Il en résulte que, quel que soit $b \in B$, il existe un nombre irrationnel ξ tel que $b \in \Phi(\xi)$. La relation $B \subset K(\Phi)$ étant ainsi démontrée, il en résulte que $B = K(\Phi)$, puisque la relation $K(\Phi) \subset B$ est évidente.

Passons à la considération de la fonction $U(\tau)$.

En posant, comme d'habitude,

$$H \underset{df}{=} \overline{x_1, \dots, x_n, z}\ \{z = \zeta\},$$

où ζ est un nombre irrationnel fixe mais arbitraire d'ailleurs, considérons l'ensemble

$$proj\,[H\,.\,U(\tau)] = \sum_{k=1}^{\infty} proj\,[H\,.\,U_k(\tau^{(k)})],$$

où on a posé:

(6) $$\tau^{(k)} \underset{df}{=} \frac{1|}{|\tau_{N(1,k)}} + \frac{1|}{|\tau_{N(2,k)}} + \dots \qquad \text{(voir (3))}.$$

$U_k(\tau)$ étant, par hypothèse, une fonction universelle pour Φ_k, on a

$$proj\,[H\,.\,U_k(\tau^{(k)})] = \Phi_k[\mu(\zeta, \tau^{(k)})]$$

et par conséquent:

(7) $$proj\,[H\,.\,U(\tau)] = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k[\mu(\zeta, \tau^{(k)})].$$

Comme, d'après (6):

$$\tau^{(k)}_s = \tau_{N(s,k)}, \quad (s = 1, 2, \dots),$$

le k-ième terme du second membre de (7) est égal à

$$\Phi_k\left(\frac{1|}{|\zeta_{\tau_1^{(k)}}}+\frac{1|}{|\zeta_{\tau_2^{(k)}}}+\dots\right)=\Phi_k\left(\frac{1|}{|\zeta_{\tau_{N(1,k)}}}+\frac{1|}{|\zeta_{\tau_{N(2,k)}}}+\dots\right).$$

D'autre part on obtient de (2), en y substituant ξ par $\mu(\zeta,\tau)$:

$$\Phi[\mu(\zeta,\tau)]=\Phi\left(\frac{1|}{|\zeta_{\tau_1}}+\frac{1|}{|\zeta_{\tau_2}}+\dots\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\Phi_k\left(\frac{1|}{|\zeta_{\tau_{N(1,k)}}}+\frac{1|}{|\zeta_{\tau_{N(2,k)}}}+\dots\right).$$

Il en résulte:

$$proj\,[H\,.\,U(\tau)]=\Phi[\mu(\zeta,\tau)].$$

Pour démontrer que la seconde propriété des fonctions universelles subsiste pour $U(\tau)$, considérons l'ensemble $proj\,[G\,.\,U(\tau)]$, où

$$G \underset{df}{=} \overbrace{x_1,\dots,x_n,z}\,\{x_1=z\}.$$

On a, d'après (3):

$$proj\,[G\,.\,U(\tau)]=proj\left[G\,.\sum_{k=1}^{\infty}U_k(\tau^{(k)})\right],$$

où $\tau^{(k)}$ est défini par (6).

Les U_k étant des fonctions universelles pour Φ_k, on a

$$proj\,[G\,.\,U_k(\tau^{(k)})]\in K(\Phi_k)=B_k,$$

d'où on obtient

$$proj\,[G\,.\,U(\tau)]=\sum_{k=1}^{\infty}proj\,[G\,.\,U_k(\tau^{k})]\in B_1+^{*}B_2+^{*}\dots,$$

donc enfin:

$$proj\,[G\,.\,U(\tau)]\in B=K(\Phi),$$

puisque nous avons démontré plus haut que $B=K(\Phi)$.

La théorème est ainsi établi.

Théorème VI. Soit

$$\{B_{i_1,\dots,i_k}\},\qquad \begin{matrix}(i_1,\dots,i_k=1,2,\dots)\\(k=1,2,\dots)\end{matrix}$$

un système déterminant composé de classes d'ensembles de R_n dont chacune possède une fonction universelle. Dans ce cas la classe

$$B\underset{df}{=}A^{*}\{B_{i_1,\dots,i_k}\}$$

en possède une aussi. Si l'on connait les fonctions universelles $U_{i_1,\dots,i_k}(\tau)$ et les fonctions déterminantes $\Phi_{i_1,\dots,i_k}(\xi)$ correspondant, on peut construire d'une manière effective une fonction universelle de B.

Démonstration.

Rangeons toutes les groupes finis $(i_0,i_1,\dots,i_k)$, (où $k\geqslant 1$) de nombres naturels dans une suite infinie, en évitant des repétitions. Remarquons que cela peut être faite d'une manière „effective". Tous les groupes en question tont ainsi numérotés. Désignons par $M(i_0,i_1,\dots,i_k)$ le numéro qui correspond ainsi au groupe $(i_0,i_1,\dots,i_k)$. $J(M)$ désignera le premier élément du groupe correspondant au nombre naturel M et $g(M)$ le groupe formé de ses éléments restants (avec conservation de leur ordre). Au nombre M correspond ainsi le groupe que nous pouvons désigner par $[J(M),g(M)]$.

Soit $B_{i_1,\dots,i_k}=K(\Phi_{i_1,\dots,i_k})$ et soit $U_{i_1,\dots,i_k}(\tau)$ une fonction universelle de $\Phi_{i_1,\dots,i_k}(\xi)$.

En écrivant, comme d'habitude

$$\xi=E\xi+\frac{1|}{|\xi_1}+\frac{1|}{|\xi_2}+\dots,$$

posons:

$$\Phi(\xi)\underset{df}{=}\sum_{i_1,i_2,\dots}\left[\Phi_{i_1}\left(\frac{1|}{|\xi_{M(1,i_1)}}+\frac{1|}{|\xi_{M(2,i_1)}}+\dots\right)\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\,\Phi_{i_1i_2}\left(\frac{1|}{|\xi_{M(1,i_1,i_2)}}+\frac{1|}{|\xi_{M(2,i_1,i_2)}}+\dots\right)\dots\right].\tag{1}$$

Je dis que

$$B=A^{*}\{B_{i_1,\dots,i_k}\}=K(\Phi).$$

En effet, l'ensemble

$$b_{i_1,\dots,i_k}\underset{df}{=}\Phi_{i_1,\dots,i_k}\left(\frac{1|}{|\xi_{M(1,i_1,\dots,i_k)}}+\frac{1|}{|\xi_{M(2,i_1,\dots,i_k)}}+\dots\right)$$

étant un ensemble de la classe $B_{i_1,\dots,i_k}$, il en résulte que

$$b\underset{df}{=}\sum_{i_1,i_2,\dots}b_{i_1}\,.\,b_{i_1,i_2}\dots$$

appartient à $B=A^{*}\{B_{i_1,\dots,i_k}\}$. La relation $K(\Phi)\subset B$ est ainsi établie.

Pour démontrer l'inclusion inverse, envisageons un ensemble b appartenant à B. Il existe un système déterminant

$$\{b_{i_1,\dots,i_k}\},$$

où $b_{i_1,\dots,i_k}\in B_{i_1,\dots,i_k}$ et tel que son noyau est b:

(2) $$b=\sum_{i_1,i_2,\dots} b_{i_1}\cdot b_{i_1,i_2}\cdot b_{i_1,i_2,i_3}\dots$$

Il existe un nombre irrationnel $\xi^{i_1,\dots,i_n}$ tel que:

(3) $$b_{i_1,\dots,i_n}=\Phi_{i_1,\dots,i_n}(\xi^{i_1,\dots,i_n}).$$

Posons

(4) $$\xi \underset{df}{=} \frac{1|}{|\xi^{g(1)}_{J(1)}}+\frac{1|}{|\xi^{g(2)}_{J(2)}}+\dots,$$

où $g(M)$ et $J(M)$ ont la signification définie plus haut.

D'après (1) on a:

$$\Phi(\xi)=\sum_{i_1,i_2,\dots}\prod_{k=1}^{\infty}\Phi_{i_1,\dots,i_k}\left(\frac{1|}{|\xi_{M(1,i_1,\dots,i_k)}}+\frac{1|}{|\xi_{M(2,i_1,\dots,i_k)}}+\dots\right),$$

mais, d'après (4):

$$\xi_{M(s,i_1,\dots,i_k)}=\xi^{g[M(s,i_1,\dots,i_k)]}_{J[M(s,i_1,\dots,i_k)]}=\xi_s^{i_1,\dots,i_k},$$

donc

$$\Phi(\xi)=\sum_{i_1,i_2,\dots}\prod_{k=1}^{\infty}\Phi_{i_1,\dots,i_k}\left(\frac{1|}{|\xi_1^{i_1,\dots,i_k}}+\frac{1|}{|\xi_2^{i_1,\dots,i_k}}+\dots\right)$$

$$=\sum_{i_1,i_2,\dots}\prod_{k=1}^{\infty}\Phi_{i_1,\dots,i_k}(\xi^{i_1,\dots,i_k});$$

donc, en vertu de (3) et (2):

$$\Phi(\xi)=\sum_{i_1,i_2,\dots} b_{i_1}\cdot b_{i_1,i_2}\dots=b.$$

Nous avons ainsi démontré que

(5) $$B=K(\Phi).$$

Définissons maintenant:

(6) $$U(\tau)\underset{df}{=}\sum_{i_1,i_2,\dots}\prod_{k=1}^{\infty}U_{i_1,\dots,i_k}(\tau^{i_1,\dots,i_k}),$$

où

(7) $$\tau^{i_1,\dots,i_k}\underset{df}{=}\frac{1|}{|\tau_{M(1,i_1,\dots,i_k)}}+\frac{1|}{|\tau_{M(2,i_1,\dots,i_k)}}+\dots$$

Nous allons démontrer que $U(\tau)$ est une fonction universelle pour Φ.

Fixons le nombre irrationnel τ et envisageons le nombre

$$\zeta=E\zeta+\frac{1|}{|\zeta_1}+\frac{1|}{|\zeta_2}+\dots$$

Posons

$$H\underset{df}{=}\overline{x_1,\dots,x_n,z}\,\{z=\zeta\}.$$

On a d'après (6) et (7):

$$proj\,[H\,.\,U(\tau)]=\sum_{i_1,i_2,\dots}\prod_{k=1}^{\infty}proj\,[H\,.\,U_{i_1,\dots,i_k}(\tau^{i_1,\dots,i_k})]$$

parce que la correspondance entre les points de H et de R_n déterminée par la projection est bi-univoque.

En vertu de l'hypothèse on a:

$$proj\,[H\,.\,U_{i_1,\dots,i_k}(\tau^{i_1,\dots,i_k})]=\Phi_{i_1,\dots,i_k}[\mu(\zeta,\tau^{i_1,\dots,i_k})]=$$

$$=\Phi_{i_1,\dots,i_k}\left[\frac{1|}{|\zeta_{\tau_1^{i_1,\dots,i_k}}}+\frac{1|}{|\zeta_{\tau_2^{i_1,\dots,i_k}}}+\dots\right].$$

Comme, d'après (7):

$$\tau_s^{i_1,\dots,i_k}=\tau_{M(s,i_1,\dots,i_k)};$$

on a:

$$proj\,[H\,.\,U_{i_1,\dots,i_k}(\tau^{i_1,\dots,i_k})]=$$

$$=\Phi_{i_1,\dots,i_k}\left[\frac{1|}{|\zeta_{\tau_{M(1,i_1,\dots,i_k)}}}+\frac{1|}{|\zeta_{\tau_{M(2,i_1,\dots,i_k)}}}+\dots\right].$$

Donc, en tenant compte de (1):

$$proj\,[H\,.\,U(\tau)]=\Phi\,[\mu(\zeta,\tau)],$$

ce qui exprime la première propriété des fonctions universelles.

En ce qui concerne la deuxième, considérons l'ensemble:

$$\operatorname{proj}[G \,.\, U(\tau)], \qquad \text{où} \qquad G \underset{df}{=} \overline{x_1, \ldots, x_n, z}\, \{x_1 = z\}.$$

On a

$$\operatorname{proj}[G \,.\, U(\tau)] = \sum_{i_1, i_2, \ldots} \prod_{k=1}^{\infty} \operatorname{proj}[G \,.\, U_{i_1,\ldots,i_k}(\tau^{i_1,\ldots,i_k})].$$

Puisque, en vertu de l'hypothèse:

$$\operatorname{proj}[G \,.\, U_{i_1,\ldots,i_k}(\tau^{i_1,\ldots,i_k})] \in B_{i_1,\ldots,i_k},$$

on en tire:

$$\operatorname{proj}[G \,.\, U(\tau)] \in A^* \{B_{i_1,\ldots,i_k}\} = B,$$

d'où enfin, en vertu de (5):

$$\operatorname{proj}[G \,.\, U(\tau)] \in K(\Phi).$$

Le théorème est ainsi démontré.

Théorème VII. Supposons que la classe B d'ensembles de l'espace R_n, $(n \geqslant 2)$ possède une fonction universelle. Soit B_1 la classe de tous les ensembles de R_{n-1} que l'on obtient en projettant orthogonalement sur R_{n-1} les ensembles appartenant à B. Dans ces conditions la classe B_1 possède aussi une fonction universelle. Une telle fonction peut être construite d'une manière „effective", si l'on connait une fonction universelle $U(\tau)$ de B et la fonction déterminante Φ y correspondant.

Démonstration. En imitant la façon d'écrire que nous avons employé jusqu'ici, écrivons:

$$B_1 = \operatorname{proj}^*_{R_{n-1}} B.$$

Soit $B = K(\Phi)$ et soit $U(\tau)$ une fonction universelle pour Φ.
Posons pour tous les ξ et τ irrationnels:

(1) $$\Phi_1(\xi) \underset{df}{=} \operatorname{proj}_{R_{n-1}} \Phi(\xi)$$

(2) $$U_1(\tau) \underset{df}{=} \operatorname{proj}_{R_n} U(\tau).$$

et démontrons d'abord la formule:

$$B_1 = K(\Phi_1).$$

Soit $b_1 \in B_1$. Il existe un ensemble $b \in B$ tel que $b_1 = \operatorname{proj}_{R_{n-1}} b$. Comme Φ est une fonction déterminante de B, il existe un nombre irrationnel ξ tel que $b = \Phi(\xi)$. Par conséquent $\operatorname{proj}_{R_{n-1}} b = \operatorname{proj}_{R_{n-1}} \Phi(\xi)$; c'est-à-dire $b_1 = \Phi_1(\xi)$. La relation

(3) $$B_1 \subset K(\Phi_1)$$

est ainsi établie.

Soit maintenant $b \in K(\Phi_1)$. Il existe un nombre irrationnel ξ tel que

$$b_1 = \Phi_1(\xi) = \operatorname{proj}_{R_{n-1}} \Phi(\xi), \qquad \text{(voir (1)).}$$

Puisque $\Phi(\xi) \in B$, on a

$$b_1 \in \operatorname{proj}^*_{R_{n-1}} B = B_1.$$

On en déduit la relation:

$$K(\Phi_1) \subset B_1,$$

qui combinée avec (3) donne la formule désirée

(4) $$B_1 = K(\Phi_1).$$

Passons à la démonstration de ce que $U_1(\tau)$ représente une fonction universelle de Φ_1.

Remarquons d'abord que, quel que soit le nombre irrationnel ζ,

(5) $$\overline{x_1, \ldots, x_{n-1}, z}\, \{z = \zeta\} = \operatorname{proj}_{R_n} \overline{x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, z}\, \{z = \zeta\},$$

si l'on désigne par $(x_1, \ldots, x_{n-1}, z)$ le point variable de l'espace R_n. Cela nous donne, d'après (2), que l'ensemble:

(6) $$\overline{x_1, \ldots, x_{n-1}, z}\, \{z = \zeta\} \,.\, U_1(\tau)$$

contient

(7) $$\operatorname{proj}_{R_n} [\overline{x_1, \ldots, x_n, z}\, \{z = \zeta\} \;\; U(\tau)].$$

Je dis que, réciproquement, (7) contient (6).

En effet, soit $p' \underset{df}{=} (x_1', \ldots, x_{n-1}', z')$ un point de (7). Il existe un point $p'' \underset{df}{=} (x_1'', \ldots, x_{n-1}'', x_n'', z'')$ de l'ensemble

$$\overline{x_1, \ldots, x_n, z}\, \{z = \zeta\} \,.\, U(\tau),$$

tel que $p' = \underset{R_n}{proj}\, p''$. Donc

$$x_1'' = x_1', \dots, x_{n-1}'' = x_{n-1}', \quad z' = z'' = \zeta.$$

Mais $p'' \in U(\tau)$, ce qui entraîne $p' \in \underset{R_n}{proj}\, U(\tau) = U_1(\tau)$. Comme, d'autre part

$$p' = (x_1', \dots, x_{n-1}', \zeta) \in \overline{x_1, \dots, x_{n-1}, z}\,\{z = \zeta\},$$

on obtient

$$p' \in \overline{x_1, \dots, x_{n-1}, z}\,\{z = \zeta\} \,.\, U_1(\tau)$$

ce qui démontre l'égalité proposée:

$$\overline{x_1, \dots, x_{n-1}, z}\,\{z = \zeta\} \,.\, U_1(\tau) = \underset{R_n}{proj}\, [\overline{x_1, \dots, x_n, z}\,\{z = \zeta\} \,.\, U(\tau)].$$

On en tire:

$$\underset{R_{n-1}}{proj}\, [\overline{x_1, \dots, x_{n-1}, z}\,\{z = \zeta\} \,.\, U_1(\tau)] =$$
$$= \underset{R_{n-1}}{proj}\, \underset{R_n}{proj}\, [\overline{x_1, \dots, x_n, z}\,\{z = \zeta\} \,.\, U(\tau)],$$

où $(x_1, \dots, x_{n-1})$ désigne le point variable de R_{n-1}.

Donc, puisque $U(\tau)$ est une fonction universelle de Φ,

$$\underset{R_{n-1}}{proj}\, [\overline{x_1, \dots, x_{n-1}, z}\,\{z = \zeta\} \,.\, U_1(\tau)]$$
$$= \underset{R_{n-1}}{proj}\, \Phi[\mu(\zeta, \tau)]$$

(voir (1))
$$= \Phi_1[\mu(\zeta, \tau)].$$

Pour démontrer que $U_1(\tau)$ jouit de la deuxième propriété des fonctions universelles, considérons l'ensemble:

(8)
$$\overline{x_1, \dots, x_{n-1}, z}\,\{x_1 = z\} \,.\, U_1(\tau) =$$
$$= \underset{R_n}{proj}\, \overline{x_1, \dots, x_{n-1}, x_n, z}\,\{x_1 = z\} \,.\, \underset{R_n}{proj}\, U(\tau).$$

L'ensemble (8) contient évidemment l'ensemble:

(9)
$$\underset{R_n}{proj}\, [\overline{x_1, \dots, x_{n-1}, x_n, z}\,\{x_1 = z\} \,.\, U(\tau)].$$

Pour démontrer que (9) contient (8), envisageons un point

$$q \underset{df}{=} (x_1^0, \dots, x_{n-1}^0, z^0) \quad \text{de (9).}$$

Il existe un point q' tel que $q = \underset{R_n}{proj}\, q'$ et:

$$q' \in \overline{x_1, \dots, x_{n-1}, x_n, z}\,\{x_1 = z\} \,.\, U(\tau).$$

On a

$$q' = (x_1^0, \dots, x_{n-1}^0, x_n, x_1^0),$$

donc $x_1^0 = z^0$ et par conséquent

$$q = (x_1^0, \dots, x_{n-1}^0, x_1^0)$$

ce qui donne

(10)
$$q \in \overline{x_1, \dots, x_{n-1}, z}\,\{x_1 = z\}.$$

Comme, d'autre part, $q' \in U(\tau)$, on a $q \in \underset{R_n}{proj}\, U(\tau) = U_1(\tau)$. — Donc, en tenant compte de (10):

$$q \in \overline{x_1, \dots, x_{n-1}, z}\,\{x_1 = z\} \,.\, U_1(\tau).$$

Les ensembles (8) et (9) sont donc identiques.

On en déduit:

$$\overline{x_1, \dots, x_{n-1}, z}\,\{x_1 = z\} \,.\, U_1(\tau) \in K(\Phi) = B,$$

parce que $U(\tau)$ est une fonction universelle de Φ.

On en obtient, en tenant compte de (4):

$$\underset{R_{n-1}}{proj}\, [\overline{x_1, \dots, x_{n-1}, z}\,\{x_1 = z\} \,.\, U_1(\tau)] \in B_1 = K(\Phi_1).$$

Le théorème est ainsi démontré.

2. Afin de faire des applications assez générales des théorèmes que nous venons de démontrer, établissons quelques théorèmes auxiliaires [16]), en restant toujours dans le cas des ensembles de l'espace R_p, $(p \geqslant 1)$.

Def. 1. Soit N une classe quelconque d'ensembles; posons

$$N_1 \underset{df}{=} N$$
$$N_{n+1} \underset{df}{=} N_n +^* N_1', \qquad \text{où} \qquad N_1 = N_1'$$
$$(n = 1, 2, \dots).$$

Nous avons ainsi défini une suite infinie de classes d'ensembles: $N_1, N_2, N_3, \dots$ et notre but, le plus prochain, sera d'en démontrer quelques propriétés.

[16]) Dues à M. Sierpiński (ainsi que leur démonstration).

Théor. 1. Si $n < m$, on a [17] $N_n \subset N_m$.

Dém. Soit $k \geqslant 1$; on a, en vertu de *Def. 1*:

$$N_{k+1} = N_k +^* N_1 = N_1 +^* N_k,$$

donc, puisque $N_1 \subset N_1 +^* N_1'$:

$$\begin{aligned} N_{k+1} &\subset (N_1 +^* N_1') +^* N_k \\ &\subset N_1 +^* (N_1' +^* N_k) \\ \text{(Def. 1)} \qquad &\subset N_1 +^* N_{k+1} = N_{k+2}. \end{aligned}$$

Pour achever la démonstration, il suffit de remarquer que

$$N_1 \subset N_1 +^* N_1' = N_2.$$

Théor. 2.

$$N_n +^* N_m \subset N_{n+m}.$$

Dém. Remarquons que la formule est vraie pour $m = 1$ quel que soit n.

Supposons qu'elle soit vraie pour $m = k$:

(1) $$N_n +^* N_k \subset N_{n+k} \quad \text{(pour tous les } n).$$

On a

$$\begin{aligned} \text{(Def. 1.)} \qquad N_n +^* N_{k+1} &= N_n +^* (N_k +^* N_1) \\ &= (N_n +^* N_1) +^* N_k \\ \text{(Def. 1.)} \qquad &= N_{n+1} +^* N_k \\ \text{(de (1))} \qquad &\subset N_{(n+1)+k} = N_{n+(k+1)}, \end{aligned}$$

ce qui démontre le théorème.

Théor. 3. (de M. Sierpiński). Deux et seulement deux cas peuvent se présenter:

1° ou toutes les classes N_k sont différentes deux-à-deux,

2° ou bien, il existe un indice $s \geqslant 1$ tel que $N_1, \ldots, N_s$ sont différentes deux-à-deux (nb. si $s \geqslant 2$) et que $N_s = N_{s+1} = \ldots$

Dém. Supposons que le cas 1° n'a pas lieu. Il existe alors deux indices s et t tels que $s \neq t$ et $N_s = N_t$. On peut évidemment supposer que $t > s$. Envisageons le plus petit indice t^0 tel que $t^0 > s$, $N_s = N_{t^0}$.

[17]) $N_n \subset N_m$ désigne que tout ensemble appartenant à N_n appartient aussi à N_m.

Je dis que $t^0 = s + 1$. En effet, s'il était $t^0 > s + 1$, on aurait, en vertu du *th. 1*,

$$N_s \subset N_{s+1} \subset N_{t^0},$$

d'où on aurait, puisque $N_s = N_{t^0}$:

$$N_s = N_{s+1},$$

ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que t^0 est minimum.

On a donc $t^0 = s + 1$: donc $N_s = N_{s+1}$.

Démontrons maintenant que $N_s = N_{s+n}$, $(n = 1, 2, \ldots)$. Pour $n = 1$ la relation est vraie. Supposons qu'elle subsiste pour $n = k$:

$$N_s = N_{s+k}.$$

Mais

$$\begin{aligned} N_{s+(k+1)} &= N_{(s+k)+1} = N_{s+k} +^* N_1 \\ &= N_s +^* N_1 = N_{s+1} = N_s. \end{aligned}$$

Le théorème est établi.

Nous allons appliquer les trois théorèmes auxiliaires dans un cas particulier, que nous allons préciser dans un moment.

Admettons d'abord la définition suivante.

Déf. III. Nous dirons qu'une classe d'ensembles A est „*normale*“ si elle jouit des propriétés suivantes:

1° $A +^* A' = A$ (où $A = A'$)

2° $A \times^* A' = A$

3° A contient l'ensemble vide „0“ et l'ensemble universel „1“.

Théor. 4. Si la classe A d'ensembles est normale, la classe $co^* A$ est aussi normale et réciproquement.

La démonstration est facile et s'appuie sur les formules:

$$co^* (A +^* A') = co^* A \times^* co^* A'$$
$$co^* (A \times^* A') = co^* A +^* co^* A'$$

et $co\, 0 = 1$, $co\, 1 = 0$.

Théor. 5. Si A est une classe contenant 0 et 1 et si $C = co^* A$, on a

$$A \subset A \times^* C, \quad C \subset A \times^* C.$$

La démonstration est immédiate.

Déf. 2. En reprenant les considérations abordées dans le numéro précédent, posons

$$N \underset{df}{=} A \times^* C,$$

où A est une classe normale d'ensembles et où $C = co^* A$. Posons de plus

$$N_1 \underset{df}{=} N, \quad N_{n+1} \underset{df}{=} N_n +^* N_1' \quad (\text{où } N_1' = N_1).$$

Théor. 6. Dans les conditions de la *Déf. 2* on a:

$$N_n \times^* N_m \subset N_{n.m}.$$

Dém. Démontrons d'abord que la formule subsiste pour $n = m = 1$.

On a

$$\begin{aligned}
&(\textit{Déf. 2.}) & N_1 \times^* N_1' &= (A \times^* C) \times^* (A' \times^* C') \\
& & &= (A \times^* A') \times^* (C \times^* C') \\
&(\text{voir le } \textit{th. 4.}) & &= A \times^* C = N_1 = N_{1.1}.
\end{aligned}$$

Supposons maintenant que

$$N_n \times^* N_1 \subset N_{n.1}. \tag{1}$$

On a

$$\begin{aligned}
& & N_{n+1} \times^* N_1 &= (N_n +^* N_1) \times^* N_1' \\
& & &\subset (N_n \times^* N_1') +^* (N_1' \times^* N_1'') \\
&(\text{d'après (1)}) & &\subset N_n +^* N_1 = N_{n+1} = N_{(n+1).1}.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que la formule

$$N_n \times^* N_1 \subset N_{n.1}$$

subsiste pour tous les indices n.

Supposons que $N_n \times^* N_k \subset N_{n.k}$ pour k fixe et pour tous les n. On a

$$\begin{aligned}
N_n \times^* N_{k+1} &= N_n \times^* (N_n +^* N_1) \\
&\subset (N_n \times^* N_k) +^* (N_n' \times^* N_1) \\
&\subset N_{n.k} +^* N_n,
\end{aligned}$$

d'où, à l'aide du *théor. 2*, on obtient

$$N_n \times^* N_{k+1} \subset N_{n.k+n} = N_{n.(k+1)}.$$

La formule est donc vraie dans toute sa généralité.

Théor. 7. Dans les conditions de la *Déf. 2.* on a:

$$co^* N_n \subset N_{2^n}.$$

Dém. On a

$$\begin{aligned}
co^* N_1 &= co^* (A \times^* C) \\
&= co^* A +^* co^* C \\
&= C +^* A.
\end{aligned}$$

Mais le *théor. 5* donne: $C \subset A \times^* C = N_1$ et $A \subset A \times^* C = N_1$. Donc

$$co^* N_1 \subset N_1 +^* N_1' = N_2 = N_{2^1}.$$

Le formule est ainsi établie pour $n = 1$. Supposons qu'elle soit vraie pour $n = k$:

$$co^* N_k \subset N_{2^k}.$$

On a

$$\begin{aligned}
co^* N_{k+1} &= co^* (N_k +^* N_1) \\
&= co^* N_k \times^* co^* N_1 \\
&\subset N_{2^k} \times^* N_2,
\end{aligned}$$

donc d'après le *théor. 6*

$$co^* N_{k+1} \subset N_{2^k.2} = N_{2^{k+1}}.$$

Le théorème est donc démontré.

Supposons que la classe A normale possède une fonction universelle. Les théorèmes auxiliaires que nous venons de démontrer ainsi que les théorèmes sur les fonctions universelles nous permettrons de démontrer que toutes les classes

$$M_1 = A \times^* C, \quad M_2 = (A \times^* C) +^* (A' \times^* C'), \ldots$$

sont différentes deux-à deux, c'est-à-dire que dans chacune des classes $M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \ldots$, à partir de l'indice 2, il y a des ensembles qui n'appartiennent pas aux classes précédentes.

En effet, en vertu du *théorème III*, la classe $C = co^* A$ possède une fonction universelle, donc, en vertu du *théorème III* et *IV*, la classe

$$M_1 = A \times^* C = co^* [co^* A +^* co\ C]$$

en possède une aussi. En suppossant que M_k possède une fonction universelle, on prouve, à l'aide du *théorème IV*, que $M_{k+1} = M_k +^* M_1$

en possède une aussi. Cela nous assure que toutes les classes $M_1 \subset \subset M_2 \subset M_3 \subset \dots$ (voir *th. 1.*)) possèdent des fonctions universelles.

Nous savons, d'après le *théor. 3.* que ces classes sont ou toutes différentes deux-à-deux, ou bien qu'elles coïncident à partir d'un indice.

Démontrons que la seconde alternative n'a pas lieu. En effet, en supposant que $M_m = M_{m+1} = \dots$, on trouve, d'après (*théor. 7*) $co^* M_m \subset M_{2^m}$, que

(1) $$co^* M_m \subset M_m, \quad \text{puisque} \quad m \leqslant 2^m.$$

Mais (1) est impossible, étant démontré que M_m possède une fonction universelle. En effet, d'après le *theorème I*, la classe $co^* M_m$ contient nécessairement un ensemble n'appartenant pas à M_m.

Nour avons ainsi démontré le théorème suivant [18].

Théorème VIII. Si A est une classe normale d'ensembles de R_p (selon la *Déf. III*),

$$C = co^* A, \quad M_1 = A \times^* C, \quad M_{n+1} = M_n +^* M_1' \quad (\text{où } M_1' = M_1),$$

on a

1) $M_1 \subset M_2 \subset \dots$

2) toutes les classes M_n sont différentes deux-à-deux.

En particulier, si A désigne la classe de tous les ensembles *fermés* de R_p, A est évidemment normale ainsi que la classe $co^* A$ de tous les ensembles ouverts. Dans ce cas le *théorème VIII* exprime que toutes les classes

$$F_\varrho \overline{\overline{\scriptstyle df}} A \times^* C \subset F_\varrho +^* F_\varrho' \subset F_\varrho +^* F_\varrho' +^* F_\varrho'' \subset \dots$$

sont des classes plus en plus larges dans chacune desquelles (à partir de la deuxième) se trouve au moins un ensemble qui n'est pas contenu [19]) dans des classes précédentes. En effet, notre classe A possède, en vertu du *théorème II*, une fonction universelle.

La chose analogue se présente dans le cas, où A représente la classe de tous les ensembles (A) de Souslin et M. Lusin [20]).

[18]) due à M. Sierpiński.

[19]) W. Sierpiński l. c. [1]) p. 87.

[20]) Comptes rendus 164. (1917) p. 88. Souslin. Comptes rendus ibid. p. 91. M. N. Lusin.

En effet $A = A^* \{F_{i_1,\dots,i_k}\}$, où $F = F_{i_1,\dots,i_k}$ est la classe de tous les ensembles fermés.

Or A possède une fonction universelle en vertu des *théorèmes II* et *VI.*, et, en outre, on sait que (A) est une classe normale [21]).

Les classes:

$$A \times^* C \subset (A \times^* C) +^* (A' \times^* C') \subset \dots,$$

où $C = co^* A$, sont donc des classes différentes deux-à-deux [22]).

Un résultat pareil [23]) on obtient dans le cas, où A est la classe de tous les ensembles du type [24]) $(\boldsymbol{PCE})$, (c'est-à-dire les projections des complémentaires des ensembles (A)), Notre classe A est normale [25]) et, en ce qui concerne l'existence d'une fonction universelle de A, elle est assurée en vertu des *Théorèmes VII*, *III*, *II* et *VI*.

3. Definition IV. Soit A une classe normale d'ensembles de l'espace R_p. Posons comme d'habitude

$$C \overline{\overline{\scriptstyle df}} co^* A$$

et définissons de la manière suivante les classes A_α, C_α, M_α, où α parcours successivement le nombre 0 et tous les nombres ordinaux $< \Omega$:

1₀ $A_0 \overline{\overline{\scriptstyle df}} A$, $C_0 \overline{\overline{\scriptstyle df}} C$;

2⁰ si $\alpha = 1$, posons $M_\alpha \overline{\overline{\scriptstyle df}} A_0 \times^* C_0$;

3⁰ si α est un nombre de première espèce et il y en est de même pour $\alpha - 1$, posons:

$$M_\alpha \overline{\overline{\scriptstyle df}} M_{\alpha-1} +^* M_{\mu+1},$$

où μ désigne le nombre de 2ᵉ espèce (ou nul) tel que $\alpha = \mu + n$, où $1 \leqslant n < \omega$. (Etant donné α, les nombres μ et n sont déterminés d'une manière univoque);

4⁰ si α est de 1ᵉ espèce et $\alpha - 1$ de 2ᵉ espèce posons:

[21]) voir p. ex. N. Lusin et W. Sierpiński *Bull. Acad. des Sc. de Cracovie, Série (A)* avril-mai 1918. p. 42, note [1]) en bas de pages.

[22]) due à M. Sierpiński.

[23]) W. Sierpiński, l. c. [1]) p. 91.

[24]) voir. N. Lusin. *Sur les ensembles analytiques. Fund. Math. t. X*, p. 89.

[25]) W. Sierpiński. *Sur les produits des images continues des ensembles C(A). Fund. Math. t. XI* p. 126.

$$A_{\alpha-1} \underset{\overline{df}}{=} M_{\alpha-1} +^* M'_{\alpha-1} +^* \ldots,$$

où

$$M_{\alpha-1} = M'_{\alpha-1} = \ldots,$$

$$C_{\alpha-1} \underset{\overline{df}}{=} co^* A_{\alpha-1}$$

et

$$M_\alpha \underset{\overline{df}}{=} A_{\alpha-1} \times^* C_{\alpha-1};$$

5° si α est de 2^e espèce, posons

$$M_\alpha \underset{\overline{df}}{=} \sum_{\beta<\alpha} M_\beta,$$

la sommation étant comprise dans le sens ordinaire.

La définition que nous venons de poser, détermine d'une manière univoque les ensembles M_α pour $1 \leqslant \alpha < \Omega$ et les ensembles A_α et C_α pour $\alpha = 0$ et pour tous les $\alpha < \Omega$ qui sont des nombres ordinaux de 2^e espèce.

Théor. A. Quel que soit α, où $1 \leqslant \alpha < \Omega$, on a

$$0 \in M_\alpha, \quad 1 \in M_\alpha$$

et quel que soit $\alpha = 0$ ou de 2^e espèce, on a

$$0 \in A_\alpha, \quad 1 \in A_\alpha, \quad 1 \in C_\alpha, \quad 1 \in C_\alpha.$$

Démonstration.

Le théorème est évidemment vrai pour $\alpha = 0$ et 1. Supposons qu'il soit vrai pour tous les nombres ordinaux $< \alpha$, où $\alpha \geqslant 2$.

Trois cas particuliers peuvent s'y présenter:

1° α est de 1^e espèce, $\alpha - 1$ est de 1^e espèce
2° α „ „ 1^e „ , $\alpha - 1$ „ „ 2^e „
3° α „ „ 2^e „ .

Cas 1°. On a $\alpha = \mu + n + 1$, où μ est de 2^e espèce (ou $= 0$) et n fini et > 0. En vertu de la *définition IV* (3°)

$$M_\alpha = M_{\alpha-1} +^* M_{\mu+1}.$$

Comme $\alpha - 1 < \alpha$, $\mu + 1 < \alpha$, on a, en vertu de l'hypothèse $0 \in M_{\alpha-1}$, $0 \in M_{\mu+1}$, $1 \in M_{\alpha-1}$, $1 \in M_{\mu+1}$. Il en résulte $0 \in M_\alpha$, $1 \in M_\alpha$.

Cas 2°. $\alpha = \mu + 1$, où μ est de 2^e espèce. On a

$$M_\alpha = A_{\alpha-1} \times^* C_{\alpha-1}.$$

Mais, en vertu de l'hypothèse, 0 et 1 appartiennent à $A_{\alpha-1}$ et à $C_{\alpha-1}$. Donc 0 et 1 appartiennent à M_α.

Cas 3°. α est de 2^e espèce. Dans ce cas:

$$M_\alpha = \sum_{\beta<\alpha} M_\beta.$$

Puisque 0 et 1 appartiennent à M_1, ils appartient à fortiori, a M_α.

Il reste de démontrer que 0 et 1 appartiennent à A_α et C_α. Or, on a, en vertu de la *définition IV* (4°):

$$A_\alpha = M_\alpha +^* M'_\alpha +^* \ldots.$$

Puisque, comme nous avons démontré, 0 et 1 appartiennent à M_α, ils appartiennent aussi à A_α, donc aussi à C_α.

Le théorème est démontré.

Théor. B. La relation $\gamma < \gamma' < \Omega$ entraîne

$$M_\gamma \subset M_{\gamma'}.$$

Démonstration.

Nous démontrerons que, quel que soit α, la relation $\gamma < \alpha$ entraîne $M_\gamma \subset M_\alpha$. Or, on voit aisément que cela est vrai pour $\alpha = 2$. Supposons le vrai pour tout les $\alpha' < \alpha \geqslant 3$ et essayons le démontrer pour α.

Cas 1°. α est de 1^e espèce, $\alpha - 1$ de 1^e espèce.

On a

$$\alpha = \mu + n + 1,$$

où μ est de 2^e espèce ou nul et $1 \leqslant n < \omega$.

Comme $M_\alpha = M_{\alpha-1} +^* M_{\mu+1}$, on a en vertu du *théor. 1*, $M_{\alpha-1} \subset M_\alpha$, puisque $\alpha - 1 = \mu + n \geqslant \mu + 1$. Si $\gamma < \alpha - 1$, on a, en vertu de l'hypothèse, $M_\gamma \subset M_{\alpha-1}$, puisque $\alpha - 1 < \alpha$. Donc, quel que soit $\gamma < \alpha$, on a $M_\gamma \subset M_\alpha$.

Cas 2°. α est de 1^e espèce, $\alpha - 1$ de 2^e espèce.

On a, en vertu de la définition

$$M_\alpha = A_{\alpha-1} \times^* C_{\alpha-1}, \quad A_{\alpha-1} = M_{\alpha-1} +^* M'_{\alpha-1} + \ldots$$

$$C_{\alpha-1} = co^* A_{\alpha-1}.$$

Comme en vertu du *Théor. A.* $0 \in M_{\alpha-1}$, la relation $e \in M_{\alpha-1}$ entraîne $e \in A_{\alpha-1}$ puisque $e = e + 0 + 0 + \ldots$. On a donc $M_{\alpha-1} \subset A_{\alpha-1}$.

D'autre part (voir *th.* 5) $A_{\alpha-1}\times^* C_{\alpha-1}$ puisque l'universel *1* appartient, d'après le *théor.* *A*, à $C_{\alpha-1}$. On en déduit:

$$M_{\alpha-1}\subset A_{\alpha-1}\subset A_{\alpha-1}\times^* C_{\alpha-1}=M_\alpha.$$

Il en résulte, comme dans le cas 1° que, quel que soit γ, la relation $\gamma<\alpha$ entraîne $M_\gamma\subset M_\alpha$.

Cas 3°. α est de 2^e espèce. Dans ce cas on a $M_\alpha=\sum\limits_{\beta<\alpha} M_\beta$. Par conséquent, si $\beta<\alpha$, on a $M_\beta\subset M_\alpha$.

Notre théorème est ainsi démontré.

Théor. C. Si $\alpha<\Omega$ est $=0$ ou de 2^e espèce, la classe A_α (et par conséquent C_α) est normale.

Démonstration.

Une partie de ce théorème est contenue dans l'énoncé du *théor. A*. Reste à démontrer que $A_\alpha+^* A'_\alpha=A_\alpha$ et $A_\alpha\times^* A'_\alpha=A_\alpha$. Établissons d'abord la première formule. Il suffit de supposer que α est de 2^e espèce. En vertu de la définition

$$A_\alpha=M_\alpha+^* M'_\alpha+^*\ldots;$$

donc

$$A_\alpha+^* A'_\alpha=(M_\alpha+^* M'_\alpha+^*\ldots)+^*(\overline{M}_\alpha+^*\overline{M}'_\alpha+^*\ldots)$$
$$=M_\alpha+^*\overline{M}'_\alpha+^* M'_\alpha+^*\overline{M}'_\alpha+\ldots=A_\alpha.$$

Passons à la démonstration de la formule deuxième.

On a pour $\alpha=0$: $A_\alpha\times^* A_\alpha$ puisque $A_\alpha=A$ et A est normal (en vertu de l'hypothèse). Supposons que la formule soit vraie pour tout nombre $\beta<\alpha$, où β est de deuxième espèce ou nul et α fixe, et essayons la démontrer pour α.

Par définition

$$A_\alpha=M_\alpha+^* M'_\alpha+^*\ldots,$$

où $M_\alpha=\sum\limits_{\gamma<\alpha} M_\gamma$.

Soit $e\in A_\alpha\times^* A'_\alpha$. Il existe deux ensembles a et a' tels que

$$a\in A_\alpha,\qquad a'\in A_\alpha,\qquad e=a\,.\,a'.$$

Donc il existe deux suites simplement infinies de nombres ordinaux $<\alpha$:

$$\gamma_1,\ \gamma_2,\ldots,\ \gamma_n,\ldots$$
$$\gamma'_1,\ \gamma'_2,\ldots,\ \gamma'_n,\ldots$$

et deux suites d'ensembles

$$a_1,\ a_2,\ldots,\ a_n,\ldots$$
$$a'_1,\ a'_2,\ldots,\ a'_n,\ldots$$

tels que

$$a=a_1+a_2+\ldots,\qquad a'=a'_1+a'_2+\ldots,$$
$$a_n\in M_{\gamma_n},\qquad a'_n\in M_{\gamma'_n},\ (n=1,2,\ldots).$$

On en déduit

$$a\,.\,a'=\sum_{n,m=1}^{\infty} a_n\,.\,a'_m,$$

où

(1) $$a_n\,.\,a'_m\in M_{\gamma_n}\times^* M_{\gamma'_m}.$$

Désignons par $\gamma_{n,m}$ le plus petit nombre ordinal $\geqslant\gamma_n+2$ et $\geqslant\gamma'_n+2$. On a

(2) $$\gamma_n<\gamma_{n,m},\quad \gamma'_m<\gamma_{n,m}$$

et, de plus, $\gamma_{n,m}$ et $\gamma_{n,m}-1$ sont de 1^e espèce et inférieurs à α. (2) entraîne, en vertu du *th. B*:

$$M_{\gamma_n}\subset M_{\gamma_{n,m}},\qquad M_{\gamma'_m}\subset M_{\gamma_{n,m}},$$

donc, de (1) on a:

$$a_n\,.\,a'_m\in M_{\gamma_{n,m}}\times^* M'_{\gamma_{n,m}},\qquad (\text{où } M_{\gamma_{n,m}}=M'_{\gamma_{n,m}}).$$

Le nombre $\gamma_{n,m}-1$ étant de première espèce, on peut écrire

$$\gamma_{n,m}=\mu+k+1,$$

où μ est de 2^e espèce (ou $=0$) et $1\leqslant k<\omega$.

Donc, en vertu de la *définition IV*

$$M_{\gamma_{n,m}}=M_{\mu+k}+^* M_{\mu+1}$$
$$M_{\mu+1}=A_\mu\times^* C_\mu.$$

Comme μ est de 2^e espèce (ou $=0$) et $\mu<\alpha$, la formule $A_\mu\times^* A'_\mu=A_\mu$ subsiste, en vertu de l'hypothèse et, par conséquent, d'après ce que nous avons démontré, A_μ est une classe normale. Donc on peut appliquer le *Théor. 6*, d'après lequel

$$M_{\gamma_{n,m}}\times^* M'_{\gamma_{n,m}}\subset M_{\mu+(k+1)^2}.$$

Mais $\mu+(k+1)^2<\alpha$, puisque $\mu<\alpha$ et, de plus, α est de

2^e espèce et $1 \leqslant k < \omega$. Donc, en vertu du *théor. B*:

$$M_{\mu+(k+1)^2} \subset M_\alpha,$$

donc

$$M_{\gamma_{n,m}} \times^* M_{\gamma_{n,m}} \subset M_\alpha.$$

Le relation (3) entraîne ainsi:

$$a_n \cdot a'_m \in M_\alpha,$$

d'où il résulte

$$a = \sum_{n,m=1}^{\infty} a_n \cdot a'_m \in M_\alpha +^* M'_\alpha +^* \ldots = A_\alpha,$$

c'est-à-dire

$$A_\alpha \times^* A'_\alpha \subset A_\alpha.$$

Pour démontrer l'inclusion inverse, remarquons que, d'après le *théor. A*: $1 \in A_\alpha$.

Donc, si $a \in A_\alpha$, on a $a \cdot 1 \in A_\alpha \times^* A'_\alpha$ ce qui prouve que

$$A_\alpha \subset A_\alpha \times^* A'_\alpha.$$

L'équation $A_\alpha \times^* A'_\alpha = A_\alpha$ étant ainsi démontré, il en résulte que le théorème est vrai.

Théorème D. Pour tout nombre ordinal α de 1^e espèce, où

$$1 \leqslant \alpha < \Omega,$$

il existe un nombre fini n tel que

$$co^* M_\alpha \subset M_{\alpha+n}.$$

Démonstration. On a $\alpha = \mu + n$, où $1 \leq n < \omega$ et μ est de 2^e espèce ou nul. En vertu de la definition, on a pour $m = 1,2,\ldots$:

$$M_{\mu+1} = A_\mu \times^* C_\mu, \qquad M_{\mu+m+1} = A_{\mu+m} + A_{\mu+1}.$$

L'ensemble A_μ étant, en vertu du *théor. C*, normal, nous nous trouvons dans les conditions du *théorème 7*, qui nous donne

$$co^* M_\alpha \subset M_{\mu+2^n}.$$

Comme $\mu < \alpha$, on a $\mu + 2^n < \alpha = 2^n$, d'où il résulte, d'après le *théor. B*:

$$M_{\mu+2^n} \subset M_{\alpha+2^n}.$$

On en déduit $\qquad co^* M_\alpha \subset M_{\alpha+2^n}$,

ce qui donne le théorème.

Théorème E. Si α est un nombre de deuxième espèce, on a $co^* M_\alpha = M_\alpha$.

Démonstration. Soit $e \in co^* M_\alpha$. On a $co\, e \in M_\alpha$, d'où, comme

$$M_\alpha = \sum_{\beta<\alpha} M_\beta,$$

il existe un nombre $\beta < \alpha$ tel que $co\, e \in M_\beta$. D'après le *théor. B* on en tire:

$$co\, e \in M_{\beta+1},$$

d'où $e \in co^* M_{\beta+1}$.

Le nombre $\beta + 1$ étant de 1^e espèce, on en obtient, à l'aide du *théor. D*:

$$e \in M_{\beta+1+n},$$

où n est fini. Comme $\beta < \alpha$ et comme α est de 2^e espèce, on a nécessairement

$$\beta + 1 + n < \alpha,$$

donc (*théor. B*) $e \in M_\alpha$. La formule $co^* M_\alpha \subset M_\alpha$ est ainsi démontrée. On en obtient $co^* co^* M_\alpha \subset co^* M_\alpha$, donc $M_\alpha \subset co^* M_\alpha$. Le théorème est ainsi établi.

Théorème F. En restant dans le cas de la définition IV, supposons que la classe A possède une fonction universelle. Dans cette condition toutes les classes A_α, C_α pour $0 \leqslant \alpha < \Omega$ ainsi que toutes les M_α, où $1 \leqslant \alpha < \Omega$ est de 1^e espèce, possèdent une fonction universelle. Si α est de 2^e espèce, il n'existe aucune fonction universelle pour M_α.

Démonstration. Démontrons d'abord que, si α est de 2^e espèce, M_α n'admette pas de fonctions universelles. Pour prouver cela supposons, que M_α en admette une. En vertu du *théorème I*, il existe un ensemble e de M_α tel que $co\, e \,\bar{\in}\, M_\alpha$. D'autre part cela est impossible, parce que, d'après le *théor. E*: $co^* M_\alpha \subset M_\alpha$.

Pour démontrer les thèses restantes, fixons un nombre ordinal α et supposons que

1) si $\beta < \alpha$ est de 2^e espèce, (ou $= 0$), les classes A_β et C_β possèdent des fonctions universelles,
2) si $\beta < \alpha$ est de 1^e espèce, M_β possède une fonction universelle,

et, essayons de démontrer que, si α est de 1^e espèce, M_α en possède une et, si α est de 2^e espèce, A_α et C_α admettent aussi des fonctions universelles. (En ce qui concerne les classes A_0, C_0 et M_1, elles possèdent évidemment des fonctions universelles).

Soit α un nombre de 2^e espèce. En vertu de la *définition IV*: $A_\alpha = M_\alpha +^* M'_\alpha +^* \dots$,

$$M_\alpha = \sum_{\beta<\alpha} M_\beta.$$

Il existe une suite simplement infinie de nombres ordinaux

$$\beta_1 < \beta_2 < \dots < \alpha,$$

telle que $\lim \beta_n = \alpha$, ces nombres pouvant être supposés de 1^e espèce. On a

$$\sum_{\beta<\alpha} M_\beta = \sum_{\beta<\beta_1} M_\beta + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{\beta_{n-1}\leqslant\beta<\beta_n} M_\beta,$$

d'où on obtient à l'aide du *théor. B*,

$$\sum_{\beta<\beta_1} M_\beta \subset M_{\beta_1}, \qquad \sum_{\beta_{n-1}\leqslant\beta<\beta_n} M_\beta \subset M_{\beta_n},$$

ce qui donne:

$$M_\alpha \subset M_{\beta_1} + \sum_{n=2}^{\infty} M_{\beta_n} = \sum_{n=1}^{\infty} M_{\beta_n}.$$

D'autre part

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_{\beta_n} \subset \sum_{\beta<\alpha} M_\beta = M_\alpha,$$

donc

$$M_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} M_{\beta_n}.$$

Les nombres β_n étant de 1^e espèce est $<\alpha$, chaque classe M_{β_n} possède, en vertu de l'hypothèse, une fonction universelle. Par conséquent, d'après le *théorème V*, M_α en possède une aussi.

Soit α un nombre de 1^e espèce.

Si $\alpha-1$ est de 2^e espèce, on a $M_\alpha = A_{\alpha-1} \times^* C_{\alpha-1}$. Comme $\alpha-1<\alpha$, A_α et C_α possèdent, en vertu de la supposition, des fonctions universelles et, par conséquent, M_α en possède une.

Si $\alpha-1$ est de 1^e espèce, posons comme d'habitude $\alpha = \mu+n+1$,

où μ est de 2^e espèce (ou $=0$) et $1 \leqslant n < \omega$. On a $M_\alpha = M_{\mu+n} +^* M_{\mu+1}$. Les nombres $\mu+n$ et $\mu+1$ étant $<\alpha$ et de 1^e espèce, les classes $M_{\mu+n}$ et $M_{\mu+1}$ possèdent des fonctions universelles. I en résulte, en vertu du *théorème IV*, que M_α en possède une aussi.

Le théorème est ainsi démontré.

Théorème G. Si la classe normale A dont on parle dans la définition IV possède une fonction universelle, toutes les classes M_α, A_α et C_α sont différentes deux-à-deux.

Démonstration. Quel que soit α de 2^e espèce (ou $=0$), toutes les classes $M_{\alpha+1}, M_{\alpha+2}, \dots, M_{\alpha+n}, \dots$ $(n=1,2,\dots<\omega)$ sont différentes deux-à-deux. En effet on a

$$M_{\alpha+1} = A_\alpha \times^* C_\alpha, \qquad M_{\alpha+n+1} = M_{\alpha+n} +^* M_{\alpha+1},$$

donc, en vertu du *théor. VIII*, les classes en question sont différentes deux-à-deux. Supposons maintenant qu'il existe deux nombres ordinaux $\lambda \neq \mu$ tels que $M_\lambda = M_\mu$.

Soit λ_0 le plus petit nombre ordinal pour lequel on peut trouver un nombre $\mu > \lambda_0$ satisfaisant à la condition $M_{\lambda_0} = M_\mu$. Le nombre λ_0 étant ainsi déterminé, désignons par μ_0 le plus petit de nombres μ tels que $\mu > \lambda_0$, $M_{\lambda_0} = M_\mu$. On a $M_{\lambda_0} = M_{\mu_0}$, $\lambda_0 < \mu_0$, $\lambda_0 \geqslant 1$.

Je dis que $\mu_0 = \lambda_0 + 1$. En effet, dans le cas contraire on aurait $\mu_0 > \lambda_0 + 1$; donc, en vertu du *théor. B* on aurait $M_{\lambda_0} \subset M_{\lambda_0+1} \subset M_{\mu_0}$ ce que donnerait, d'après $M_{\lambda_0} = M_{\mu_0}$, l'équation impossible $M_{\lambda_0} = M_{\lambda_0+1}$.

L'équation

$$M_{\lambda_0} = M_{\lambda_0+1} \tag{1}$$

est ainsi établie.

Je dis que λ_0 n'est pas de 1^e espèce. Dans le cas contraire on aurait $\lambda_0 = k+n$, où k est de 2^e espèce et $1 \leqslant n < \omega$. On aurait donc de (1), $M_{k+n} = M_{k+n+1}$ ce qui est impossible en vertu de ce que nous avons établi plus haut. λ_0 est ainsi de 2^e espèce. En vertu de la *definition IV*:

$$M_{\lambda_0+1} = A_{\lambda_0} \times^* C_{\lambda_0}, \qquad A_{\lambda_0} = M_{\lambda_0} +^* M'_{\lambda_0} +^* \dots$$

A_{λ_0} possédant, en vertu du *théor. F* une fonction universelle, il existe, d'après le *théor. I.* un ensemble $e \in A_{\lambda_0}$ tel que $co\, e \,\bar{\in}\, A_{\lambda_0}$. On a $co\, e \in C_{\lambda_0}$, donc $co\, e \in A_{\lambda_0} \times^* C_{\lambda_0} = M_{\lambda_0+1}$. Il suffit de prouver que $co\, e \,\bar{\in}\, M_{\lambda_0}$. S'il était $co\, e \in M_{\lambda_0}$, on aurait

$$co\, e \in M_{\lambda_0} +^* M'_{\lambda_0} +^* \dots,$$

puisque $co\, e = co\, e + co\, e + \dots$. Donc on aurait $co\, e\, \varepsilon\, A_{\lambda_0}$ ce qui est contradictoire avec la relation $co\, e\, \bar{\varepsilon}\, A_{\lambda_0}$. L'ensemble $co\, e$ appartenant à M_{λ_0+1} et n'appartenant pas à M_{λ_0}, l'égalité supposée $M_{\lambda_0} = M_{\lambda_0+1}$ est en défaut.

Nous avons ainsi démontré que tous les M_α sont différents deux-à-deux.

Occupons nous maintenant d'ensembles A_α et C_α.

Quel que soit α de deuxième espèce ou $= 0$, on a $A_\alpha \neq C_\alpha$. Cela résulte, en vertu du *théorème I*, du fait que A_α admette une fonction universelle.

Soient $\alpha < \beta$ deux nombres du 2e espèce (ou $= 0$).

On a

$$A_\alpha \subset A_\alpha \times^* C_\alpha = M_{\alpha+1} \subset M_{\alpha+2} \subset M_{\alpha+\omega}.$$

Comme $\alpha + \omega \leqslant \beta$, on a, d'après le *théor. B*.

$$M_{\alpha+\omega} \subset M_\beta.$$

D'autre part $M_\beta \subset M_\beta +^* M_\beta +^* \dots = A_\beta$.

On a donc

$$A_\alpha \subset M_{\alpha+1} \subset M_{\alpha+2} \subset A_\beta.$$

Les classes $M_{\alpha+1}$ et $M_{\alpha+2}$ étant différentes, il en résulte que $A_\alpha \neq A_\beta$. Comme $C_\alpha = co^* A_\alpha$, $C_\beta = co^* A_\beta$, il s'ensuit que $C_\alpha \neq C_\beta$.

D'une manière analogue on obtient

$$(2) \qquad C_\alpha \subset M_{\alpha+1} \subset M_{\alpha+2} \subset A_\beta.$$

Comme $M_{\alpha+1} \neq M_{\alpha+2}$, on en tire $C_\alpha \neq A_\alpha$ pour $\alpha < \beta$. Pour démontrer que $C_\beta \neq A_\alpha$ il suffit de remarquer que $A_\alpha = co^* C_\alpha$ et $C_\beta = co^* A_\beta$.

Nous avons ainsi démontré que les classes A_α, C_α sont différentes deux-à-deux.

Il reste de démontrer que les relations $M_\alpha = A_\beta$ $M_\alpha = C_\beta$ sont toujours fausses.

Supposons que $M_\alpha = A_\beta$.

Le nombre β ne peut pas évidemment être $= 0$; β est donc de 2e espèce. Donc $A_\beta = M_\beta +^* M'_\beta +^* \dots$.

S'il était $\alpha < \beta$, on aurait

$$M_\alpha \subset M_{\alpha+1} \subset M_{\alpha+2} \subset M_\beta \subset A_\beta.$$

Comme $M_{\alpha+1} \neq M_{\alpha+2}$, on aurait une contradiction avec $M_\alpha = A_\beta$.

Donc $\alpha \geqslant \beta$. S'il était $\alpha > \beta$, on aurait

$$A_\beta \subset A_\beta \times C_\beta = M_{\beta+1} \subset M_\alpha.$$

Comme $A_\beta \neq C_\beta$ et $C_\beta \subset M_{\beta+1}$, il en résulte que $A_\beta \neq M_{\beta+1}$ donc, à fortiori, $A_\beta \neq M_\alpha$, ce qui est contradictoire.

Le seul cas restant $\alpha = \beta$ est aussi impossible parce que, en vertu du *théorème F*, la classe A_α possède une fonction universelle tandisque M_α n'en possède aucune.

D'une manière presque analogue on peut démontrer que l'équation $M_\alpha = C_\beta$ est toujours en défaut. Notre théorème est ainsi démontré.

Theorème H. Quels que soient α et β, où $1 \leqslant \alpha < \Omega$, $1 \leqslant \beta < \Omega$, on a

$$M_\alpha \subset A^* \{M_\beta^{i_1,\dots,i_k}\},$$

$$A_\alpha \subset A^* \{M_\beta^{i_1,\dots,i_k}\}$$

$$C_\alpha \subset A^* \{M_\beta^{i_1,\dots,i_k}\}, \quad (\text{où } M_\beta = M_\beta^{i_1,\dots,i_k}).$$

Démonstration.

Nous nous appuierons sur le lemme suivant, bien connu:

Lemme. B étant une classe arbitraire d'ensembles, les relations:

$$B_1 = A^* \{B^{i_1,\dots,i_k}\}, \quad \text{où } B^{i_1,\dots,i_k} = B$$

et

$$B_2 = A^* \{B_1^{i_1,\dots,i_k}\}, \quad \text{où } B_1^{i_1,\dots,i_k} = B_1$$

entraînent:

$$B_1 = B_2.$$

Le lemme exprime le fait que l'opération (A) itérée un nombre fini de fois n'est au fond autre chose que l'opération (A) même. Il y a quelques ans que M. Sierpiński a trouvé une démonstration très simple du lemme. Nous nous bornerons de donner l'esquisse d'une autre démonstration qui, au fond, est basée sur le même principe que celle de M. Sierpiński.

Soit

$$b^{k_1,\dots,k_t} = \sum_{i_1, i_2, \dots} b_{i_1}^{k_1,\dots,k_t} . b_{i_1,i_2}^{k_1,\dots,k_t} \dots$$

$$b = \sum_{k_1, k_2, \dots} b^{k_1} . b^{k_1,k_2} . b^{k_1,k_2,k_3} \dots$$

où $b^{k_1,\dots,k_t}_{i_1,\dots,i_r} \in B$ pour tous les groupes d'indices en bas et en haut. Il s'agit de démontrer que $b \in A^*\{B^{i_1,\dots,i_k}\}$, où $B^{i_1,\dots,i_k} = B$.

Definissons

$$c_{i_1,\dots,i_n} \quad \begin{pmatrix} i_1,\dots, & i_n = 1, 2,\dots \\ & n = 1, 2,\dots \end{pmatrix}$$

comme étant identique avec

$$b^{k_1,\dots,k_q}_{s_1^{(q)},\dots,s_p^{(q)}},$$

où $p = p(n)$, $q = q(n)$

$$k_\beta = q\left(i_{\frac{\beta(\beta-1)}{2}+1}\right), \quad \beta = 1,\dots, q$$

$$s_1^{(q)} = p\left(i_{\frac{q(q-1)}{2}+1}\right)$$

et dans le cas $\alpha > 1$:

$$s_\alpha^{(q)} = i_{N(\alpha,q)} \quad \text{pour} \quad \alpha = 2,\dots, p.$$

En ce qui concerne les fonctions $p(n)$, $q(n)$, elles sont définies comme satisfaisant à l'équation

$$N(p,q) = n = \frac{(p+q-1)(p+q-2)}{2} + p,$$

(comme dans la démonstration du *théor. V.*).

Or, on démontre sans difficulté que

$$b = \sum_{i_1, i_2,\dots} c_{i_1} \cdot c_{i_1, i_2} \cdot \dots$$

Les $c_{i_1,\dots,i_n}$ étant des ensembles de B, il en résulte que $B_2 \subset B_1$. Cela donne $B_2 = B_1$, puisque l'inclusion $B_1 \subset B_2$ est évidente. Avant d'aborder la démonstration du théorème que nous nous avons proposé de démontrer, remarquons que, quelle que soit la classe B d'ensembles, on a

$$B +^* B' +^* B'' +^* \dots \subset A^*\{B_{i_1,\dots,i_k}\},$$

$$B \times^* B' \times^* B'' \times^* \dots \subset A^*\{B_{i_1,\dots,i_k}\},$$

où $B = B' = B'' = \dots = B_{i_1,\dots,i_k}$. Ces formules dont la démonstration est presque immédiate, expriment que les opérations de la somme et du produit dénombrable réprésentent des cas particuliers de l'opération (A). Il y en est de même pour la somme et pour le produit d'un nombre fini de termes.

Cela étant remarqué, démontrons d'abord que

$$(1) \qquad M_\alpha \subset A^*\{M_1^{i_1,\dots,i_k}\}, \quad \text{où} \quad M_1^{i_1,\dots,i_k} = M_1,$$
$$1 \leqslant \alpha < \Omega.$$

On a évidemment $M_1 \subset A^*\{M^{i_1,\dots,i_k}\}$. Soit λ le plus petit nombre ordinal $< \Omega$, pour lequel la relation (1) n'a pas lieu. $\lambda > 1$.

Cas 1°. λ et $\lambda - 1$ sont de *1*^{e} espèce. On a alors $\lambda = \mu + n + 1$, où μ est de *2*^{e} espèce (ou $= 0$) et $1 \leqslant n < \omega$. La *définition IV* donne:

$$M_\lambda = M_{\lambda-1} +^* M_{\mu+1}.$$

Mais on a, en vertu de la supposition,

$$M_{\lambda-1} \subset A^*\{M_1^{i_1,\dots,i_k}\}, \quad M_{\mu+1} \subset A^*\{M_1^{i_1,\dots,i}\}$$

puisque $\lambda - 1$ et $\mu + 1$ sont inférieurs à λ.

En tenant compte de le remarque que nous avons faite plus haut, on a donc

$$M_\lambda \subset A^*\{M_1^{i_1,\dots,i_k}\},$$

ce qui implique une contradiction.

Cas 2°. λ est de 1^e espèce et λ est de *2*^{e} espèce.

On a, par définition

$$M_\lambda = A_{\lambda-1} \times^* C_{\lambda-1},$$

où $A_{\lambda-1} = M_{\lambda-1} +^* M'_{\lambda-1} + \dots$, $C_{\lambda-1} = co^* A_{\lambda-1}$.

Comme $\lambda - 1 < \lambda$, on a, en vertu de la supposition:

$$M_{\lambda-1} \subset A^*\{M_1^{i_1,\dots,i_k}\}.$$

donc, en vertu de ce que la sommation dénombrable n'est qu'un cas particulier de l'opération (A), on obtient à l'aide du lemme:

$$(2) \qquad A_{\lambda-1} \subset A^*\{M_1^{i_1,\dots,i_k}\}.$$

En ce qui concerne $C_{\lambda-1}$, remarquons que

$$(3) \qquad C_{\lambda-1} = co^* M_{\lambda-1} \times^* co^* M'_{\lambda-1} \times^* \dots$$

Mais $M_{\lambda-1} = \sum_{\beta<\lambda-1} M_\beta$ et, d'après le *théor D* et le *théor. E*, quel que soit $\beta < \lambda - 1$ il existe un nombre fini $n(\beta)$ tel que

$$co^* M_\beta \subset M_{\beta+n(\beta)}.$$

Le nombre α étant de 2^e espèce on a, quel que soit $\beta < \lambda - 1$: $\beta + n(\beta) < \lambda - 1$ ce qui entraîne, d'après le *théor. B*: $M_{\beta+n(\beta)} \subset M_{\lambda-1}$. Il s'ensuit $co^* M_\beta \subset M_{\lambda-1}$ pour tous les $\beta < \lambda - 1$.

Nous pouvons donc affirmer que

$$co^* M_{\lambda-1} = \sum_{\beta<\lambda-1} co^* M_\beta \subset M_{\lambda-1}.$$

La relation (3) implique donc

$$C_{\lambda-1} \subset M_{\lambda-1} \times^* M'_{\lambda-1} \times^* \ldots,$$

donc

$$C_{\lambda-1} \subset A^* \{M_{\lambda-1}^{i_1,\ldots,i_k}\}, \quad \text{où} \quad M_{\lambda-1}^{i_1,\ldots,i_k} = M_{\lambda-1}.$$

Comme, en vertu de l'hypothèse:

$$M_{\lambda-1} \subset A^* \{M_1^{i_1,\ldots,i_k}\},$$

on en déduit à l'aide du lemme que

$$C_{\lambda-1} \subset A^* \{M_1^{i_1,\ldots,i_k}\}. \tag{4}$$

De (2) et (4) on obtient

$$M_\lambda = A_{\lambda-1} \times^* C_{\lambda-1} \subset A^* \{M_1^{i_1,\ldots,i_k}\},$$

ce qui est contradictoire.

Cas 3⁰. λ est de 2^e espèce. On a dans ce cas:

$$M_\lambda = \sum_{\beta<\lambda} M_\beta.$$

Mais tous les M_β, où $\beta < \lambda$, étant contenus dans $A\{M_1^{i_1,\ldots,i_k}\}$, il en résulte que

$$M_\lambda \subset A^* \{M_1^{i_1,\ldots,i_k}\},$$

ce qui est impossible.

Etant démontré que tous les cas qui peuvent s'y présenter conduisent à une contradiction, on peut affirmer qu'il n'existe aucun nombre $\alpha < \Omega$ pour lequel la relation $M_\alpha \subset A\{M_1^{i_1,\ldots,i_k}\}$ soit en défaut.

La relation $M_\alpha \subset A^* \{M_1^{i_1,\ldots,i_k}\}$ est ainsi démontré pour tous les α, où $1 \leqslant \alpha < \Omega$.

Cela étant posé, la relation

$$M_\alpha \subset A^* \{M^{i_1,\ldots,i_k}\}, \quad \text{où} \quad M_\beta^{i_1,\ldots,i_k} = M_\beta,$$

n'est qu'une simple conséquence de la relation démontrée et du lemme.

Il y en est de même pour les relations

$$A^* \subset A^* \{M_\beta^{i_1,\ldots,i_k}\}$$
$$C^* \subset A^* \{M_\beta^{i_1,\ldots,i_k}\}$$

Les théorèmes A — H nous permettent de considérer comme établi le théorème suivant:

Théorème IX. Soit A une classe normale d'ensembles de l'espece R_p ($p \geqslant 1$ et fini). Si l'on suppose que A admette une fonction universelle et qu'on définit les classes A_α, C_α et M_α de la manière précisée dans la définition IV, on peut affirmer que

1⁰ toutes les classes M_α, A_α, C_α sont différentes deux-à-deux;

2⁰ la relation $1 \leqslant \alpha < \beta < \Omega$ entraîne $M_\alpha \subset M_\beta$;

3⁰ toutes les classes M_α, A_α, C_α admettent des fonctions universelles, l'exception faite pour les M_α, où α est de 2^e espèce;

4⁰ toutes les classes A_α et C_α sont normales;

5⁰ toutes ces classes M_α, A_α, C_α sont contenues dans $A^*\{M_\beta^{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}\}$, où $M_\beta^{\alpha_1,\ldots,\alpha_k} = M_\beta$ et β est quelconque $(1 \leqslant \beta < \Omega)$;

6⁰ si α est de 2^e espèce, $co^* M_\alpha = M_\alpha$; si α est de 1^e espèce, $co^* M_\alpha = M_{\alpha+n(\alpha)}$, où $1 \leqslant n(\alpha) < \omega$ dépend de α.

Comme application, on obtient dans le cas, où A est la classe de tous les ensembles mesurables ($\boldsymbol{B}$), cette classification étant plus détaillée que des classifications habituelles. Dans notre cas les classes A_α, C_α, M_α sont des invariantes d'homéomorphie, comme on le peut démontrer par la méthode de M. M. Lavrentieff[26]).

Si l'on part de la classe A définie soit comme la classe de tous les ensembles ($\boldsymbol{A}$) de Souslin et M. Lusin, soit comme la classe ($\boldsymbol{PCE}$)[27]) on obtient aussi des échelles (du type Ω) de classes d'ensembles, ces classes étant différentes deux-à-deux. Le fait que la classe ($\boldsymbol{PCE}$) est normale résulte d'une remarque de M. Sierpiński[28]).

[26]) Contribution à la théorie des ensembles homéomorphes. Fund. Math. VI. p. 149—154.

[27]) voir [24]).

[28]) voir [25]).

4. M. N. Lusin a posé le problème d'étudier la plus petite classe $\mathcal{L}$ d'ensembles jouissant des propriétés suivantes:

1) $\mathcal{L}$ contient tous les ensembles fermés de R_p;
2) $co^* \mathcal{L} \subset \mathcal{L}$;
3) $A^*\{\mathcal{L}_{a_1,\ldots,a_k}\} \subset \mathcal{L}$, où $\mathcal{L}_{a_1,\ldots,a_k} = \mathcal{L}$.

Or, nous allons construire une échelle du type Ω^2 de classes dont la somme est identique avec $\mathcal{L}$. les dites classes étant plus en plus larges et différentes deux-à-deux.

En prenant le point de vue un peu plus général, posons la définition suivante:

Définition V.

Soit A une classe normale d'ensembles de l'espace R_p. Posons $C \underset{df}{=} co^* A$ et définissons de la manière suivante les classes d'ensembles A_α, C_α, M_α, où α percours successivement le nombre 0 et tous les nombres ordinaux plus petits que ω_2 (défini comme le plus petit nombre ordinal de puissance $\aleph_2$):

1° $A_0 \underset{df}{=} A$, $C_0 \underset{df}{=} C$;

2° si $\alpha = 1$, posons $M_\alpha \underset{df}{=} A_0 \times^* C_0$;

3° si α est un nombre de *1*e espèce et s'il y en de même pour $\alpha - 1$, posons

$$M_\alpha \underset{df}{=} M_{\alpha-1} +^* M_{\mu+1},$$

où $\alpha = \mu + n + 1$, μ est de *2*e ou de *3*e espèce ou $= 0$, $1 \leqslant n < \omega$;

4° si α est de *1*e espèce et $\alpha - 1$ de *2*e espèce, posons

$$M_\alpha \underset{df}{=} A_{\alpha-1} \times^* C_{\alpha-1},$$

où

$$A_{\alpha-1} \underset{df}{=} M_{\alpha-1} +^* M'_{\alpha-1} +^* \ldots$$

$$C_{\alpha-1} \underset{df}{=} co^* A_{\alpha-1};$$

5° si α est de *1*e espèce et $\alpha - 1$ de *3*e espèce, posons:

$$M_\alpha \underset{df}{=} A_{\alpha-1} \times^* C_{\alpha-1},$$

où

$$A_{\alpha-1} \underset{df}{=} A^*\{M_{\alpha-1}^{a_1,\ldots,a_k}\}, \ (M_{\alpha-1}^{a_1,\ldots,a_k} = M_{\alpha-1})$$

et

$$C_{\alpha-1} \underset{df}{=} co^* A_{\alpha-1};$$

6° si α est de *2*e ou de *3*e espèce:

$$M_\alpha \underset{df}{=} \sum_{\beta<\alpha} M_\beta.$$

Le définition que nous venons de poser détermine d'une manière univoque les ensembles M_α pour $1 \leqslant \alpha < \omega_2$ et les ensembles A_α et C_α pour $\alpha = 0$ et pour tous les $\alpha < \omega_2$ qui sont de *2*e ou de *3*e espèce. Mentionnons qu'en réalité la suite transfinie d'ensembles — comme nous le démontrerons plus tard — ne donne qu'une échelle du type Ω^2 parce que toutes les classes M_α dont l'indice α est $\geqslant \Omega^2$, sont identiques deux-à-deux.

Théorème a.

L'ensemble vide *0*, ainsi que l'ensemble universel *1* appartiennent à toutes les classes M_α, A_α, C_α.

Démonstration.

Le théorème est vrai pour $\alpha \leqslant 1$. Supposons qu'il soit vrai pour tous les nombres $< \alpha$, où $2 \leqslant \alpha < \omega_2$ est fixé et proposons nous de le démontrer pour α. En ce qui concerne les M_α, six cas peuvent s'y présenter conformément aux six cas spécifiés dans la *définition V*. Le cas 1° et 2° n'a pas lieu et, dans le cas 3°, 4° et 6° on n'a que réproduire presque mot à mot le raisonnement dont se compose la démonstration du *théor. A*. Il ne reste que le cas 5° qui doit être considéré à part.

Soit donc $\alpha = \mu + 1$, où μ est de *3*e espèce. On a, en vertu de la *définition V*:

$$M_\alpha = A_{\alpha-1} \times^* C_{\alpha-1}.$$

Comme *0* et *1* appartiennent, en vertu de la supposition, à $A_{\alpha-1}$ et à $C_{\alpha-1}$, ces ensembles appartiennent aussi à M_α.

En ce qui concerne les ensembles A_α, C_α il y a deux cas 1) α est de *2*e espèce, 2) α est de *3*e espèce. Dans le cas 1) le raisonnement est identique à celui de la démonstration du *théorème A*. Passons au cas 2): α est de *3*e espèce.

On a $A_\alpha = A^*\{M_\alpha^{a_1,\ldots,a_k}\}$. Mais on a déjà démontré que *0* et *1* appartiennent à M_α. Par conséquent *0* et *1* appartiennent aussi à A_α donc à C_α.

La théorème peut être regardé comme établi.

Théorème b. La relation $\alpha<\beta<\omega_2$ entraîne $M_\alpha \subset M_\beta$.

Démonstration. En fixant α supposons que la proposition suivante soit vraie pour tous les $\alpha'<\alpha$: „si $1\leqslant\gamma<\gamma'\leqslant\alpha'$, on a $M_\gamma\subset M_{\gamma'}$". (Elle est assurément vraie pour $\alpha\leqslant 2$). Pour démontrer que la proposition „si $1\leqslant\gamma<\gamma'\leqslant\alpha$, on a $M_\gamma\subset M_{\gamma'}$" est aussi vraie, on doit distinguer plusieurs cas de la *définition V*. Mais il suffit de considérer le seul cas 5° puisque les cas restants se traîtent d'une manière analogue que dans la démonstration du *théorème B*. Soit donc $\alpha=\mu+1$, où μ est de 3^e espèce. On a

$$M_\alpha = A_\mu \times^* C_\mu$$

$$A_\mu = A^*\{M_\mu^{a_1,\dots,a_k}\},\qquad C_\mu = co^* A_\mu.$$

On voit que $M_\mu\subset A_\mu\subset A_\mu\times^* C_\mu$ (puisque $1\in C_\mu$). Par conséquent $M_\mu\subset M_\alpha$. On en déduit aisément que la relation

$$1\leqslant\gamma<\gamma'\leqslant\alpha \quad \text{implique} \quad M_\gamma\subset M_{\gamma'}.$$

Théorème c. Tous les A_α et C_α, où α est de 2^e, 3^e espèce ou $=0$, sont des classes normales.

Démonstration. En vertu du *théor. a* il suffit de démontrer les formules

$$A_\alpha +^* A'_\alpha = A_\alpha, \quad A_\alpha \times^* A'_\alpha = A_\alpha.$$

En ce qui concerne la formule première, on n'a que considérer le cas, où α est de 3^e espèce. En effet les cas restants se traîtent d'une manière analogue que dans la démonstration du *théor. C*. Soit donc α un nombre de 3^e espèce. On a alors

$$A_\alpha = A^*\{M_\alpha^{a_1,\dots,a_k}\}.$$

Par conséquent, en vertu du lemme dont nous avons parlé plus haut et en vertu des remarques qui le suivent:

$$A_\alpha +^* A'_\alpha \subset A^*\{M_\alpha^{a_1,\dots,a_k}\} = A_\alpha.$$

L'inclusion inverse:

$$A_\alpha \supset A_\alpha +^* A'_\alpha$$

étant évidente, il en résulte notre formule.

La formule $A_\alpha \times^* A'_\alpha \subset A_\alpha$ se démontre par l'induction transfinie. La formule étant vraie pour $\alpha=0$, supposons qu'elle subsiste pour tous les nombres $\beta<\alpha$ qui ne sont pas de 1^e espèce. Dans le cas, où α est de 2^e espèce, il suffit de reproduire une partie de la démonstration du *théor. C*. Soit α de 3^e espèce. Dans ce cas on a:

$$A_\alpha = A^*\{M_\alpha^{a_1,\dots,a_k}\}$$

donc

$$A_\alpha \times^* A'_\alpha \subset A^*\{M_\alpha^{a_1,\dots,a_k}\} = A_\alpha,$$

ce qui implique la formule, étant évident que $A_\alpha \subset A_\alpha \times^* A'_\alpha$.

Le théorème est ainsi démontré.

Théorème d. Si α est un nombre de 1^e espèce, il existe un nombre n, où $1\leqslant n<\omega$, tel que $co^* M_\alpha \subset M_{\alpha+n}$.

Si $\alpha=0$ ou si α est de 2^e ou de 3^e espèce, on a

$$co^* M_\alpha = M_\alpha.$$

Démonstration. Le théorème se démontre de la même manière que les *théor. D* et *E*.

Théorème e. Si l'on admet la *définition V*, on a, quel que soit $\alpha>\Omega^2$ et ω_2:

$$M_\alpha = M_{\Omega^2}.$$

Démonstration.

Démontrons d'abord que $A^*\{M_{\Omega^2}^{a_1,\dots,a_k}\} = M_{\Omega^2}$.

Soit $\{e_{a_1,\dots,a_k}\}$ un système déterminant composé d'ensembles appartenant à M_{Ω^2}. Le nombre Ω^2 étant de 3^e espèce, on a

$$M_{\Omega^2} = \sum_{\beta<\Omega^2} M_\beta,$$

donc il existe un système

$$\{\beta_{a_1,\dots,a_k}\}$$

de nombres ordinaux $<\Omega^2$ tel que

$$e_{a_1,\dots,a_k} \in M_{\beta_{a_1,\dots,a_k}}.$$

L'ensemble de tous les différents groupes finis de nombres naturels étant dénombrable, il existe nécessairement un nombre $\beta<\Omega^2$ tel que $\beta_{a_1,\dots,a_k}<\beta$ quel que soit le groupe d'indice $(a_1,\dots,a_k)$. En effet si cela n'était pas vrai, il existerait une suite croissante (et du type ω) de nombres ordinaux tendant vers Ω^2 ce qui est impossible, le nombre Ω^2 étant de 3^e espèce. En vertu du *théor. b*, on a:

$$M_{\beta_{a_1,\dots,a_k}} \subset M_\beta,$$

donc

$$e_{a_1,\ldots,a_k} \in M_\beta.$$

Le nombre β peut être mis sous la forme

(1) $$\beta = \Omega . \lambda + \mu,$$

où $0 \leqslant \lambda < \Omega$ et $0 \leqslant \mu < \Omega$. Donc $\beta < \Omega . (\lambda + 1)$, ce qui implique

$$e_{a_1,\ldots,a_k} \in M_{\Omega \cdot (\lambda+1)}.$$

En désignant par e le noyau du notre système déterminant, on peut écrire:

$$e \in A^*\{M_{\Omega \cdot (\lambda+1)}\}.$$

Le nombre $\Omega . (\lambda + 1)$ est de *3*[e] espèce. Donc (*Déf. V*)

$$A^*\{M_{\Omega \cdot (\lambda+1)}\} = A_{\Omega \cdot (\lambda+1)} \subset M_{\Omega \cdot (\lambda+1)+1}$$

ce qui donne (*théor. b*):

$$e \in M_{\Omega^2},$$

puisque $\Omega . (\lambda + 1) + 1 < \Omega^2$.

Il s'ensuit que

$$A^*\{M_{\Omega^2}^{a_1,\ldots,a_k}\} \subset M_{\Omega^2},$$

ce qui donne, comme l'inclusion inverse est évidente:

(1) $$A^*\{M_{\Omega^2}^{a_1,\ldots,a_k}\} = M_{\Omega^2}.$$

Ajoutons que le *théorème d* donne

(2) $$co^* M_{\Omega^2} = M_{\Omega^2}.$$

Cela étant posé, supposons qu'il existe un nombre $\alpha' > \Omega^2$ et $< \omega_1$ tel que

$$M_{\alpha'} \neq M_{\Omega^2}.$$

Désignons par α le plus petit nombre jouissant de cette propriété. Donc pour tout $\beta < \alpha$ on a $M_\beta \subset M_{\Omega^2}$.

En ce qui concerne le nombre α, plusieurs cas peuvent s'y présenter. Remarquons auparavant que α ne peut pas être ni de *2*[e] ni de *3*[e] espèce.

En effet, dans ce cas on aurait

$$M_\alpha = \sum_{\beta<\alpha} M_\beta \quad \text{et} \quad M_\beta \subset M_{\Omega^2} \quad \text{pour} \quad \beta < \alpha.$$

Donc on aurait

$$M_\alpha \subset M_{\Omega^2},$$

ce qui donnerait $M_\alpha = M_{\Omega^2}$, car, d'après le *théor. b*, $M_{\Omega^2} \subset M_\alpha$.

Cas 1) α est de *1*[e] espèce et $\alpha - 1$ de *1*[e] espèce.

On a

$$M_\alpha = M_{\alpha-1} +^* M_{\mu'+1},$$

où μ' n'est pas de *1*[e] espèce. Comme $\alpha - 1 < \alpha$ et $\mu' + 1 < \alpha$, on a

$$M_{\alpha-1} \subset M_{\Omega^2}, \quad M_{\mu'+1} \subset M_{\Omega^2}.$$

La sommation étant un cas particulier de l'opération (A), on en déduit, en tenant compte de (1):

$$M_\alpha = M_{\alpha-1} +^* M_{\mu'+1} \subset M_{\Omega^2},$$

ce qui est impossible.

Cas 2) α est de *1*[e] espèce et $\alpha - 1$ de *2*[e] espèce.

On a $M_\alpha = A_{\alpha-1} \times^* C_{\alpha-1}$, où

(3) $$A_{\alpha-1} = M_{\alpha-1} +^* M'_{\alpha-1} +^* \ldots,$$

$$C_{\alpha-1} = co^* A_{\alpha-1}.$$

Les dernieres relations donnent:

$$C_{\alpha-1} = co^* M_{\alpha-1} \times^* co^* M'_{\alpha-1} \times^* \ldots,$$

donc, d'après le *théor. d*:

(4) $$C_{\alpha-1} = M_{\alpha-1} \times^* M'_{\alpha-1} \times^* \ldots$$

De (3) et (4) on tire, en vertu du lemme et des remarques qui le suivent:

$$A_{\alpha-1} \subset A^*\{M_{\alpha-1}^{a_1,\ldots,a_k}\}, \quad C_{\alpha-1} \subset A^*\{M_{\alpha-1}^{a_1,\ldots,a_k}\}$$

donc

$$M_\alpha \subset A^*\{M_{\alpha-1}^{a_1,\ldots,a_k}\} \subset A^*\{M_{\Omega^2}^{a_1,\ldots,a_k}\},$$

donc, d'après (1)

$$M_\alpha \subset M_{\Omega^2},$$

ce qui est contradictoire.

Cas 3). α est de *1*[e] espèce et $\alpha - 1$ de *3*[e] espèce

On a

$$M_\alpha = A_{\alpha-1} \times^* C_{\alpha-1},$$

où

$$A_{\alpha-1} = A^*\{M_{\alpha-1}^{a_1,\ldots,a_k}\}, \qquad C_{\alpha-1} = co^* A_{\alpha-1}.$$

Puisque $\alpha - 1 < \alpha$, on a $M_{\alpha-1} \subset M_{\Omega^2}$, donc

(de (1)), $$A_{\alpha-1} \subset A^* \{M_{\Omega^2}\} = M_{\Omega^2}.$$

Puisque $C_{\alpha-1} \subset co^* A_{\alpha-1}$ on a donc

$$C_{\alpha-1} \subset co^* M_{\Omega^2}.$$

d'où on obtient à l'aide de (2):

$$C_{\alpha-1} \subset M_{\Omega^2}.$$

On en déduit que $M_\alpha = A_{\alpha-1} \times^* C_{\alpha-1} \subset M_{\Omega^2}$ (en appliquant notre lemme comme d'habitude, et la relation (1)).

La supposition qu'il existe un $\alpha > \Omega^2$ tel que $M_\alpha \neq M_{\Omega^2}$ conduit donc aux contradictions.

Le théorème est démontré.

Corollaire. Si la classe A est normale, la classe M_{Ω^2} est contenue dans toute classe B d'ensembles, jouissant des propriétés suivantes

1) $A \subset B$

2) si $e \in B$, on a $co\, e \in B$

3) si tous les ensembles du système déterminant $\{e_{a_1,\dots,a_k}\}$ appartiennent à B, leur noyau appartient aussi à B.

De plus dans nos conditions la classe M_{Ω^2} jouit des priétés 1) 2) 3) et, par conséquent, elle est la classe irréductible [28a]) par rapport à ces propriétés.

Démonstration.

Nous avons démontré que

$$co^* M_{\Omega^2} = M_{\Omega^2}$$

et que

$$A^* \{M_{\Omega^2}^{a_1,\dots,a_k}\} = M_{\Omega^2}.$$

De plus on a $A \subset A_0 \times C_0 = M_1 \subset M_{\Omega^2}$.

Il en résulte que M_{Ω^2} jouit des propriétés 1), 2), 3).

Démontrons maintenant la partie première du théorème. Soit B une classe d'ensembles jouissant des propriétés 1), 2) et 3). La classe A étant contenue dans B, il en résulte que $C = co\, A \subset B$,

[28a]) Suivant le terminologie de Z. Janiszewski, *Thèse*

donc $A \times^* C \subset B$, parce que l'opération de multiplication n'est qu'un cas particulier de l'opération (A). Donc

$$M_1 \subset B.$$

Soit α le plus petit nombre transfini $< \omega_2$, tel que M_α n'est pas contenu dans B. On a $\alpha > 1$ et on voit que α est nécessairement de *1*[e] espèce.

En effet, dans le cas contraire on a, d'après la *définition V*:

$$M_\alpha = \sum_{\beta < \alpha} M_\beta,$$

où pour tous les $\beta < \alpha$: $M_\beta \subset B$, (en vertu de l'hypothèse); donc $M \subset B$ ce qui implique une contradiction.

Cas 1°. α est de *1*[e] espèce et $\alpha - 1$ de *1*[e] espèce.

Dans ce cas écrivons, comme d'habitude,

$$M_\alpha = M_{\alpha-1} +^* M_{\mu+1},$$

où $\alpha - 1 < \alpha$ et $\mu + 1 < \alpha$. Comme, en vertu de la supposition $M_{\alpha-1} \subset B$ et $M_{\mu+1} \subset B$ et, comme la sommation n'est qu'un cas particulier de l'opération (A), on trouve $M_\alpha \subset B$ ce qui est contradictoire.

Cas 2°. α est de *1*[e] espèce et $\alpha - 1$ de *2*[e] espèce.

On a $M_\alpha = A_{\alpha-1} \times^* C_{\alpha-1}$, où

$$A_{\alpha-1} = M_{\alpha-1} +^* M'_{\alpha-1} +^* \dots, \quad \text{et} \quad C_{\alpha-1} = co^* A_{\alpha-1}.$$

Comme $M_{\alpha-1} \subset B$, on en tire $A_{\alpha-1} \subset B$, d'où, en vertu de la propriété 2) $C_{\alpha-1} \subset B$, donc enfin $M_\alpha \subset B$, ce qui est impossible.

Cas 3°. α est de *1*[e] espèce et $\alpha - 1$ de *3*[e] espèce.

On a $M_\alpha = A_{\alpha-1} \times^* C_{\alpha+1}$, où

$$A_{\alpha-1} = A^* \{M_{\alpha-1}^{a_1,\dots,a_k}\}, \quad C_{\alpha-1} = co^* A_{\alpha-1}.$$

Comme $M_{\alpha-1} \subset B$, on a, en vertu de la propriété 3): $A_{\alpha-1} \subset B$, donc $C_{\alpha-1} \subset B$, donc enfin $M_\alpha \subset B$, ce qui est impossible.

Notre supposition que nous avons prise pour le point de départ du raisonnement, est en défaut. Par conséquent

$$M_\alpha \subset B \quad \text{pour tous les } \alpha < \omega_2.$$

En vertu du *théorème e*, on peut écrire

$$\sum_{\alpha<\omega_2} M_\alpha = \sum_{\alpha<\Omega^2} M_\alpha = M_{\Omega^2}.$$

Par conséquent $M_{\Omega^2} \subset B$. Le théorème est ainsi établi.

Théorème f. Si l'on admet la *définition V* et si l'on suppose que la classe A possède une fonction universelle, toutes les classes A_α, C_α, M_α, pour $\alpha < \Omega^2$, en possèdent une aussi, l'exception faite pour les classes M_α, où α est de 2^e ou de 3^e espèce. Ces classes ne possèdent aucune fonction universelle.

Démonstration.

Pour prouver que M_α, où α est de 2^e ou de 3^e espèce, n'admette pas de fonctions universelles, on n'a que réproduire le raisonnement inséré dans la démonstration du *théorème F*. Pour démontrer les thèses restantes, fixons un nombre ordinal α et supposons que

1) si $\beta < \alpha$ est de 2^e ou de 3^e espèce (ou $=0$), les classes A_β, C_β possèdent des fonctions universelles,

2) si $\beta < \alpha$ est de 1^e espèce, M_β en possède une.

Essayons de démontrer que, si α est de 1^e espèce, M_α possède une fonction universelle et qu'il y en est de même pour les A_α et C_α si α est de 2^e ou de 3^e espèce. (Remarquons que A_0, C_0 et M_1 possèdent évidemment des fonctions universelles).

Dans le cas, où α est de 2^e espèce, on n'a que raissonner comme dans la démonstration du *théor. F.*

Soit α de 3^e espèce. On a (*def. V*):

$$A_\alpha = A^*\{M_\alpha^{a_1,\dots,a_k}\}, \quad C_\alpha = co^* A_\alpha. \tag{1}$$

Le nombre α étant $<\Omega^2$, il existe un nombre $\lambda < \Omega$ tel que $\alpha = \Omega.\lambda$. Le nombre λ est nécessairement de 1^e espèce parce que dans le cas contraire on aurait $\alpha = 0$ ou α serait de 2^e espèce ou bien au moins égal à Ω^2. Par conséquent

$$\lambda_1 \overline{\overline{\scriptstyle df}}\, \Omega.(\lambda-1) < \alpha.$$

Je dis que

$$A_\alpha = A^*\{M_{\lambda_1+1}^{a_1,\dots,a_k}\}.$$

Comme, en vertu du *théor. b*: $M_{\lambda_1+1} \subset M_\alpha$, (étant vrai que $\lambda_1+1<\alpha$), on a de (1):

$$A^*\{M_{\lambda+1}^{a_1,\dots,a_k}\} \subseteq A_\alpha. \tag{2}$$

Pour démontrer l'inclusion inverse, supposons que $e \in A_\alpha$. Il existe un système déterminant

$$\{e_{a_1,\dots,a_k}\},$$

où $e_{a_1,\dots,a_k} \in M_\alpha$, dont le noyau est e. Comme, en vertu de la *déf. V*:

$$M_\alpha = \sum_{\beta<\alpha} M_\beta,$$

il existe un système de nombres ordinaux $<\alpha$:

$$\{\gamma_{a_1,\dots,a_k}\},$$

tels que

$$e_{a_1,\dots,a_k} \in M_{\gamma_{a_1,\dots,a_k}}.$$

Le nombre α étant de 3^e espèce et l'ensemble de tous les groupes finis d'indices $(a_1,\dots,a_k)$ étant dénombrable, il en resulte qu'on peut trouver un nombre $\gamma < \alpha$ et supérieur à tous les $\gamma_{a_1,\dots,a_k}$. Il s'ensuit que (*théor. b*)

$$M_{\gamma_{a_1,\dots,a_k}} \subset M_\gamma,$$

donc

$$e \in A^*\{M_\gamma^{a_1,\dots,a_k}\}, \quad \text{où} \quad M_\gamma^{a_1,\dots,a_k} = M_\gamma.$$

En désignant par λ_2 le plus petit nombre non inférieur à λ_1+1 et à γ, on a à fortiori

$$e \in A^*\{M_{\lambda_2}^{a_1,\dots,a_k}\}, \quad \text{où} \quad M_{\lambda_2}^{a_1,\dots,a_k} = M_{\lambda_2}. \tag{3}$$

On a

$$\lambda_1 + 1 \leqslant \lambda_2 < \alpha. \tag{4}$$

Si l'on considère les classes M_β, où $\lambda_1+1 \leqslant \beta < \alpha$, on trouve qu'ils proviennent de A_{λ_1} d'une manière analogue que les classes analogues définis par la définition IV.

En effet A_{λ_1} est, en vertu du *théor. c*, une classe normale et les nombres β, où $\lambda_1+1 \leqslant \beta < \alpha$, forment une suite transfinie du type Ω. Nous nous trouvons ainsi dans les conditions du *théor. H*. On obient donc de (4)

$$M_{\lambda_2} \subset A^*\{M_{\lambda_1+1}^{a_1,\dots,a_k}\}.$$

Donc, en tenant compte du *lemme*, on obtient de (3)

$$e \in A^* \{M^{a_1, \dots, a_k}_{\lambda_1+1}\},$$

Il s'ensuit:

$$A_\alpha \subset A^* \{M^{a_1, \dots, a_k}_{\lambda_1+1}\},$$

d'où, à l'aide de (2):

$$A_\alpha = A^* \{M^{a_1, \dots, a_k}_{\lambda_1+1}\}.$$

Comme $\lambda_1 + 1 < \alpha$, la classe M_{λ_1+1} possède, en vertu de la supposition, une fonction universelle. Il en résulte, d'après le *théor. V1* que A_α et, par conséquent C_α, en possèdent une aussi.

Dans le cas, où α est un nombre de *1e* espèce, le raisonnement est analogue à celui qui se trouve dans la démonstration du *théor. F.*

Notre théorème est démontré.

Remarquons que $A_{\Omega^2} = C_{\Omega^2} = M_{\Omega^2}$ ne possède aucune fonction universelle, (voir le *théor. e*).

Théorème g. Dans le cas de la *définition V* et si l'on suppose que la classe A possède une fonction universelle, toutes les classes A_α, C_α, M_α, où $\alpha < \Omega^2$ sont différentes deux-à-deux.

Démonstration.

Toute classe A_α, où $0 \leqslant \alpha < \Omega^2$ étant, d'après le *théor. c*, une classe normale et, d'après le *théor. f*, une classe admettant une fonction universelle, toutes les classes A_β, C_β, M_β où $\Omega . \lambda \leqslant \alpha < \Omega . (\lambda + 1)$, $0 \leqslant \lambda < \Omega$, sont, en vertu du *théor. G*, différentes deux-à-deux.

Supposons que $M_\alpha = M_\beta$, où $\alpha < \beta$. En posant $\alpha = \Omega . \lambda' + \mu'$, $\beta = \Omega . \lambda'' + \mu''$, où λ', μ', λ'', μ'' sont $\geqslant 0$ et $< \Omega$, on a nécessairement $\lambda' < \lambda''$. Donc $\alpha + 1 < \alpha + 2 < \beta$.

Comme $M_\alpha \subset M_{\alpha+1} \subset M_{\alpha+2} \subset M_\beta$, et comme $M_{\alpha+1} \neq M_{\alpha+2}$, on a $M_\alpha \neq M_\beta$ contrairement à l'hypothèse.

Toutes les classes M_α sont ainsi différentes deux-à-deux

La démonstration du fait que tous les A_α et C_α sont différentes deux-à-deux ainsi que la démonstration du fait que les identités $A_\alpha = M_\beta$ $C_{\alpha'} = M_{\beta'}$ ne subsistent jamais — est analogue à celle qui est employée à propos du *théor. G.*

Notre théorème peut être considéré comme établi.

Les *théorèmes a—g* ainsi que le *corollaire* de *e* nous permettent d'énoncer le théorème suivant:

Theoreme X. Soit A une classe normale d'ensembles de l'espace R_p ($p \geqslant 1$ et fini). Si l'on suppose que A admette une fonction universelle et qu'on définit les classes A_α, C_α, M_α ($0 \leqslant \alpha < \omega_2$) de la manière précisée dans l'énoncé de la *définition V*, on peut affirmer que

1° toutes les classes M_α, A_α, C_α où $\alpha < \Omega^2$, sont différentes deux-à-deux et, en outre, elles diffèrent de $M_{\Omega^2} = A_{\Omega^2} = C_{\Omega^2}$;

2° toutes les clases M_α, où $\alpha \geqslant \Omega^2$, sont identiques avec M_{Ω^2};

3° la relation $1 \leqslant \alpha < \beta < \omega_2$ entraîne

$$M_\alpha \subset M_\beta;$$

3° toutes les classes M_α, A^α, C_α, où $0 \leqslant \alpha < \Omega^2$, admettent des fonctions universelles l'exeption faite pour les M_α, où α est de *2e* ou de *3e* espèce. $M_{\Omega^2} = A_{\Omega^2} = C_{\Omega^2}$ ne possède pas de fonctions universelles;

4° toutes les classes A_α, C_α sont normales;

5° si α est de *2e* espèce ou de *3e* espèce, on a

$$co^* M_\alpha = M_\alpha;$$

si α est de *1e* espèce, il existe un nombre $n = n(\alpha)$ dépendant de α, tel que $1 \leqslant n < \omega$ et que

$$co^* M_\alpha \subset M_{\alpha+n};$$

6° M_{Ω^2} est la plus petite de classes B jouissant des propiétés suivantes:

1) $A \subset B$

2) si $e \in B$, on a $co\, e \in B$

3) si $\{e_{a_1, \dots, a_k}\}$, est un système déterminant composé d'énsembles de la clase B, son noyau appartient aussi à B.

En finissant notre travail, faisons les remarques suivantes. A l'aide des théorèmes généraux de M. Lavrentieff[29]) on peut démontrer que toutes les classes A_α, C_α, M_α définies dans l'énoncé de la *définition V* sont des invariants d'homéomorphie,

[29]) voir [25]).

à condition que la classe A normale est un invariant de l'homéomorphie et que $(G_\delta) \times^* A_0 \subset A_0$ et $(G_\delta) \times^* C_0 \subset C_0$. Nous n'entrerons pas dans les détails de la démonstration et nous nous bornerons de remarquer que la démonstration s'appuie sur le fait que, quel que soit $\alpha < \omega_2$, on a $(G_\delta) \times^* M_\alpha \subset M_\alpha$, $(G_\delta) \times^* A_\alpha \subset A_\alpha$, et $(G_\delta) \times^* C_\alpha \subset C_\alpha$. Ces relations se démontrent sans peine par l'induction transfinie.

Si l'on suppose que la classe A ne contient que des ensembles mesurables (L), il en résulte que les ensembles appartenant à n'importe quelle classe M_α, A_α, C_α sont aussi mesurables (L). Cela se démontre au moyen du principe de l'induction transfinie et en s'appuyant surtout sur le théorème suivant [30]) de MM. N. Lusin et W. Sierpiński: l'opération $(\mathcal{A})$ effectuée sur des ensembles mesurables (L) donne des ensembles mesurables (L).

Dans le cas, où tous les ensembles de la classe A jouissent de le propriété connue de Baire, toutes les classes M_α, A_α, C_α ne contiennent que des ensembles jouissant de la propriété de Baire. En effet, ce théorème peut être démontré au moyen du théorème suivant [31]): l'opération $(\mathcal{A})$ effectuée sur des ensembles jouissant de la propriété de Baire ne donne que des ensembles jouissant de la propriété de Baire.

En particulier, si l'on prend pour A la classe de toutes les ensembles fermés de R_p et qu'on en construit l'échelle de classes M_α, A_α, C_α conformément à la *définition V*, on obtient une classification des ensembles „lusiniens" dont nous avons parlé plus haut. L'échelle de classes M_α (qui sont tous des invariants de l'homéomorphie) est du type Ω^2. Leur somme $M_{\Omega^2} = \mathcal{J}$ ne contient que des ensembles mesurables (L) et jouissant de la propriété de Baire [33]).

Il serait intéressant de rechercher les liaisons entre les ensembles $\mathcal{J}$ et les ensembles du type de projections des complémentaires des ensembles $(\mathcal{A})$. Le problème correspondant parait être très difficile [32]).

[30]) *Sur quelques propriétés des ensembles* $(\mathcal{A})$, *Bull. Ac. Crac. 1918. Sér. A. p. 48.*

[31]) O. Nikodym. *Sur quelques propriétés de l'opération* $(\mathcal{A})$ *C. R. d. séances de la Soc. des Sc. et d. L. de Varsovie XIX. 1926 Classe III p. 294—298.*

[32]) voir N. Lusin. *Comptes rendus* t. 180. p. 1817. 15. VI. 1925. *Les propriétés des ensembles projectifs.*

[33]) voir [5]) et aussi E. Sélivanowski. *Sur une classe d'ensembles effectifs (ensembles C). Recueil Mathématique de la soc. Math. de Moscou (en russe)* XXXV. 3—4. 1928.

Sur la décomposition des ensembles en sous-ensembles presque disjoints.

(Supplément à la note sous le même titre du Volume XII de ce Journal).

Par

Alfred Tarski (Varsovie).

Dans ma note *„Sur la décomposition des ensembles en sous-ensembles presque disjoints"* du Volume XII de ce Journal j'ai posé [1]) plusieurs problèmes que je ne savais alors résoudre même à l'aide d'ainsi dite *hypothèse de Cantor sur les alephs* ou *hypothèse du continu généralisée.* Je vais donner à présent la solution de tous ces problèmes, en admettant cependant dans la plupart des cas l'hypothèse indiquée.

Pour les signes et notions, dont je vais faire usage ici, on se rapportera à l'article précité. Les nombres des définitions et théorèmes de cet article seront dans la note présente munis d'un astérisque (p ex. „def. 2*", „th 25*" etc.).

Je vais établir d'abord quelques théorèmes auxiliaires.

Théorème 1. *Si un nombre ordinal* α *n'est pas confinal avec* ω_β, *si en outre* $E \subset A(\alpha)$ [2]) *et* $\overline{\overline{E}} \geqslant \aleph_\beta$, *alors il existe un nombre ordinal* η *tel que l'on a* $\eta < \alpha$ *et* $\overline{\overline{A(\eta) \cdot E}} \geqslant \aleph_\beta$.

Démonstration. La formule: $\overline{\overline{E}} \geqslant \aleph_\beta$ implique aussitôt que $\overline{E} \geqslant \omega_\beta$ [3]). Considérons donc les deux cas possibles:

$$(a) \qquad \overline{E} = \omega_\beta.$$

Dans ce cas, conformément à l'hypothèse du théorème, l'ensemble $A(\alpha)$ du type α n'est pas confinal avec E. Comme d'autre part

[1]) P. 195 et 204

[2]) Le signe „$A(\xi)$", où ξ est un nombre ordinal, dénote l'ensemble de tous les nombres ordinaux plus petits que ξ.

[3]) Le signe „$\overline{E}$" dénote le type de l'ensemble E de nombres ordinaux ordonnés selon la grandeur.