Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n-dimensionale Simplexe.

Von

B. Knaster, C. Kuratowski und S. Mazurkiewicz (Lwów).

Der Zweck dieser Mitteilung ist, einen kurzen Beweis des folgenden Brouwer'schen Fixpunktsatzes zu geben:

Bei jeder stetigen Abbildung eines n-dimensionalen Simplex auf seine (eigentliche oder uneigentliche) Teilmenge gibt es mindestens einen durch die betreffende Abbildung in sich selbst übergehenden Punkt.

Wir beweisen zuerst einen Hilfssatz, welcher wohl den kombinatorischen Kern eines von E. Sperner[1]) neuerlich gebrachten eleganten Beweises für die Invarianz der Dimensionszahl darstellt; daraus leiten wir ferner einen kombinatorisch-topologischen Satz her, aus welchem sich direkt einerseits der erwähnte Fixpunktsatz, andernseits die Grundprämisse der Sperner'schen Beweisführung (mit deren Folgerungen) ergibt.

§ 1.

Wir betrachten einen n-dimensionalen Simplex S mit Eckpunkten $p_0, p_1, \ldots, p_n$; dessen k-dimensionale $(0 \leqslant k \leqslant n)$ Seite mit Eckpunkten $p_{i_0}, p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}$ im Allgemeinen mit $p_{i_0} p_{i_1} \ldots p_{i_k}$ bezeichnet wird.

Hilfssatz. *Sei der Simplex S in Teilsimplizes simplizial*[2]) *zerlegt und jedem Eckpunkte e dieser Teilsimplizes eine Zahl $\nu(e)$ derart zugeordnet, dass folgende Bedingung erfüllt ist:*

(1) *liegt e auf einer k-dimensionalen Seite $p_{i_0} p_{i_1} \ldots p_{i_k}$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$, so ist $\nu(e)$ eine der Zahlen: $i_0, i_1, \ldots, i_k$*[3]).

[1]) Abh. Math. Seminar Hamburg, VI (1928), SS. 265—272.

[2]) d. h. in endlich viele Simplizes derselben Dimension, die zu je zwei als Durchschnitt entweder die leere Menge, oder eine k-dimensionale Seite der beiden haben.

[3]) Ist also e ein Eckpunkt p_i von S, so muss $\nu(e) = i$ sein; liegt e auf der Kante $p_i p_j$ von S, so gilt entweder $\nu(e) = i$ oder $\nu(e) = j$, usw.; gehört schliesslich e keiner Seite von S an, so ist $\nu(e)$ irgend eine der Zahlen $0, 1, \ldots, n$.

Behauptung: Unter den Teilsimplizes der gegebenen Zerlegung gibt es mindestens einen, dessen Eckpunkten sämtliche Zahlen $0, 1, \ldots, n$ durch die Funktion $\nu(e)$ zugeordnet sind, und zwar tritt eine ungerade Anzahl solcher „repräsentativen" Teilsimplizes auf[4]).

Beweis[5]): Da die Behauptung im Falle $n = 0$ trivial ist, genügt es dieselbe für n zu beweisen unter der Voraussetzung ihrer Gültigkeit für $n - 1$.

Wir wollen den in der Behauptung angenommenen Sinn des Ausdruckes *„repräsentative Teilsimplizes"* weiter behalten und nennen ebenfalls eine Seite irgend eines (nicht nur eines „repräsentativen") Teilsimplex „repräsentative Seite" oder kurz „r-Seite", wenn die Funktion $\nu(e)$ den Eckpunkten derselben sämtliche Zahlen $0, 1, \ldots, n-1$ zuordnet. Ferner setzen wir:

$\varrho =$ Anzahl der repräsentativen Teilsimplizes

$\sigma =$ Anzahl der auf der Begrenzung von S liegenden r-Seiten

$\alpha(T) =$ Anzahl der r-Seiten eines Teilsimplex T

und beweisen zuerst, dass

$$\varrho \equiv \sigma \pmod{2}. \tag{2}$$

Es ist in der Tat unmittelbar ersichtlich, dass wenn ein Teilsimplex T repräsentativ ist, $\alpha(T) = 1$ sein muss; ist dagegen T nicht repräsentativ, so haben wir entweder $\alpha(T) = 0$ oder $\alpha(T) = 2$, je nachdem eine der Zahlen $0, 1, \ldots, n-1$ an den Eckpunkten von T fehlt oder nicht fehlt. Es folgt daraus, dass

$$\varrho \equiv \Sigma\, \alpha(T) \pmod{2}, \tag{3}$$

wobei sich die Summierung auf sämtliche Teilsimplizes T der Zerlegung bezieht. Wegen der Voraussetzung, dass diese Zerlegung simplizial ist, kommt aber während der Summierung jede r-Seite ein- oder zweimal vor, je nachdem sie auf der Begrenzung von S liegt oder nicht; es gilt infolgedessen $\sigma \equiv \Sigma\, \alpha(T) \pmod{2}$ und demnach wegen (3) ist die Kongruenz (2) bewiesen.

Betrachten wir nun irgend eine von der Seite $p_0 p_1 \ldots p_{n-1}$ verschiedene $(n-1)$-dimensionale Seite Z von S, so fehlt offenbar unter

[4]) Für unsere weitere Betrachtungen ist nur der erste Teil dieser Behauptung von Bedeutung.

[5]) Der Gedankengang dieses Beweises ist mit dem Sperner'schen (a. a. O. § 3) fast identisch.

den Eckpunkten von Z einer der Punkte p_i, wo $0 \leqslant i \leqslant n-1$; nach (1) enthält also Z keinen Punkt e, für welchen $\nu(e)=i$ ist, und folglich keine r-Seite. Mit anderen Worten: sämtliche auf der Begrenzung von S liegenden r-Seiten sind in der Seite $p_0 p_1 \ldots p_{n-1}$ von S enthalten; so dass σ die Anzahl der in dieser Seite liegenden r-Seiten bezeichnet. Da die letzteren offenbar die Gesamtheit aller „repräsentativen" Teilsimplizes der simplizialen Zerlegung des $(n-1)$-dimensionalen Simplex $p_0 p_1 \ldots p_{n-1}$ bilden, so folgt es aus der für $n-1$ angenommenen Gültigkeit des Hilfssatzes, dass σ und, wegen (2), dass ϱ eine ungerade Zahl ist, w. z. b. w.

§ 2.

Satz. *Sind abgeschlossene Mengen* $A_0, A_1, \ldots, A_n$ *gegeben derart, dass jeder* k*-dimensionale* $(0 \leqslant k \leqslant n)$ *Simplex* $p_{i_0} p_{i_1} \ldots p_{i_k}$ *in der Summe* $A_{i_0}+A_{i_1}+\ldots+A_{i_k}$ *enthalten ist, so gilt* $A_0 \cdot A_1 \cdot \ldots \cdot A_n \neq 0$.

Beweis: Es sei für ein festes $m>0$ eine simpliziale Zerlegung von S in Teilsimplizes vom Durchmesser $<1/m$ gegeben. Sei ferner e ein beliebiger Eckpunkt irgend eines Teilsimplex und $p_{i_0} p_{i_1} \ldots p_{i_k}$ der niedrigst-dimensionale, den Punkt e enthaltende, Simplex (d. h. der gemeinsame Teil derjenigen den Punkt e enthaltenden Simplizes, derer Eckpunkte der Folge $p_0, p_1, \ldots, p_n$ angehören).

Da laut Voraussetzung der Simplex $p_{i_0} p_{i_1} \ldots p_{i_k}$ in der Summe $A_{i_0}+A_{i_1}+\ldots+A_{i_k}$ liegt, so gibt es (mindestens) einen Index i_j $(0 \leqslant j \leqslant k)$, für welchen

(4) $$e \,\varepsilon\, A_{i_j}$$

gilt. Setzen wir nun

(5) $$\nu(e)=i_j,$$

so ist die Voraussetzung (1) des Hilfssatzes erfüllt. Andernseits ergibt sich aus (4) und (5):

(6) $$e \,\varepsilon\, A_{\nu(e)}.$$

Dem Hilfssatze zufolge gibt es einen repräsentativen Teilsimplex, welchen wir also mit $e_0^m e_1^m \ldots e_n^m$ bezeichnen können, indem wir $\nu(e_i^m)=i$ setzen. Daraus erhalten wir wegen (6):

(7) $$e_i^m \,\varepsilon\, A_i.$$

Lassen wir nun m ins Unendliche wachsen. Wir dürfen annehmen, dass die Folge e_0^m $(m=1,2,\ldots)$ eine konvergente ist, da dieselbe nötigenfalls bloss durch eine ihrer konvergenten Teilfolgen zu ersetzen wäre. Sei $a=\lim\limits_{m=\infty} e_0^m$. Infolge des mit wachsendem m gegen 0 konvergierenden Durchmessers der Teilsimplizes gilt dann

(8) $$a=\lim_{m=\infty} e_i^m \quad \text{für jedes } i=0,1,\ldots,n.$$

Wegen der vorausgesetzten Abgeschlossenheit der Mengen A_i ergeben die Formeln (7) und (8) unmittelbar: $a \,\varepsilon\, A_0 \cdot A_1 \cdot \ldots \cdot A_n$, w. z. b. w.

§ 3.

Beweis des Fixpunktsatzes. Wir denken uns die Punkte x von S in der Form

$$x=c_0 p_0+c_1 p_1+\ldots+c_n p_n$$

baryzentrisch dargestellt, wobei also $c_i \geqslant 0$, $c_0+c_1+\ldots+c_n=1$ und die Eckpunkte p_i von S als Vektoren des n-dimensionalen Raumes aufzufassen sind [6]).

Es sei ferner eine stetige Abbildung des Simplex S auf seine Teilmenge S' gegeben, welche dem Punkte x einen Punkt

$$x'=c_0' p_0+c_1' p_1+\ldots+c_n' p_n$$

zuordnet. Wir setzen: A_i = Menge derjenigen Punkte x von S, für welche $c_i' \leqslant c_i$ ist, und zeigen, dass die so definierten Mengen $A_0, A_1, \ldots, A_n$, die wegen der Stetigkeit der Abbildung abgeschlossen sind, der Voraussetzung des Satzes aus § 2 genügen.

Wäre in der Tat ein Punkt x eines k-dimensionalen Simplex $p_{i_0} p_{i_1} \ldots p_{i_k}$ in keiner der Mengen $A_{i_0}, A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$ enthalten, so würde

$$c_{i_0}'>c_{i_0},\quad c_{i_1}'>c_{i_1},\ldots,\quad c_{i_k}'>c_{i_k}$$

und somit

$$c_{i_0}'+c_{i_1}'+\ldots+c_{i_k}'>c_{i_0}+c_{i_1}+\ldots+c_{i_k},$$

was unmöglich ist, weil die links stehende Koordinatensumme nach Definition der baryzentrischen Koordinaten nicht grösser als 1 sein kann, während die rechts stehende, gemäss der Lage von x auf der Seite $p_{i_0} p_{i_1} \ldots p_{i_k}$, gleich 1 sein muss.

[6]) Bekanntlich ist diese Darstellung — etwa Verteilung dem Schwerpunkt x entsprechender Massen $c_0, c_1, \ldots, c_n$ an Eckpunkten (baryzentrische Koordinaten) — eine in bezug auf x eindeutige und stetige.

Sei also a ein dem Satze aus § 2 zufolge existierender Punkt von $A_0 \cdot A_1 \cdot \ldots \cdot A_n$. Laut Definition von A_i haben wir für $x = a$:

$$c'_0 \leqslant c_0, \quad c'_1 \leqslant c_1, \ldots, \quad c'_n \leqslant c_n,$$

also

$$1 = c'_0 + c'_1 + \ldots + c'_n \leqslant c_0 + c_1 + \ldots + c_n = 1,$$

woraus: $c'_i = c_i$ und somit $a' = a$, w. z. b. w.

Man verifiziert leicht, dass wir gleichzeitig den Fixpunktsatz in folgender, verschärfter Fassung [7]) bewiesen haben:

Wird ein n-dimensionaler Simplex S auf eine Teilmenge des S enthaltenden n-dimensionalen Euklidischen Raumes derart stetig abgebildet, dass die Begrenzung von S in eine Teilmenge von S übergeführt wird, so besitzt die Abbildung einen Fixpunkt.

In der Tat, können die Bezeichnungen für x und x' beibehalten werden, mit dem Unterschied, dass die Ungleichung, $c'_i \geqslant 0$ nicht mehr allgemein zu gelten braucht. Diese Ungleichung, gemäss unserer Voraussetzungen, besteht jedoch falls x der Seite $p_0 \ldots p_{i-1}\, p_{i+1} \ldots p_n$ angehört. Es ist daher, wenn x in einem beliebigen Simplex $p_{i_0} p_{i_1} \ldots p_{i_k}$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$ enthalten ist, stets: $c'_{i_0} + c'_{i_1} + \ldots + c'_{i_k} \leqslant 1$ und der Beweis bleibt unverändert.

§ 4.

Bemerkungen. 1. Es ist zu bemerken, dass der Satz aus § 2 nebenbei den folgenden Korollar ergibt, auf welchen sich der Sperner'sche Beweis der Invarianz der Dimensionszahl reduziert:

Korollar. Ist S in abgeschlossene Mengen $A_0, A_1, \ldots, A_n$ *zerlegt und zwar derart, dass für jedes j die Menge* A_j *mit der Seite*

$$p_0\, p_1 \cdots p_{j-1}\, p_{j+1} \cdots p_n$$

von S punktfremd ist, so gilt: $A_0 \cdot A_1 \cdot \ldots \cdot A_n \neq 0$.

In der Tat, impliziert die Voraussetzung des Korollars die des Satzes aus § 2: wäre nämlich ein Punkt x des Simplex $p_{i_0} p_{i_1} \ldots p_{i_k}$ in keiner der Mengen $A_{i_0}, A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$ enthalten, so müsste x in einer Menge A_j liegen, wo $j \neq i_0$, $j \neq i_1, \ldots, j \neq i_k$. Demzufolge enthielte die Seite $p_0\, p_1 \ldots p_{j-1}\, p_{j+1} \ldots p_n$ den Simplex $p_{i_0} p_{i_1} \ldots p_{i_k}$ und folglich seinen Punkt x, gegen die Voraussetzung, dass dieselbe mit A_j punktfremd ist.

[7]) Für $n = 2$ bewiesen von R. Wavre und A. Bruttin, Comptes Rendus 183 (1926), S. 843—845. Die daselbst für Vectoren-Felder angegebene Formulierung lässt sich auch auf Grund unseres Beweises auf n-dim. Simplexe ausdehnen.
Für weitere Verallgemeinerungen s. G. Feigl, Math. Ann. 98 (1928).

2. Beim Beweise der Invarianz der Dimension, kann bekanntlich als Ausgangspunkt, anstatt der Simplexzerlegung, auch — nach dem Vorgang von Lebesgue — die Würfelzerlegung dienen, indem man sich etwa auf den folgenden Satz stützt:

Werden mit H_i, *bezw.* H^i, $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *die gegenüberliegenden Seiten* $x_i = 0$, *bezw.* $x_i = 1$, *des n-dimensionalen Einheitswürfels W bezeichnet und wird W in* $(n+1)$ *abgeschlossene Mengen* $B_0, B_1, \ldots, B_n$ *zerlegt, wobei*

$$B_{i-1} \cdot H^i = 0 \quad \text{und} \quad B_k H_i = 0 \quad (i \leqslant k \leqslant n),$$

so gilt: $B_0 \cdot B_1 \cdot \ldots \cdot B_n \neq 0$ [8]).

Abgesehen von Invarianz der Dimensionszahl — die sich übrigens für den Würfel aus der für den Simplex bewiesenen sofort durch Homöomorphie ergibt — hat obige Formulierung eine selbständige Bedeutung (sie wurde beispielsweise in der Topologie des Hilbert'schen Raumes von Hurewicz angewendet [9])). Nun lässt sich dieselbe auch aus dem vorangehenden Korollar durch folgende stetige Transformation des Würfels W in den Simplex S herleiten: dem Punkte $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ von W wird der Punkt von S mit baryzentrischen Koordinaten

$$c_0 = 1 - x_1, \; c_1 = (1 - x_2)\, x_1, \; \ldots, \; c_{n-1} = (1 - x_n)\, x_1 x_2 \ldots x_{n-1},$$
$$c_n = x_1 x_2 \ldots x_n$$

zugeordnet.

Bezeichnen wir mit A_i die Menge, in welche B_i dadurch übergeht, so sieht man leicht, dass die Voraussetzung der Korollars erfüllt ist. Infolgedessen ist die Durchschnittsmenge $A_0 \cdot A_1 \cdot \ldots \cdot A_n$ nicht leer. Da aber diese Menge, gemäss derselben Voraussetzung, *im Innern von S* liegen muss, und sich die inneren Punkte von S und von W *ein-eindeutig* durch obige Transformation entsprechen, so ist auch $B_0 \cdot B_1 \cdot \ldots \cdot B_n \neq 0$.

[8]) Diese Formulierung stammt von Hurewicz, Math. Ann. 101 (1929) und Proceed. Amsterdam 31 (1928), S. 917, Fussnote [4]). Vgl. Lebesgue Fund. Math. II.
[9]) Proceed. Amsterdam, l. cit.

Lwów, 22 Mai 1929.