Or, le problème se pose: existe-t-il deux ensembles linéaires P_1 et P_2, tels que $dP_1 \neq dP_2$ et que l'inégalité

$$dP_1 < dH$$

entraîne (pour tout ensemble linéaire H) l'inégalité

$$dP_2 < dH,$$

et inversement.

Et, si c'est le cas, existe-t-il deux ensembles P_1 et P_2, tels que $dP_1 \neq dP_2$ et que les inégalités

$$dE < dP_1 < dH \quad \text{et} \quad dE < dP_2 < dH$$

soient équivalentes? [1]).

Voici encore un problème important non résolu:

Peut-on démontrer (sans utiliser l'hypothèse du continu) *que, des deux ensembles linéaires, celui dont la puissance est supériere a toujours le type de dimensions supérieur?* En d'autres termes, l'inégalité $\overline{\overline{E}} < \overline{\overline{H}}$ entraîne-t-elle toujours l'inégalité $dE < dH$?

[1]) Cf. *Fund. Math.*, t. XIII, p. 120; cf. aussi M. Fréchet, l. c., p. 31, note (¹).

Sur une généralisation du problème de la mesure.

Par

Stefan Banach et Casimir Kuratowski (Lwów).

M. Lebesgue a appelé *problème de la mesure* [1]) le problème suivant: définir une fonction $m(X)$ qui fasse correspondre à chaque ensemble X situé dans l'intervalle $E = 01$ un nombre réel $m(X) \geqslant 0$ de façon que:

I. Si X_1 et X_2 sont superposables, $m(X_1) = m(X_2)$.

II. $X_1, X_2, \dots$ étant une suite finie ou infinie d'ensembles disjoints, on a: $m(X_1 + X_2 + \dots) = m(X_1) + m(X_2) + \dots$

III. $m(E) = 1$.

M. Vitali (en 1905) a prouvé que ce problème *n'admet pas de solution*.

Or, on peut chercher à résoudre ce problème, en imposant à la fonction $m(X)$ des conditions moins restrictives [2]). Dans cette note nous allons prouver, en admettant l'hypothèse du continu, que le problème *plus général* [3]) qui s'obtient de celui de la mesure en omettant la condition I et en y ajoutant la condition, que pour X composé d'un seul point $m(X) = 0$ (condition qui résulte évidemment de I et II), — *ne possède nonplus de solution*; nous allons

[1]) *Leçons sur l'intégration* (Coll. Borel), I-re éd. 1904, II-me 1928, p. 110.

[2]) Ainsi, si l'on remplace l'additivité complète (énoncée dans la cond. II) par l'additivité finie, le problème de mesure admet une solution (voir S. Banach, Fund. Math. IV); et cela reste encore vrai dans le cas où E est un carré, tandisqu'il n'en est rien, si E est un cube (voir F. Hausdorff: *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, p. 469 et, dans le même ordre d'idées: S. Banach et Tarski, Fund. Math. VI et J. v. Neumann, Fund. Math. XIII).

[3]) Ce problème fut posé par M. Banach, qui l'a réduit aussi au théor. II. La démonstration du théor. II a été trouvée par les deux auteurs indépendamment et simultanément.

nous débarrasser, en même temps, de la condition peu essentielle que $m(X)$ soit non-négatif. Nous parviendrons ainsi à la généralisation suivante [1]) du résultat cité de M. Vitali:

Théorème I. *Il n'existe aucune fonction $m(X)$ qui fasse correspondre à chaque ensemble $X \subset E$ un nombre réel $m(X)$ de façon que*

1) *pour X composé d'un seul élément, $m(X) = 0$,*
2) *$m(X)$ est complètement additive (= cond. II),*
3) *$m(X)$ n'est pas identiquement 0.*

1. Nous allons prouver, au préalable, que le théor. I résulte du suivant

Théorème II. *Il existe une double suite d'ensembles A_k^i telle que* 1°:

$$\begin{array}{l} E = A_1^1 + A_2^1 + \ldots + A_k^1 + \ldots \\ E = A_1^2 + A_2^2 + \ldots + A_k^2 + \ldots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ E = A_1^i + A_2^i + \ldots + A_k^i + \ldots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

2°: *les ensembles d'une même ligne sont disjoints,* 3°: *quelle que soit la suite d'entiers positifs $k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots$, le produit $\prod_{i=1}^{\infty}(A_1^i + A_2^i + \ldots + A_{k_i}^i)$ est au plus dénombrable.*

Supposons, en effet, qu'il existe une fonction $m(X)$ satisfaisant aux conditions du théor. I. Nous en conclurons que le théor. II est en défaut.

On peut admettre que $m(E) \neq 0$. Car, selon (3), il existe un ensemble $E_1 \subset E$ tel que $m(E_1) \neq 0$. Donc, si $m(E) = 0$, on a, conformément à (2): $m(E - E_1) \neq 0$. L'un des deux ensembles E_1 ou $E - E_1$ (soit E_1) a la puissance du continu. Or, la fonction $m(X)$ étant assujettie aux conditions (1)—(3) pour $X \subset E_1$, on en conclut aussitôt (en s'appuyant sur le fait que E et E_1 ont même puissance) qu'il existe une fonction assujettie aux mêmes conditions pour tout $X \subset E$ et ne s'annulant pas pour $X = E$.

Soit donc $m(E) = a \neq 0$. Considérons une double suite A_k^i satisfaisant aux conditions 1° et 2°. Il s'agit de prouver que la condition 3° est en défaut.

[1]) Comme on voit, le fait que le problème de mesure ne possède pas de solution n'est pas de caractère géométrique (comme on pourrait le croire, en tenant compte de la cond. I), mais c'est un fait de la Théorie des ensembles. Quant à l'ensemble E, on peut évidemment supposer, dans la suite, que c'est un ensemble arbitraire de la puissance du continu (non nécessairement un intervalle).

On a, en vertu de (2):

$$m(E) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k^1).$$

Il existe, par conséquent, un indice k_1 tel que

$$\left|\sum_{k=k_1+1}^{\infty} m(A_k^1)\right| \leqslant \frac{|a|}{4}.$$

donc, en désignant par R^1 la somme $A_{k_1+1}^1 + A_{k_1+2}^1 + \ldots$, il vient: $|m(R^1)| \leqslant \frac{|a|}{4}$.

En général, il existe une suite d'entiers $k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots$ tels qu'en désignant $R^i = A_{k_i+1}^i + A_{k_i+2}^i + \ldots$, on a

$$|m(R^i - R^1 - R^2 - \ldots - R^{i-1})| \leqslant \frac{|a|}{2^{i+1}},$$

puisque la décomposition évidente

$$E - R^1 - R^2 - \ldots - R^{i-1} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^i - R^1 - R^2 - \ldots - R^{i-1}$$

entraîne

$$m(E - R^1 - R^2 - \ldots - R^{i-1}) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k^i - R^1 - R^2 - \ldots - R^{i-1}),$$

donc pour k_i suffisamment grand:

$$\left|\sum_{k=k_i+1}^{\infty} m(A_k^i - R^1 - R^2 - \ldots - R^{i-1})\right| \leqslant \frac{|a|}{2^{i+1}}.$$

On parvient ainsi à la conclusion que

$$\left|m\left(\sum_{i=1}^{\infty} R^i\right)\right| = \left|m\left(\sum_{i=1}^{\infty} R^i - R^1 - R^2 - \ldots - R^{i-1}\right)\right| =$$
$$= \left|\sum_{i=1}^{\infty} m(R^i - R^1 - R^2 - \ldots - R^{i-1})\right| \leqslant \frac{|a|}{2}$$

et comme

$$E - \sum_{i=1}^{\infty} R^i = \prod_{i=1}^{\infty}(A_1^i + A_2^i + \ldots + A_{k_i}^i),$$

il vient

$$\left| m \left(\prod_{i=1}^{\infty} A_1^i + A_2^i + \ldots + A_{k_i}^i \right) \right| \geqslant \frac{|a|}{2} \neq 0,$$

ce qui prouve que l'ensemble $\prod_{i=1}^{\infty} (A_1^i + A_2^i + \ldots + A_{k_i}^i)$ est indénombrable, puisque, pour tout X fini ou dénombrable, on a conformément à (1) et (2): $m(X) = 0$.

La condition 3° n'est donc pas remplie.

Il est ainsi établi que, dès que le théor. II va être prouvé, le théor. I le sera aussi.

2. *Démonstration du théor. II basée sur l'hypothèse du continu.* Etant données deux suites d'entiers positifs $S = \{k_i\}$ et $T = \{n_i\}$, convenons d'écrire $T \precsim S$, lorsque: $n_i \leqslant k_i$ quel que soit i.

Nous allons prouver que

(II') *il existe une famille $\mathcal{F}$, de la puissance du continu, ayant comme éléments des suites d'entiers positifs et telle que, pour chaque suite S (qu'elle appartienne à $\mathcal{F}$ ou non), l'ensemble des suites T de $\mathcal{F}$ telles que $T \precsim S$ est au plus dénombrable.*

En effet, la famille de toutes les suites infinies d'entiers positifs est, selon l'hypothèse du continu, une famille bien ordonnée:

$$S_0, S_1, \ldots S_\omega, \ldots S_\alpha, \ldots \quad (\alpha < \Omega)$$

Ω désignant le premier nombre transfini de la troisième classe.

Or, on peut faire correspondre à chaque α un nombre ξ_α tel que, pour $\beta < \alpha$, on n'ait jamais $S_{\xi_\alpha} \precsim S_\beta$, ni $S_{\xi_\alpha} = S_{\xi_\beta}$, car, pour chaque famille finie ou dénombrable de suites $T_1, T_2, \ldots T_n, \ldots$, on peut construire (par un procédé classique de diagonale) une suite S telle qu'on n'ait pour aucun n: $S \precsim T_n$.

La famille des suites S_{ξ_α} est donc la famille $\mathcal{F}$ demandée (puisque, pour chaque β, si $S_{\xi_\alpha} \precsim S_\beta$, on a $\alpha \leqslant \beta$; l'ensemble de ces α est parsuite au plus dénombrable). La puissance de $\mathcal{F}$ étant égale à celle de l'ensemble $E =$ l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant 1$, on peut représenter les suites qui lui appartiennent par T_x de sorte que si $x \neq y$, $T_x \neq T_y$. Soit $T_x = n_1^x, n_2^x, \ldots, n_i^x, \ldots$

Nous définissons les ensembles A_k^i du théor. II de la façon suivante:

$$x \text{ \textit{appartient à} } A_k^i \text{ \textit{lorsque} } k = n_i^x.$$

On voit aussitôt que les conditions 1° et 2° du théor. II sont réalisées. Pour prouver qu'il en est de même de 3°, considérons une suite arbitraire $S = k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots$ et soit x un élément de l'ensemble $\prod_{i=1}^{\infty} (A_1^i + A_2^i + \ldots + A_{k_i}^i)$. Il s'agit de démontrer qu'il y en a au plus une infinité dénombrable de ces x.

Pour chaque i, x appartient, par hypothèse, à l'ensemble $A_1^i + A_2^i + \ldots + A_{k_i}^i$. Conformément à la définition de A_k^i, il vient $n_i^x \leqslant k_i$. En d'autres termes: $T_x \precsim S$. Or, cette formule ne peut être remplie, selon la propriété de la famille $\mathcal{F}$ énoncée dans (II'), que pour une infinité au plus dénombrable des x

Ainsi, le théor. II et, par conséquent, le théor. I se trouvent démontrés.

Remarque. Comme nous venons de voir, la proposition (II') entraîne, sans l'aide de l'hypothèse du continu, le théorème II. Nous prouverons, à présent, que l'implication inverse a aussi lieu.

Supposons, en effet, que les ensembles A_k^i satisfont aux théor. II. Soit $\mathcal{F}$ la famille de toutes les suites $n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots$ telles que le produit $\prod_{i=1}^{\infty} A_{n_i}^i$ ne soit pas vide.

La famille $\mathcal{F}$ ainsi définie a la puissance du continu. Car, d'une part, selon la cond. 3° du théor. II, chaque produit $\prod_{i=1}^{\infty} A_{n_i}^i$ est au plus dénombrable et, d'autre part, selon 1°, l'ensemble-somme de tous les produits de ce genre est égal à E, a donc la puissance du continu.

Soit $S = k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots$ une suite arbitraire. L'ensemble $\prod_{i=1}^{\infty} (A_1^i + A_2^i + \ldots + A_{k_i}^i)$ étant, selon 3°, au plus dénombrable, on en conclut que parmi les produits $\prod_{i=1}^{\infty} A_{n_i}^i$, avec $n_i \leqslant k_i$, il n'y en a pas plus qu'une infinité dénombrable qui ne soient pas vides (puisque selon 2°, deux produits de ce genre sont toujours disjoints). Cela veut dire, précisément, que l'ensemble des suites T de la famille $\mathcal{F}$ telles que $T \precsim S$ est au plus dénombrable.

L'équivalence des propositions II et II' se trouve ainsi démontrée.