Quelques applications d'éléments cycliques de M. Whyburn [1]).

Par

Casimir Kuratowski (Lwów).

M. G. T. Whyburn a introduit la notion fort utile d'élément cyclique d'un espace Péanien [2]). Par définition, un élément cyclique est soit 1° un point qui coupe l'espace, soit 2° un point d'arrêt (= point d'ordre 1 au sens de Menger), soit 3° un continu saturé relativement à la propriété que tout couple de ses points s'y laisse unir par une courbe simple fermée [3]).

L'utilité de cette notion provient du fait qu'un grand nombre de propriétés de l'espace (Péanien) dépend des propriétés analogues d'éléments cycliques (fait qui tient à la structure „dendritique" de l'espace relativement à ses éléments cycliques) Ainsi, par exemple,

[1]) Les principaux résultats de cette note ont été présentés à la Soc. Polon. de Math. (Section de Varsovie) à la séance du 14. XII. 1928.

[2]) Espace Péanien = espace métrique qui est une image continue de l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant 1$. Un espace Péanien est donc compact, connexe et localement connexe.

[3]) G. T. Whyburn *Cyclicly connected continuous curves*, Proc. Nat. Ac. Sc. 13 (1927), pp. 31—38; *Concerning the structure of a continuous curve*, Amer. Journ. Math. 50 (1928), pp. 167—194.

On peut, au lieu de 2° et 3°, admettre que, lorsque p ne coupe pas l'espace, l'ensemble de tous les x tels qu'aucun point ne coupe l'espace entre x et p est un élément cyclique (R. L. Moore, Bull. Amer. Math. Soc. 35, 1929, p. 185). En définissant de cette façon les éléments cycliques on peut construire leur théorie d'une façon plus simple (du moins, pour les buts de cette note), notamment, sans qu'on ait à prouver le théorème suivant de M. Ayres: si aucun point ne coupe l'espace (Péanien) entre deux points donnés a et b, ces points sont situés sur une courbe simple fermée; théorème qui est fondamental dans la théorie basée sur la définition de M. Whyburn.

pour que l'espace soit une courbe régulière (au sens de Menger-Urysohn), il faut et il suffit que chaque élément cyclique le soit; il en est de même des propriétés de l'espace de ne contenir 1°: aucun sous-continu non-Péanien, 2°: aucun sous-ensemble connexe qui ne soit pas un semi-continu [1]). Il en est encore de même de quelques autres propriétés que je considère dans cette note [2]); en particulier: de la dimension. Je prouve, en effet, que la dimension de l'espace est le maximum des dimensions d'éléments cycliques (sauf le cas où l'espace est une dendrite).

Quelques conséquences concernant les décompositions semi-continues terminent cette note.

1. Nous allons supposer toujours que l'espace considéré est *Péanien*. Nous le désignons par le symbole 1.

Considérons les deux notions suivantes: Un ensemble E est dit *uni-cohérent*, lorsque, pour toute décomposition $E = K + L$ en deux continus, le produit KL est un continu (ou un point ou un ensemble vide).

L'espace 1 est dit *espace de Janiszewski*, lorsque pour toute région (= ensemble ouvert et connexe) R, l'ensemble $1 - R$ est uni-cohérent [3]) (ou non continu).

On a les deux théorèmes suivants:

Théorème I. *Pour que l'espace soit uni-cohérent, il faut et il suffit que tout élément cyclique le soit.*

Théorème II. *Pour que l'espace soit un espace de Janiszewski, il faut et il suffit que tout élément cyclique le soit.*

Démonstration. Nous aurons récours aux propriétés suivantes d'éléments cycliques que l'on prouve facilement dans leur théorie:

(α) C étant un élément cyclique et S une région-composante [4]) de $1 - C$, la frontière $F(S)$ de S se réduit à un seul point;

[1]) Voir Whyburn, Fund. Math. XII et Amer. Journ. Math. 50.

Les trois propriétés en question appartiennent donc à tout continu Péanien qui constitue la frontière d'une région du plan, car chaque élément cyclique d'un continu de ce genre est soit un point individuel, soit une courbe simple fermée.

[2]) Il semble bien probable que la propriété de l'espace de contenir un *point invariant* relativement aux transformations continues est aussi une propriété de ce genre.

[3]) Evidemment tout espace de Janiszewski est uni-cohérent; la surface de la sphère est un espace de Janiszewski. J'ai analysé ces deux notions dans ma note „*Une caractérisation topologique de la surface de la sphère*" Fund. Math XIII.

[4]) c.-à-d. que S est un sous-ensemble connexe de $1 - C$ qui n'est contenu dans aucun autre sous-ensemble connexe de $1 - C$.

(β) $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ étant une suite d'éléments cycliques différents, le diamètre de C_n tend vers 0;

(γ) C étant un élément cyclique et K un ensemble connexe, le produit KC est connexe;

(δ) si les continus V et W sont sommes d'éléments cycliques (de l'espace), leur produit VW est également un continu et une somme d'éléments cycliques.

1. Pour prouver que les conditions des théorèmes I et II sont *nécessaires*, considérons un élément cyclique C, une région (vide ou non) R relative à C et une décomposition $C - R = K + L$ en deux continus.

Désignons par R_1 et K_1 resp. la somme de toutes les composantes S de $1 - C$ telles que $F(S) \subset R$ ou bien $F(S) \subset K$ resp. Désignons enfin par L_1 la somme de toutes les composantes S qui n'entrent ni dans R_1 ni dans K_1; dans ce dernier cas, on a, selon (α), $F(S) \subset L$. Il vient

$$R + R_1 = 1 - (K + K_1 + L + L_1). \tag{1}$$

Je dis que les ensembles $K + K_1$ et $L + L_1$ sont des continus et que $R + R_1$ est une région.

En effet, par définition de K_1, on a $F(K_1) \subset K$ [1]) donc $K + K_1$ est fermé. Il en est de même de $L + L_1$. On en conclut, selon (1), que $R + R_1$ est un ensemble ouvert. D'autre part, les ensembles $R + R_1$. $K + K_1$ et $L + L_1$ sont formés d'ensembles connexes de façon que chacun d'eux est connexe. Notre assertion est ainsi établie.

Or, si l'on suppose que 1 est un espace de Janiszewski, on conclut de (1) que le produit $(K + K_1) \cdot (L + L_1)$ est un continu. Ce produit étant, par définition de K_1 et L_1, égal à KL, cela veut dire que C jouit de la propriété de Janiszewski.

D'autre part, si l'on pose $R = 0$, on conclut que l'uni-cohérence de 1 entraîne celle de C.

2. Supposons, à présent, que R soit une région (relative à l'espace entier) et que K et L soient deux continus tels que

$$1 - R = K + L \tag{2}$$

[1]) Je m'appuie sur l'inclusion $F(\sum_x S_x) \subset \overline{\sum_x F(S_x)}$, qui a lieu dans chaque espace Péanien (et même dans chaque espace localement connexe) Voir F. Hausdorff *Mengenlehre* p. 155, Berlin 1927.

$$KL = M + N, \quad M \text{ et } N \text{ fermés}, \tag{3}$$

$$M \neq 0 \neq N, \quad MN = 0. \tag{4}$$

Pour prouver la *suffisance* des conditions des théor. I et II, il suffit donc d'établir l'existence d'un élément cyclique C tel que

$$CM \neq 0 \neq CN$$

puisque, selon (2) et (3):

$$C - CR = CK + CL \quad \text{et} \quad (CK)(CL) = CM + CN$$

et, selon (γ), CR est une région relative à C et CK et CL sont des continus.

Désignons par A et B resp. la somme de tous les éléments cycliques C tels que $CM \neq 0$ ou bien $CN \neq 0$ resp. C_1 et C_2 étant deux éléments cycliques différents tels que $C_1 C_2 \neq 0$, $C_1 C_2$ est un point p qui coupe l'espace entre $C_1 - C_2$ et $C_2 - C_1$. Parsuite, si $C_1 M \neq 0 \neq C_2 N$, on a $p \epsilon KL = M + N$, donc $p \epsilon M$ ou $p \epsilon N$, d'où $C_2 M \neq 0$ ou $C_1 N \neq 0$. Il s'agit donc de prouver que

$$AB \neq 0 \tag{5}$$

Désignons par V et W resp. la somme de tous les éléments cycliques C tels que $CK \neq 0$ ou bien $CL \neq 0$ resp. D'après (β), V et W sont des continus et, d'après (δ), VW est un continu.

En raisonnant comme tout-à-l'heure, on prouve que VW se compose de tous les éléments cycliques C tels que

$$CK \neq 0 \neq CL. \tag{6}$$

Or, $K + L$ étant un continu (puisque selon (3) et (4): $KL \neq 0$), on conclut de (γ) qu'il en est de même de $C(K + L)$, donc que (en raison de (6)): $CKL \neq 0$, ou encore que $C(M + N) \neq 0$. Autrement dit:

$$VW = A + B.$$

VW étant un continu et A et B étant des ensembles fermés (selon (β)), cette dernière identité entraîne la formule (5).

Corollaire 1. *Pour qu'un espace Péanien soit un espace de Janiszewski, il faut et il suffit que chacun de ses éléments cycliques soit homéomorphe à la surface de la sphère ou bien se réduise à un point individuel.*

En effet, chaque élément cyclique C est un continu Péanien qui n'est coupé par aucun de ses points. En outre, dans le cas d'espace de Janiszewski, C est aussi (en vertu du théor. II) un espace de Janiszewski. C est donc homéomorphe à la surface sphérique ou bien se réduit à un seul point [1]).

On en conclut aussitôt que, si un continu Péanien situé sur le plan jouit de la propriété de Janiszewski, tous ses éléments cycliques se réduisent à des points individuels; ce continu est donc une dendrite (c. à d. ne contient aucune courbe simple fermée).

On parvient ainsi au

Corollaire 2. *Pour qu'un continu Péanien situé sur le plan jouisse de la propriété de Janiszewski il faut et il suffit qu'il soit une dendrite.*

2. Théorème III. *Si l'espace Péanien n'est pas une dendrite, sa dimension (au sens de Menger-Urysohn) est le maximum des dimensions des éléments cycliques* [2]).

Démonstration. Soit n le maximum des dimensions des éléments cycliques. On peut supposer que n est un nombre fini $\geqslant 1$.

L'espace se compose de trois ensembles A, B et C, où $A =$ la somme d'éléments cycliques qui ne se réduisent pas à des points individuels, $B =$ l'ensemble des points qui coupent l'espace, $C =$ l'ensemble des points d'arrêt.

L'ensemble A étant composé d'une suite finie ou dénombrable [3]) d'éléments cycliques, dont la dimension est, par hypothèse $\leqslant n$, il vient [4]): $\dim A \leqslant n$.

L'ensemble B est un F_σ [5]), c'est-à-dire qu'il se compose d'une suite finie ou dénombrable d'ensembles fermés $F_1, F_2, \dots, F_i, \dots$ De

[1]) Car selon le théorème p. 313 de ma note citée, un espace de Janiszewski qui n'est coupé par aucun de ses points est homéomorphe à la surface sphérique (ou se réduit à un point).

[2]) On pourrait préciser ce théorème de façon à obtenir une relation analogue entre la dimension de l'espace *au point p* et la dimension des éléments cycliques en ce point.

[3]) Cf. Whyburn *Cyclicly...*, théor. 6.

[4]) en vertu du théorème suivant: F_i étant fermé et $\dim F_i \leqslant n$, on a $\dim(F_1+F_2+\dots+F_i+\dots) \leqslant n$. Voir K. Menger *Dimensionstheorie*, Leipzig 1928, p. 93 („Summensatz").

[5]) K. Zarankiewicz, Fund. Math. IX, p. 163, théor. 17.

plus, F_i ne contient comme sous continus que des dendrites [1]); on a donc [2]) $\dim F_i \leqslant 1$, d'où $\dim B \leqslant 1$ et $\dim (A+B) \leqslant n$.

L'espace étant en chaque point d'arrêt de dimension 1, on a [3]): $\dim(A+B+C) = \dim(A+B)$. Autrement dit, la dimension de l'espace est $\leqslant n$, d'où on conclut aussitôt, qu'elle est égale à n.

Le théorème III et le corollaire 1 du théor. II impliquent le

Corollaire. *Un espace de Janiszewski a toujours la dimension $\leqslant 2$.*

3. Etant donnée une fonction continue $y = f(x)$ qui transforme un espace métrique compact A en un espace H, on appelle *décomposition semi-continue* la décomposition de A en ensembles $\underset{x}{E}[f(x)=y_0]$ où y_0 parcourt l'ensemble H; l'ensemble H est „l'hyper-espace" de la décomposition.

Supposons que les ensembles $\underset{x}{E}[f(x) = y_0]$ soient des continus.

On prouve alors que, si A est un espace de Janiszewski, H l'est également [4]). La surface sphérique étant un espace de Janiszewski, on conclut du corollaire 1 du N1 que *si l'on décompose la surface sphérique en sous-continus de façon semi-continue, l'hyper-espace de cette décomposition admet comme éléments cycliques soit des surfaces homéomorphes à la surface sphérique soit des points individuels* [5]); *cet hyper-espace est de dimension* $\leqslant 2$ [6]), comme on voit aussitôt, en appliquant le corollaire du N2.

De là résulte que, *si un ensemble fermé et borné situé sur le plan, est décomposé en sous-continus de façon semi-continue, l'hyper-espace a la dimension* $\leqslant 2$ [7]).

[1]) ibid. théor. 18, p. 165.

[2]) car tout ensemble fermé de dimension k contient un sous-continu de la même dimension. Tumarkin, Proceedings Amsterdam 28, p. 1001.

[3]) car les points où l'espace est de dimension $\geqslant n$ constituent un ensemble de dimension $\geqslant n$ (cf. Menger, l. c., p. 128).

[4]) voir ma note *Sur les décompositions semi-continues d'espaces métriques compacts*, Fund. Math. XI et ma note de Fund. Math. XIII, p. 318.

[5]) Dans Monatsh. f. Math. u. Phys. XXXVI (1929) M. R. L. Moore prouve ce théorème ainsi que le théorème inverse; il y a ainsi équivalence entre la notion d'espace de Janiszewski et d'hyper-espace de décomposition semi-continue d'une surface sphérique en sous-continus.

[6]) cette dernière proposition fut trouvée aussi (mais non publiée encore) par M. Hurewicz.

[7]) Cette proposition ne se laisse pas étendre à l'espace à 3 dimensions: M. Hurewicz a construit dans cet espace une courbe que l'on peut décomposer en sous-continus de façon que l'hyper-espace soit de dimension infinie.

En effet, imaginons l'ensemble A transféré sur la surface sphérique et considérons comme tranches de la décomposition de cette surface, outre les tranches de la décomposition de A, les points individuels qui n'appartiennent pas à A. L'hyper-espace de cette décomposition étant, comme nous venons de prouver, de dimension $\leqslant 2$, il en est de même de H ($=$ hyper-espace de la décomposition de A), puisque H en est un sous-ensemble.

Sur les diverses classes d'ensembles.

Par

Otton Nikodym (Cracovie).

Le but du présent travail est de compléter dans une certaine direction les résultats contenus dans le joli travail de M. W. Sierpiński: *Sur l'existence de diverses classes d'ensembles* [1]).

M. Sierpiński y a développé une méthode très générale et élégante permettant de démontrer l'„existence" le diverses classes d'ensembles. Elle est basée sur la conception de l'ensemble universel [2]) appartenant à une classe donnée d'ensembles. Si l'on sait qu'une classe B admet un ensemble universel on en peut déduire [3]) l'existence d'un ensemble n'appartenant pas à B.

Ce principe permet de démontrer l'existence des ensembles „spécifiques" appartenant aux diverses classes que l'on obtient en partant d'une classe donnée d'ensembles et en leurs appliquant successivement — suivant un principe, donné d'avance — des opérations élémentaires comme celle de la somme, du produit, de la soustraction et de l'opération $(\mathcal{A})$ [4]). P. ex. on peut démontrer ainsi

[1]) ce volume (XIV) p. 82—91. (achevé en 1925).

[2]) de M. N. Lusin (*Fund. Math.* t. X. p. 79) et de M. Sierpiński. (*Fund. Math.* t. VII. p. 201), voir aussi l. c. [1]) p. 82 et 83.

[3]) l. c. p. 83.

[4]) En ce qui concerne l'opération $(\mathcal{A})$, voir:

N. Lusin et W: Sierpiński. *Sur quelques propriétés des ensembles* $(\mathcal{A})$. Bull. de l'Acad des Sc. de Cracovie 1918, Série $\mathcal{A}$. p. 47.

On dit que l'ensemble e est le résultat de *l'opération* $(\mathcal{A})$ effectuée sur le *système déterminant*

$$\{e_{i_1,\ldots,i_k}\},\quad (i_1,\ldots,i_k=1,2,\ldots),\quad (k=1,2,\ldots) \tag{1}$$

si

$$e=\sum_{i_1,i_2,\ldots} e_{i_1}\cdot e_{i_1,i_2}\cdot e_{i_1,i_2,i_3}\cdots$$

L'ensemble e s'appelle le *noyau* du système déterminant (1).