Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik.

Von

Stanisław Leśniewski (Warszawa).

Bei bibliographischen Berufungen werden unten folgende Abkürzungen gebraucht:

„Ajdukiewicz$_1$“ für „*Przegląd Filozoficzny*. Jahrbuch 29 (für das Jahr 1926). Heft III—IV. 1927. Kazimierz Ajdukiewicz. *Voraussetzungen der traditionellen Logik*“ (polnisch).

„Ajdukiewicz$_2$“ für „*Przegląd Filozoficzny*. Jahrbuch 30. Heft II—III. 1927. Kazimierz Ajdukiewicz. *Berichtigung wichtigerer Irrtümer, die im Artikel u. d. T. „Voraussetzungen der traditionellen Logik“ enthalten sind. „Przegląd Filozoficzny“. Jahrbuch 29. Heft III und IV. Ss. 200—229*“ (polnisch)

„Chwistek$_1$“ für „Leon Chwistek. *The Theory of Constructive Types* (*Principles of Logic and Mathematics*). Part I. *General Principles of Logic. Theory of Classes and Relations*. Extracted from the »*Annales de la Société Mathématique de Pologne*«. Cracow. 1923“.

„Chwistek$_2$“ für „Leon Chwistek. *The Theory of Constructive Types.* (*Principles of Logic and Mathematics*). Part II. *Cardinal Arithmetic*“ (Sonderabdruck aus „*Rocznik Polskiego Tow. Matematycznego. Annales de la Société Polonaise de Mathématique*. Tome III. Année 1924. 1925“).

„Frege$_1$“ für „G. Frege. *Grundgesetze der Arithmetik.* Begriffsschriftlich abgeleitet. Erster Band. Jena. 1893“.

„Frege$_2$“ für „G. Frege. *Grundgesetze der Arithmetik.* Begriffsschriftlich abgeleitet. Zweiter Band. Jena. 1903“.

„Hilbert-Ackermann$_1$“ für „*Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete.* Band XXVII. D. Hilbert und W. Ackermann. *Grundzüge der theoretischen Logik.* Berlin. 1928“.

„Husserl$_1$“ für „Edmund Husserl. *Logische Untersuchungen.* Zweiter Band. *Untersuchungen zur Phänomenologie und Theorie der Erkenntnis.* I. Teil. Zweite, umgearbeitete Auflage. Halle a. d. S., 1913“.

„**Leśniewski**$_1$“ für „*Przegląd Filozoficzny*. Jahrbuch 30. Heft II—III. 1927. **Stanisław Leśniewski**. *Über die Grundlagen der Mathematik*“ (polnisch).

„**Łukasiewicz**$_1$“ für „**Jan Łukasiewicz**. *Zweiwertige Logik*. Sonderabdruck aus dem Gedenkbuch zu Ehren von Prof. Twardowski (*Przegląd Filozoficzny*, J. 23.). Lemberg. 1921“ (polnisch).

„**v. Neumann**$_1$“ für „*Mathematische Zeitschrift*. Sonderabdruck aus Band 26, Heft 1. J. v. **Neumann**. *Zur Hilbertschen Beweistheorie*. Berlin. 1927“.

„**Nicod**$_1$“ für „*Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. Volume XIX. 30 October 1916—24 November 1919. 1920. J. G. P. **Nicod**. *A Reduction in the number of the Primitive Propositions of Logic*. (Communicated by G. H. **Hardy**)“.

„**Peano**$_1$“ für „*Formulaire de Mathématiques*. Tome II-§ 1 [K, ε, Ɔ, ⌢, =, —, ⌣, Λ, Ǝ, ι, ῑ, K‘, ⌣‘, ⌢‘, ɿ, Sim, rcp]. G. **Peano**. *Logique mathématique*. 11-VIII-1897“.

„**Post**$_1$“ für „*American Journal of Mathematics*. Vol. XLIII, nr. 3. July 1921. **Emil L. Post**. *Introduction to a General Theory of Elementary Propositions*“.

„**Russell**$_1$“ für „**Bertrand Russell**. *Introduction to mathematical Philosophy*. London, New York. Second Edition April 1920“.

„**Schröder**$_1$“ für „**Ernst Schröder**. *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (*exakte Logik*). Zweiter Band. Erste Abteilung. Leipzig. 1891“.

„**Sheffer**$_1$“ für „*Transactions of the American Mathematical Society*. Volume 14. Number 4. October 1913. **Henry Maurice Sheffer**. *A set of five independent postulates for Boolean Algebras, with application to logical constants*“.

„**Tarski**$_1$“ für „*Fundamenta Mathematicae*. Band IV. 1923. **Alfred Tajtelbaum**. *Sur le terme primitif de la logistique*“.

„**Tarski**$_2$“ für „**Alfred Tajtelbaum-Tarski**. *Über das primitive Wort der Logistik*. Doktorthese. Sonderabdruck aus „*Przegląd Filozoficzny*“ J. 1923. Warschau — 1923“ (polnisch).

„**Tarski**$_3$“ für „*Fundamenta Mathematicae*. Band V. 1924. **Alfred Tajtelbaum-Tarski**. *Sur les truth-functions au sens de MM. Russell et Whitehead*“.

„**WPI**$_1$“ für „*Przegląd Filozoficzny*. Jahrbuch 24 (1921). Heft III und IV. 1921. *Bericht des Warschauer Philosophischen Instituts für die Zeit vom 1 Juli 1920 bis 25 Juni 1921*“ (polnisch).

„**Whitehead-Russell**$_1$“ für „**Alfred North Whitehead** and **Bertrand Russell**. *Principia mathematica*. Volume I. Second Edition. Cambridge. 1925“.

„**Żyliński**$_1$“ für „*Przegląd Filozoficzny*. Jahrbuch 30 (1927). Heft IV. *Denkbuch des Ersten Polnischen Philosophischen Kongresses. Lemberg, 1923*. **Eustachy Żyliński**. *Über die Darstellbarkeit der einen „truth-functions“ durch andere*“ (polnisch).

„**Żyliński**$_2$“ für „*Fundamenta Mathematicae*. Band VII. 1925. E. **Żyliński**. *Some remarks concerning the theory of deduction*“.

Einleitung.

Im Jahre 1927 begann ich im „*Przegląd Filozoficzny*“ den Druck einer grösseren Arbeit unter dem Titel „*Über die Grundlagen der Mathematik*“ [1]. In der Einleitung zu dieser Arbeit schrieb ich: [2]

„Das Ziel dieser Arbeit ist die Liquidierung einer peinlichen Situation, in welcher ich mich seit einer Reihe von Jahren befinde. Die Situation besteht darin, dass ich ziemlich viel im Drucke nicht veröffentlichte wissenschaftliche Resultate aus verschiedenen Gebieten der Grundlagen der Mathematik besitze, dass die Zahl dieser im Drucke nicht veröffentlichten Resultate immer wächst, und dass diese Resultate, da sie sich miteinander und mit den Resultaten anderer Forscher verflechten, die auf diesem Gebiete arbeiten, immer mehr technisch-redaktionelle Schwierigkeiten, die mit ihrer Vorbereitung zum Drucke verbunden sind, auftürmen.

Indem ich verschiedene Weisen der Bearbeitung der wissenschaftlichen Ergebnisse, zu denen ich gekommen bin, versuchte, bin ich unter anderem zu ihrer Auslegung auf dem Wege der systematisch-kompendiellen Methode herangetreten und habe mir in dieser Beziehung das bekannte Werk von Herren **Whitehead** und **Russell**[1] {[1] Alfred North Whitehead and Bertrand Russell. Principia mathematica. Cambridge. Vol. I. 1910. Vol. II. 1912. Vol. III. 1913. Vol. I. Second edition. 1925.} zum Vorbild genommen. Jedoch verteilt sich eine solche Arbeit wiederum auf eine Reihe von Jahren, und es ist mir schwer näher festzusetzen, wie viel Zeit ich noch brauchen würde, um auf diesem Wege die Gesamtheit der Resultate, zu welchen mich ein schon mehr als zehnjähriges Nachdenken über die Grundlagen der Mathematik geführt hat, einer breiteren Fachdiskussion zu unterwerfen.

Die peinliche Situation kompliziert sich noch durch den Umstand, dass, ähnlich wie ich unter dem Einfluss der Gespräche mit meinen Fachkollegen und im Zusammenhang mit ihren bisher nicht veröffentlichten wissenschaftlichen Ergebnissen einige meiner Anschauungen erarbeitet und einige wissenschaftliche Resultate erworben habe, so auch meine Anschauungen und Bemerkungen, die ich

[1] **Leśniewski**$_1$.

[2] Die Anmerkungen, die selbst zu den zitierten Abschnitten gehören, gebe ich in entsprechend eingerückten Parenthesen „{“, „}“ an.

seit einer Reihe von Jahren vom Universitätskatheder und in zahlreichen wissenschaftlichen Diskussionen formulierte, zum Entstehen einiger Anschauungen und Resultate meiner Fachkollegen beigetragen haben, welche aus vornehmer Loyalität mir gegenüber mit dem Drucken einer Reihe ihrer wissenschaftlichen Ergebnisse bis zu dem Augenblicke zurückhalten, wo meine diesbezüglichen Resultate im Drucke veröffentlicht werden.

Da ich die Herausgabe der Ergebnisse meiner Forschungen aus dem Gebiete der Grundlagen der Mathematik gerne beschleunigen wollte, fühlte ich mich gezwungen, noch einmal meine Weise ans Werk zu gehen zu ändern. Ich habe mich diesmal entschlossen eine Darstellungsmethode anzuwenden, welche man eine autobiographisch-konspektive im Gegensatz zu einer systematisch-kompendiellen Methode nennen könnte. Ich habe beschlossen vorläufig die Mehrzahl der Konsequenzen, welche ich zuvor aus meinen verschiedenen Voraussetzungen *explicite* abzuleiten beabsichtigte, mit Schweigen zu übergehen und mich auf eine möglichst durchsichtige Darstellung der Grundlagen und der Grundkonture der einzelnen Theorien, die ich aufbaue, zu konzentrieren. In meinem Vortrage werde ich mir Mühe geben, dass der Leser sich von der chronologischen Ordnung und der gegenseitigen Abhängigkeit gewisser wissenschaftlicher Tatsachen Rechenschaft geben und sich insbesondere darüber orientieren könne, auf welche bisher im Drucke nicht veröffentlichten Ergebnisse der Forschungen anderer Gelehrten ich diese oder jene meiner Behauptungen oder Konstruktionen gestützt habe.

Das in gewissen Beziehungen sachlich und methodisch neue System der Grundlagen der Mathematik, dessen Grundriss ich in dieser Arbeit darstellen will, umfasst drei deduktive Theorien, deren Vereinigung ich als eines der möglichen Fundamente der Gesamtheit des Systems der mathematischen Wissenschaften betrachte. Diese Theorien sind:

1) die Theorie, die von mir *Protothetik* genannt wird [1] {[1] Früher gebrauchte ich zu ihrer Bezeichnung das Wort „Logistik"; vrgl.: Comptes rendus de séances de la Société des Sciences et de lettres de Varsovie XIX. 1926. Classe III. Adolf Lindenbaum und Alfred Tarski. Mitteilung über Forschungen aus dem Gebiete der Mengenlehre. Vorgelegt von W. Sierpiński. S. 322.} und die in Bezug auf den Inhalt, zwar in sehr groben Umrissen, den Theorien entspricht, die in der Wissenschaft als „*calculus of equivalent statements*" [2] {[2] Vrgl.: Ernst Schröder. Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logik). Erster Band. Leipzig. 1890. S. 161.}, als „*Aussagenkalkul*" [3] {[3] Vrgl.: Schröder. *Op. cit.*. Zweiter Band. Erste Abteilung. Leipzig. 1891. SS. 1—84 und 256—276.}, als „*Theorie der Deduktion*" [4] {[4] Vrgl.: Whitehead und Russell. *Op. cit.*. Volume I. Second edition. SS. 90—126.} in Verbindung mit der „*Theorie der scheinbaren Variablen*" [5] {[5] Vrgl. *l. c.*, SS. 127—186.} u. s. w., bekannt sind;

2) die von mir als *Ontologie* bezeichnete Theorie, die eine modernisierte „traditionelle Logik" gewisser Art bildet und die — was ihren Inhalt und ihre „Mächtigkeit" anbetrifft — am meisten sich dem Schröderschen „*Klassenkalkul*" [1] {[1] Vrgl.: Schröder. *Op. cit.*. Erster Band. SS. 160 und 161.} nähert, wenn man ihn inklusive der Theorie der „Individuen" [2] {[2] Vrgl.: *Op. cit.*. Zweiter Band. Erste Abteilung. SS. 318—349.} betrachtet;

3) die Theorie, die ich *Mereologie* nenne und deren ersten und in vielen Beziehungen unvollkommenen Grundzug ich in einer Arbeit u. d. T. „*Die Grundlagen der allgemeinen Mengenlehre. I*" [3] {[3] Arbeiten des Polnischen Wissenschaftlichen Kreises in Moskau. Mathematisch-naturwissenschaftliche Sektion. № 2. Stanisław Leśniewski. Die Grundlagen der allgemeinen Mengenlehre. I. (Teil. Ingrediens. Menge. Klasse. Element. Untermenge. Einige interessante Arten von Klassen.) Moskau. 1916. (Polnisch.)} veröffentlicht habe.

Die am meisten imponierende Verkörperung der Eroberungen, die in der Geschichte der Begründung der Mathematik im Gebiete der Solidität der deduktiven Methode erreicht worden sind, und die seit den griechischen Zeiten wertvollste Quelle dieser Eroberungen — sind für mich bisher die „*Grundgesetze der Arithmetik*" von Gottlob Frege [4] {[4] Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet von G. Frege. Jena. Erster Band. 1893. Zweiter Band. 1903.}. Das System Freges ist jedoch kein widerspruchsfreies System, was bekanntlich Herr Bertrand Russell nachgewiesen hat, indem er seine berühmte „Antinomie" aufbaute, die „die Klasse der Klassen, welche nicht eigene Elemente sind" betrifft [5] {[5] Vrgl.: Frege. *Op. cit.*. Zweiter Band. SS. 253 und 254.}.

Das Problem der „Antinomien" ist unter dem übermächtigen Einfluss der Forschungen des Herrn Russell das zentrale Problem in den intellektuellen Bemühungen einer Reihe hervorragender Mathematiker geworden. Diese Bemühungen entfernten sich manchmal beträchtlich von der historisch-intuitiven Basis, aus der die

„Antinomien“ herausgewachsen sind. Dieses begünstigte ein Verschwinden des Gefühls des Unterschiedes zwischen den mathematischen Wissenschaften, verstanden als deduktive Theorien, die zur Fassung der verschiedenartigen Wirklichkeit der Welt in möglichst exakte Gesetze dienen, und solchen widerspruchsfreien deduktiven Systemen, welche zwar die Möglichkeit sichern, in ihnen eine Fülle immer neuer Theoreme zu erhalten, sich jedoch gleichzeitig durch das Fehlen irgendwelcher sie mit der Wirklichkeit verbindender intuitiv-wissenschaftlicher Vorzüge auszeichnen.

Frege gibt im Nachwort zu dem zweiten Band der oben erwähnten *„Grundgesetze der Arithmetik“* die Weise einer solchen Umgestaltung seines Systems an, bei welcher in ihm die „Antinomie“ des Herrn Russell schon nicht konstruiert werden kann; diese Weise besteht in der Ersetzung eines der Axiome des Systems durch ein gewisses anderes Axiom [1] {[1] Vrgl. *l. c.*, SS. 262—265.}, von welchem man auf Grund des allgemeinen Tons des erwähnten Nachwortes annehmen könnte, dass es sogar in den Intuitionen des Autors selbst keine ausreichende intuitive Unterstützung besitzt. – Die architektonisch raffinierte Konstruktion des Herrn Ernst Zermelo [2] {[2] Mathematische Annalen. 65. Band. 1908. E. Zermelo. Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I.} führt in die „Mengenlehre“ eine Reihe von Verboten ein, die, einer intuitiven Begründung entbehrend, auf die Verdrängung der „Antinomien“ aus der Mathematik hinzielen. — Die Frage, ob das System Freges, auf die oben angezeigte Weise verändert, oder auch die „Mengenlehre“ des Herrn Zermelo jemals zum Widerspruche führen wird, ist eine vollkommen gleichgültige Frage vom Gesichtspunkte der Zustände einer auf die Wirklichkeit gerichteten intellektuellen Mühsal, die aus einer unwiderstehlichen intuitiven Notwendigkeit des Glaubens an die „Wahrheit“ gewisser Voraussetzungen und an die „Korrektheit“ gewisser Schlussfolgerungen fliessen, welche in Verbindung mit diesen Voraussetzungen zum Widerspruch führen. Von diesem Gesichtspunkte aus ist die einzige Methode einer wirklichen „Auflösung“ der „Antinomien“ die Methode einer intuitiven Unterminierung der Schlussfolgerungen oder Voraussetzungen, welche zusammen zum Widerspruch beitragen [3] {[3] Vrgl.: Abhandlungen der Fries'schen Schule. Neue Folge. Zweiter Band. 3. Heft. 1908. VIII. K. Grelling und L. Nelson. Bemerkungen zu den Paradoxieen von Russell und Burali Forti. S. 314.}. Eine ausserintuitive Mathematik enthält keine wirksamen Remedien für die Übel der Intuition.

Herr Russell, indem er zur Beseitigung der „Antinomien“ seine „Typentheorie“ schafft, beruft sich unter anderem auf Rücksichten intuitiver Natur [4] {[4] Vrgl.: American Journal of Mathematics. Volume XXX, Number 3. July 1908. Bertrand Russell. Mathematical Logic as based on the Theory of Types. S. 222. Vrgl. gleichfalls: Whitehead und Russell. *L. c.*. S. 37.}. Die „Typentheorie“ ist bekanntlich eines der Kardinalelemente des oben erwähnten Werkes der Herren Whitehead und Russell [5] {[5] Vrgl. *l. c.*, S. VII.}. Sie stellt auf dem Gebiete des Kampfes gegen die „Antinomien“ eine bisher am meisten repräsentative Synthese dar. Jedoch sind mit ihr in ihrer gegenwärtigen Gestalt nicht einmal die Herren Whitehead und Russell zufrieden [6] {[6] Vrgl. *l. c.*, S. XIV.}.

Beide Ausgaben des Systems der Herren Whitehead und Russell besitzen auffällige Mängel [1] {[1] Im Zusammenhang mit der ersten Ausgabe des Systems vrgl. z. B.: Leon Chwistek. The Theory of constructive Types (Principles of Logic and Mathematics). Part I. General Principles of Logic. Theory of Classes and Relations. Extracted from the »Annales de la Société Mathématique de Pologne«. Cracow 1923. S. 22, Anmerkung 3. — — — Die Arbeit des Herrn Chwistek enthält eine Reihe interessanter und sachlich empfindsamer kritischer Bemerkungen über die erste Ausgabe des Systems der Herren Whitehead und Russell.}. Insbesondere — ist auf dem Grunde dieses Systems die Sache der Festsetzung der Bedingungen fatal gestellt, denen irgendein Ausdruck genügen soll, damit man ihn als eine Definition annehmen oder als ein neues Theorem zu dem System hinzufügen darf [2] {[2] Vrgl. Freges „Grundsätze“, die bei der Aufstellung der Definitionen, und „Regeln“, die beim Beweisen der Theoreme bindende Kraft haben (Frege, *op. cit.*, Erster Band, SS. 51, 52 und 61—64). Vrgl. gleichfalls *l. c.*, SS. VI und VII. Vrgl. auch: 1) Bertrand Russell. Introduction to mathematical Philosophy. London, New York. Second Edition April 1920. S. 151. 2) Chwistek. *L. c.*. S. 21.}.

Herr Leon Chwistek bemüht sich in seinem System der Grundlagen der Mathematik [3] {[3] Vrgl. *op. cit.*. Es ist auch bereits die Fortsetzung dieser Arbeit im Drucke erschienen: Rocznik Polskiego Tow. Matematycznego. Annales de la Société Polonaise de Mathématique. Tome III. Année 1924. 1925. Leon Chwistek. The

Theory of Constructive Types. (Principles of Logic and Mathematics). Part II. Cardinal Arithmetic. Es bestehen Abdrucke des Teiles II mit einer besonderen Pagination, welche die Fortsetzung der Pagination der Abdrucke des Teiles I bildet. Mich auf *„The Theory of Constructive Types“* berufend, werde ich beständig die Seitenzahl nach der Pagination der Abdrucke angeben.} die „Direktiven“, welche die Aufstellung der Definitionen und die Hinzufügung neuer Theoreme zu dem System betreffen, skrupulöser zu formulieren, als es die Herren Whitehead und Russell tun [4] {[4] Vrgl.: Chwistek. *Op. cit.*. SS. 20—33.}. Das System des Herrn Chwistek werde ich in dieser Arbeit einer Kritik unterziehen.

Es ist mir in der wissenschaftlichen Literatur keine solche theoretische Konzeption begegnet, die, den Anforderungen genügend, welche ich an die deduktiven Theorien stelle, zugleich auf eine für mich ausreichende Weise die bestehenden „Antinomien“ „auflösen“ würde. Sowohl in der einen, wie auch in der anderen Beziehung, befriedigt mich angenblicklich die Konzeption, welche ich im folgenden entwickeln will.

Das von mir konstruierte System der Grundlagen der Mathematik verdankt eine Reihe bedeutender Vervollkommnungen dem Herrn Alfred Tarski, Dozenten der Philosophie der Mathematik an der Warschauer Universität, meinem Schüler an dieser Universität aus den Jahren 1919—1923 und „meinem“ Doktor aus dem Jahre 1924. Die konkreten Ergebnisse der Erwägungen, welche Herr Tarski im Zusammenhang mit meinem System durchgeführt hat, berücksichtigend, werde ich mich bemühen, dieses *explicite* zu veranschaulichen; von Natur der Dinge vermag ich jedoch nicht, alle kritischen Gelegenheitsbemerkungen des Herrn Tarski zu veranschaulichen, welche dieses oder jenes Kettenglied meiner theoretischen Konzeptionen in den verschiedenen Stadien des Entstehens des Systems untergraben haben, sowie alle subtilen und wohlgemeinten Ratschläge und manchmal ungreifbaren Suggestionen, aus welchen ich in den zahlreichen Gesprächen mit Herrn Tarski Gelegenheit hatte Nutzen zu ziehen.

Das einzige Axiom der Theorie, die ich Protothetik nenne, verdankt in bedeutendem Grade seine gegenwärtige Gestalt, welche das Resultat einer Reihe aufeinanderfolgender Vereinfachungen der Urform dieses Axioms bildet, den Ergebnissen der Forschungen des Herrn Mordchaj Wajsberg, Studenten der Warschauer Universität“ [1].

Bis heute sind im Druck nur die Einleitung und die drei ersten Abschnitte meiner eben zitierten Arbeit *„Über die Grundlagen der Mathematik“* erschienen, die die Titel tragen — *»Über gewisse Fragen, die den Sinn „logistischer“ Thesen betreffen«* [2], *»Über die „Antinomie“ des Herrn Russell, die die „Klasse der Klassen, welche nicht eigene Elemente sind“ betrifft«* [3] und *»Über die verschiedenen Weisen des Verstehens der Worte „Klasse“ und „Menge“«* [4]. Bei der geringen Seitenzahl, welche in Anbetracht des reichlichen laufenden „philosophischen“ Materials die Redaktion des *„Przegląd Filozoficzny“* jedesmal in ihren Spalten meiner Arbeit einräumen kann, die immerhin einen mathematischen Charakter hat, wird der Druck dieser Arbeit gewiss noch gut ein paar Jahre dauern. Dieser Umstand bewegt mich, schon im jetzigen Termin eine kürzere Mitteilung aus demselben Gebiete zu veröffentlichen, in der ich die einzelnen theoretischen Positionen meines Systems der Grundlagen der Mathematik nur zu „markieren“ beabsichtige. In Fragen, die zahlreiche Einzelheiten betreffen, erlaube ich mir den Leser auf die Arbeit zu verweisen, welche im *„Przegląd Filozoficzny“* gedruckt wird.

Abschnitt I.

Die Grundlagen der Protothetik.

§ 1. Herr Henry Maurice Sheffer hat im Jahre 1912 nachgewiesen, dass sich in der Theorie der Deduktion der Herren Whitehead und Russell solche Funktionen zweier Satzvariablen definieren lassen, die die Eigenschaft besitzen, dass mit Hilfe jeder einzelnen von ihnen, in der Theorie der Deduktion als die primitive Funktion angenommen anstatt Alternative und Negation, welche in dem System der Herren Whitehead und Russell als zwei primitive Funktionen auftreten [5], man Alternative und Negation definieren kann. Die eine der Funktionen, welche nach der

[1] Vgl.: Leśniewski$_1$. SS. 164—169.
[2] *Op. cit.*, SS. 169—181.
[3] *Op. cit.*, SS. 182—189.
[4] *Op. cit.*, SS. 190—206.
[5] Vrgl.: Whitehead-Russell$_1$. SS. 91—93.

Entdeckung von Herrn Sheffer die gesagte Eigenschaft haben, ist die Funktion, die bei allen Werten der Variablen mit der Funktion „$\sim (p \vee q)$“, die zweite von ihnen — die Funktion, die bei allen Werten der Variablen mit der Funktion „$\sim p . \vee . \sim q$“ äquivalent ist [1].

Indem sich J. G. P. Nicod der zweiten von den erwähnten Funktionen des Herrn Sheffer bediente, hat er im J. 1916 die Theorie der Deduktion auf ein einziges Axiom gestützt [2]. Wenn man zum Ausdrücken der Funktion des Herrn Sheffer, die im System Nicods die primitive Funktion ist, in Übereinstimmung mit Nicod den senkrechten Strich „$\mid$“ gebrauchen und sich der Punkte nach dem Muster des Systems der Herren Whitehead und Russell bedienen würde [3], könnte man das einzige Axiom der Nicodschen Theorie der Deduktion mittels des Satzes „$p \mid . q \mid r : \mid :: t \mid . t \mid t : \mid \therefore s \mid q . \mid : p \mid s . \mid . p \mid s$“ aufschreiben [4]. (Ich bemerke hier gelegentlich, dass das Axiom von Nicod im J. 1925 von Herrn Dr Jan Łukasiewicz, Professor der Philosophie an der Warschauer Universität, vereinfacht worden ist: Herr Łukasiewicz hat, ohne dass er die Schlussdirektiven von Nicod änderte, in dem Nicodschen Axiom die Zahl der verschiedenen Variablen von fünf auf vier verringert, indem er in diesem Axiom die Variable „t“ durch die Variable „s“ ersetzte; die in Rede stehende Vereinfachung ist keineswegs eine banale Vereinfachung, wie es jemandem beim ersten Blick scheinen könnte: der vollständige Beweis des Nicodschen Axioms auf Grund des Axioms des Herrn Łukasiewicz beruht auf vier und zwanzig aufeinanderfolgenden Anwendungen der Direktiven des Systems von Nicod einschliesslich mit der vermutlichen Einsetzungsdirektive [5].)

Beim Definieren der einen Funktionen der Theorie der Deduktion durch andere gebrauchen sowohl Herr Sheffer, wie auch Nicod, spezielle definitorische Gleichheitszeichen, welche sie nicht mittels der primitiven Funktion des Systems definieren. Die Definitionen des Herrn Sheffer haben die Gestalt der Ausdrücke vom

[1] Vrgl.: Sheffer$_1$. SS. 487 und 488. Vrgl. gleichfalls: 1) Żyliński$_1$. 2) Żyliński$_2$. S. 208.
[2] Vrgl.: Nicod$_1$.
[3] Vrgl.: Whitehead-Russell$_1$. SS. 9—11.
[4] Vrgl.: Whitehead-Russell$_1$. S. XIX.
[5] Vrgl.: Russell$_1$. S. 151.

Typus „$p = q$“, die Definitionen Nicods — die Gestalt der Ausdrücke vom Typus „$p = q$ Df“, die von den Herren Whitehead und Russell gebraucht werden [1]. Dieser Umstand bedingt es, dass es schwer ist zu sagen, dass z. B. die Nicodsche Theorie der Deduktion in der Tat auf dem einzigen primitiven Termin „$\mid$“ konstruiert ist.

Im J. 1921 habe ich bemerkt, dass die Bedingung dafür, dass ein System der Theorie der Deduktion, welches Definitionen enthält, wirklich auf einem einzigen Termin aufgebaut würde, das Aufschreiben der Definitionen mittels eben dieses primitiven Termins ist, ohne sich zu einem speziellen definitorischen Gleichheitszeichen zu flüchten. Wenn man die gesagte Reform im besonderen in das System von Nicod einführen würde, könnte man in diesem System die Definitionen mittels irgendeiner ausgewählten Funktion aufschreiben, die nur mit Hilfe der primitiven Funktion „$p \mid q$“ konstruiert und bei allen ihren Werten mit der gewöhnlichen Äquivalenzfunktion vom Typus „$r \equiv s$“ äquivalent ist. Erwägend z. B., dass im Einklang mit den diesbezüglichen Nicodschen Definitionen $p \equiv q . \equiv :: p \mid . q \mid q : \mid : q \mid . p \mid p \therefore \mid \therefore p \mid . q \mid q : \mid : q \mid . p \mid p$, könnte man statt der Ausdrücke vom Typus „$p = q$ Df“, die Nicod gebraucht, als Definitionen entsprechende Ausdrücke vom Typus „$p \mid . q \mid q : \mid : q \mid . p \mid p \therefore \mid \therefore p \mid . q \mid q ; \mid : q \mid . p \mid p$“ formulieren. Die Definition der Negation könnte bei so bewandten Umständen die Gestalt des Satzes „$\sim p . \mid : p \mid p . \mid . p \mid p \therefore \mid \therefore p \mid p . \mid : \sim p . \mid . \sim p :: \mid :: \sim p . \mid : p \mid p . \mid . p \mid p \therefore \mid \therefore p \mid p . \mid : \sim p . \mid . \sim p$“ haben, die Definition der Alternative — die Gestalt des Satzes „$p \vee q . \mid \therefore p \mid p . \mid . q \mid q : \mid : p \mid p . \mid . q \mid q :: \mid \therefore p \mid p . \mid . q \mid q : \mid : p \vee q . \mid . p \vee q :: \mid :: p \vee q . \mid \therefore p \mid p . \mid . q \mid q : \mid : p \mid p . \mid . q \mid q :: \mid \therefore p \mid p . \mid . q \mid q : \mid : p \vee q . \mid . p \vee q$“ u. s. w..

Im J. 1922 hat Herr Tarski die paradoxe Entdeckung gemacht, die in der Feststellung bestand, dass bei entsprechender Verwertung der Funktionsvariablen und Quantifikatoren alle bekannten Funktionen der Theorie der Deduktion mittels der Äquivalenzfunktion, angenommen als die einzige primitive Funktion, definiert werden können. In der Arbeit u. d. T. „*Sur le terme primitif de la Logistique*“ schrieb Herr Tarski:

»Je me propose dans cette Note d'établir un théorème de la Logistique concernant des rapports, inconnus jusqu'à présent, qui

[1] Vrgl.: Whitehead-Russell$_1$. S. 94.

existent entre les termes de cette discipline. Mes raisonnements sont basés sur des propositions généralement admises par les logisticiens. Cependant je ne les fais pas dépendre de telle ou autre théorie des types logiques; d'ailleurs, parmi toutes les théories des types qui peuvent être construites [1]) {[1]) La possibilité de construire des différentes théories des types logiques est reconnue également par l'inventeur de la plus connue d'entre elles. Cf. A. N. Whitehead and B. Russell, *Principia Mathematica*, Cambridge 1910, p. VII.} il en existe de telles, par rapport auxquelles mes raisonnements, dans leur forme actuelle, sont parfaitement légitimes [2]) {[2]) Une telle théorie a été développée en 1920 par M. le Professeur S. Leśniewski dans son cours des Principes d'Arithmétique à l'Université de Varsovie.}.

Le problème dont je présent la solution est le suivant: *est-il possible de construire un système de la Logistique, en admettant le signe d'équivalence comme le seul terme primitif* (bien entendu, outre les quantificateurs [3]) {[3]) Au sens de Peirce (*On the Algebra of Logic*, American Journal of Mathematics, vol. VII, 1885, p. 197) qui appelle ainsi les symboles „Π“ (quantificateur général) et „Σ“ (quantificateur particulier) représentant les abréviations des expressions: „*pour toute signification des termes...*“ et „*pour quelque signification des termes...*“})?« [1].

Und etwas weiter:

„Le théorème, qui va être démontré (Th. 10), présente une solution affirmative du problème considéré. Il peut servir, en effet, comme définition du signe de la multiplication logique par le signe d'équivalence et par le quantificateur général. Or, lorsqu'on opère déjà avec le signe de la multiplication logique, les autres termes de Logistique peuvent être facilement définis à l'aide des propositions suivantes [3]) {[3]) J'adopte dans cette Note les notations des MM. Whitehead et Russell avec quelques légères modifications; en particulier, au lieu des expressions de la forme „φx“ j'écris „$\varphi(x)$“.}:

$$[p] \therefore \sim(p) . \equiv : p \equiv . [q] . q$$

$$[p, q] \therefore p \supset q . \equiv : p \equiv . p . q$$

$$[p, q] : p \vee q . \equiv . \sim(p) \supset q$$ [4]) {[4]) Les termes „0“ et „1“ qui figurent p. ex. chez L. Couturat, *L'Algèbre de la Logique*, Paris 1905, peuvent être définis comme suit:

[1]) Tarski$_1$, S. 196. Vrgl.: Tarski$_2$. SS. 4 und 5.

$$0 \equiv . [q] . q$$

$$1 \equiv . [q] . q \equiv q\}“$$ [1]).

Das Theorem 10, von dem im zitierten Abschnitt die Rede ist, lautet folgendermassen: „$[p, q] :: p . q . \equiv \therefore [f] \therefore p \equiv : [r] . p \equiv f(r) . \equiv . [r] . q \equiv f(r)$“ [2]). In derselben Abhandlung hat Herr Tarski bewiesen, dass in den Systemen der Logistik, die unter ihren Axiomen oder Theoremen die These enthalten, welche besagt, dass $[p, q, f] : p \equiv q . f(p) . \supset f(q)$, gleichfalls die These, nach welcher $[p, q] \therefore p . q . \equiv : [f] : p \equiv . f(p) \equiv f(q)$, gelten muss [3]).

§ 2. Meine „Typentheorie“, die Herr Tarski in einem der oben zitierten Abschnitte seiner Arbeit erwähnt, habe ich im J. 1921 konstruiert [4]). Sie stellte etwas in der Art der „Typentheorie“ der Herren Whitehead und Russell [5]) dar, welche von mir auf eine gewisse Weise verallgemeinert und vereinfacht worden ist. Ich betrachtete meine „Typentheorie“ schon in dem Augenblicke, als ich sie aufbaute, nur als ein unzureichendes Palliativ, welches mir, ohne mich mit den „Antinomien“ zu bedrohen, wenigstens einstweilen bei der Auslegung der grundlegenden mathematischen Theorien (insbesondere der schon damals in Grundzügen fertigen „Ontologie“ und „Mereologie“) das Operieren mit allen Arten der Funktionsvariablen, mit welchen ich operieren wollte, ermöglichen sollte und mir in gewissem Grade die auffälligen Lücken im Gebiete der Definitionsdirektiven ausfüllen könnte, die in den verschiedenen mir bekannten Systemen der mathematischen Logik auf ungenügende Weise formuliert oder auch überhaupt nicht formuliert werden.

[1]) Tarski$_1$, S. 197. Vrgl.: Tarski$_2$. S. 6.

[2]) Tarski$_1$, S. 199. Vrgl.: Tarski$_2$. S. 9.

[3]) Vrgl.: Tarski$_1$. SS. 199 und 200. Tarski$_2$. SS. 9 und 10. Ich bemerke hier nebenbei, dass die von Herrn Tarski in seinen logistischen Arbeiten angewandte Weise des Aufschreibens von Beweisen mit Hilfe eines einzigen Konditionalsatzes der Weise nachgebildet ist, welche ich seit dem J. 1921 in der täglichen Praxis meiner Universitätsvorlesungen anwende.

[4]) Das Datum, das von Herrn Tarski im zitierten Abschnitt angegeben ist, ist das Resultat eines kleinen Irrtums zu meinen Gunsten. Vrgl.: Tarski$_2$. S. 4. Ausser den Universitätsvorlesungen habe ich die erwähnte „Typentheorie“ in dem Vortrag u. d. T. „*Über die Stufen der grammatischen Funktionen*“ (polnisch) dargelegt, den ich in der wissenschaftlichen Sitzung der Logischen Sektion des Warschauer Philosophischen Instituts vom 10 III d. J. 1921 gehalten habe. Vrgl.: WPI$_1$. S. 248.

[5]) Vrgl.: Whitehead-Russell$_1$. SS. 161—167.

Im J. 1922 habe ich eine Konzeption der „semantischen Kategorien“ skizziert, die mir diese oder jene einer jeden intuitiven Begründung für mich entbehrenden „Hierarchien der Typen“ ersetzen sollten, und die, wenn ich überhaupt mit Sinn reden wollte, ich heute mich gezwungen fühlen würde anzunehmen, auch wenn keine „Antinomien“ auf der Welt beständen. Indem meine Konzeption der „semantischen Kategorien“ in Bezug auf ihre theoretischen Konsequenzen in enger formaler Verwandtschaft mit den bekannten „Theorien der logischen Typen“ [1] blieb, knüpfte sie, was ihre intuitive Seite anbetrifft, eher den Faden der Tradition der „*Kategorien*“ von Aristoteles, der „Redeteile“ der traditionellen Grammatik und der „Bedeutungskategorien“ von Herrn Edmund Husserl [2] an. Die in Rede stehende Konzeption auf die Mathematik im allgemeinen und auf die mathematische Logik im besonderen anwendend, brauchte ich für diese Konzeption nichts vom Grade der Allgemeinheit meiner Intuitionen opfern, die diese oder jene theoretischen Themen betreffen.

In demselben J. 1922 bin ich vom Gesichtspunkte der erwähnten Konzeption der „semantischen Kategorien“ an die Formulierung der Definitions- und Schlussdirektiven für die grundlegenden mathematischen Theorien, insbesondere für die „Protothetik“ und „Ontologie“, herangetreten. Das Prüfen und Modifizieren verschiedener Einzelheiten dieser Direktiven dauerte einige Jahre, aber schon im J. 1922 waren die Direktiven mit einem solchen Grade von Genauigkeit gefasst, dass man auf ihrer Grundlage an eine Reihe axiomatischer Forschungen herantreten konnte. Die Erforschung der Axiome und Direktiven der Protothetik und Ontologie führte ich in jener Zeit bei naher Mitarbeit von Herrn Tarski durch, dessen einzelne wichtige Beiträge aus diesem Gebiet weiter unten veranschaulicht werden.

Die Definitions- und Schlussdirektiven bemühte ich mich in einer solchen Weise zu formulieren, dass man sie mit Leichtigkeit den verschiedenen Systemen der Protothetik anpassen könnte — in Abhängigkeit von den verschiedenen primitiven Terminen, auf welchen die erwähnten Systeme aufgebaut werden sollten; in den

[1] Ausser dem in der letzten Anmerkung erwähnten Abschnitt aus den „*Principia mathematica*“ vrgl. hier noch im Zusammenhang mit diesen Theorien: 1) Chwistek$_1$. SS. 12—14 und 26—33. 2) Chwistek$_2$. SS. 49, 50 und 54—56.

[2] Vrgl.: Husserl$_1$. SS. 294, 295, 305—312, 316—321 und 326 - 342.

axiomatischen Forschungen konzentrierte ich mich auf die Aufgabe der Konstruierung eines möglichst einfachen Axiomensystems für das nach der oben besprochenen Entdeckung des Herrn Tarski ermöglichte, wenn auch in der Praxis noch nicht realisierte, System der Protothetik, welches auf das Äquivalenzzeichen, als den einzigen primitiven Termin, gestützt ist.

§ 3. Das Konstruieren des Axiomensystems der Protothetik, das auf das Äquivalenzzeichen gestützt ist, begann ich von dem Aussuchen einer solchen Kombination von den in der gewöhnlichen Theorie der Deduktion beweisbaren Äquivalenzensätzen [von einem Ausdruck X werde ich hier der Kürze halber sagen, dass er ein Äquivalenzensatz ist, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: *a*) X ist eine Satzvariable oder eine Äquivalenz, *b*) wenn irgendein Y eine Äquivalenz ist, die einen eigentlichen oder uneigentlichen Teil des Ausdrucks X bildet, so sind die linke und rechte Seite der Äquivalenz Y Satzvariablen oder Äquivalenzen], welche eine ausreichende axiomatische Grundlage für das System bilden könnte, das sich aus allen in der gewöhnlichen Theorie der Deduktion beweisbaren Äquivalenzensätzen zusammensetzt. Die neuen Sätze erhielt ich in diesem System auf Grund von Sätzen, die schon zu dem System gehören, indem ich die Direktive der „Einsetzung“ von Äquivalenzensätzen für Variablen in den Sätzen, die schon zum System gehören, anwandte und die „Abtrennungsdirektive“ benutzte, die die Hinzufügung zum System eines Satzes S gestattet, wenn schon eine Äquivalenz A, deren rechte Seite gleichgestaltet mit S ist [1], und ein Satz, der gleichgestaltet mit der linken Seite der Äquivalenz A ist, zu dem System gehören (ich beschränke mich hier auf eine solche nur ganz allgemeine Charakterisierung der betreffenden Direktiven — in der Absicht, in der Fortsetzung dieser Mitteilung die Direktiven der Protothetik mit aller Präzision zu formulieren, mit welcher ich es vermag).

Die Widerspruchslosigkeit der gewöhnlichen Theorie der Deduktion voraussetzend [2], habe ich mich überzeugt, dass man auf die eben dargestellte Weise ein System aufbauen könnte, das in sich alle in der gewöhnlichen Theorie der Deduktion beweisbaren

[1] Vrgl.: Frege$_2$. S. 107.

[2] Vrgl.: Post$_1$. S. 172.

Äquivalenzensätze und keine anderen Sätze enthält, wenn man als Ausgangspunkt folgende Kombination zweier Axiome annehmen würde:

$A1.\quad p\equiv r.\equiv.q\equiv p:\equiv.r\equiv q$

$A2.\quad p\equiv.q\equiv r:\equiv:p\equiv q.\equiv r$

(dieses System werde ich im folgenden das System $\mathfrak{S}$ nennen; der Satz, der hier als Axiom $A2$ auftritt, war bereits vor dem J. 1922 von Herrn Łukasiewicz in der gewöhnlichen Theorie der Deduktion bewiesen [1)]). Die Methode, mittels welcher ich mich versichert habe, dass es wirklich so ist, beruhte darauf, dass ich mir folgende Umstände zum Bewusstsein brachte, die ich hier ohne irgendeinen Anspruch auf Exaktheit skizzieren will:

1) Im System $\mathfrak{S}$ sind unter anderen folgende Sätze beweisbar:

$T1.\quad q\equiv r.\equiv.r\equiv q:\equiv.r\equiv r\quad \left[A1\,\frac{q}{p},\frac{r}{q}\right]$ [2)]

$T2.\quad r\equiv.q\equiv r:\equiv:r\equiv q.\equiv r\therefore\equiv:q\equiv r.\equiv.r\equiv q\quad \left[A1\,\frac{r}{p},\frac{r\equiv q}{q},\frac{q\equiv r}{r}\right]$

$T3.\quad p\equiv.r\equiv q:\equiv:p\equiv r.\equiv q\quad \left[A2\,\frac{r}{q},\frac{q}{r}\right]$

$T4.\quad r\equiv.q\equiv r:\equiv:r\equiv q.\equiv r\quad \left[A2\,\frac{r}{p}\right]$

$T5.\quad s\equiv:q\equiv p.\equiv r\therefore\equiv\therefore s\equiv.q\equiv p:\equiv r\quad \left[A2\,\frac{s}{p},\frac{q\equiv p}{q}\right]$

$T6.\quad r\equiv t.\equiv\therefore p\equiv:q\equiv r.\equiv.s\equiv t::\equiv\therefore r\equiv t.\equiv p:\equiv:q\equiv r.\equiv.s\equiv t\quad \left[A2\,\frac{r\equiv t}{p},\frac{p}{q},\frac{q\equiv r.\equiv.s\equiv t}{r}\right]$

$T7.\quad q\equiv r.\equiv.r\equiv q\quad [T2,\ T4]$

$T8.\quad p\equiv q.\equiv.q\equiv p\quad \left[T7\,\frac{p}{q},\frac{q}{r}\right]$

$T9.\quad p\equiv.q\equiv r:\equiv:p\equiv q.\equiv r\therefore\equiv\therefore p\equiv q.\equiv r:\equiv:p\equiv.q\equiv r\quad \left[T7\,\frac{p\equiv.q\equiv r}{q},\frac{p\equiv q.\equiv r}{r}\right]$

[1)] Vrgl.: Tarski$_1$. S. 199. Tarski$_2$. S. 8.

[2)] Bei der hier angenommenen Weise der Berufungen auf frühere Thesen des Systems wird dem Leser, der die „*Principia mathematica*" kennt, kein Zweifel auftauchen. Vrgl.: Whitehead-Russell$_1$. S. 98.

$T10.\quad p\equiv.q\equiv r:\equiv:q\equiv p.\equiv r\therefore\equiv\therefore q\equiv p.\equiv r:\equiv:p\equiv.q\equiv r\quad \left[T7\,\frac{p\equiv.q\equiv r}{q},\frac{q\equiv p.\equiv r}{r}\right]$

$T11.\quad p\equiv r.\equiv:q\equiv p.\equiv.q\equiv r\therefore\equiv\therefore q\equiv p.\equiv.q\equiv r:\equiv.p\equiv r\quad \left[T7\,\frac{p\equiv r}{q},\frac{q\equiv p.\equiv.q\equiv r}{r}\right]$

$T12.\quad p\equiv r.\equiv.q\equiv p:\equiv.r\equiv q\therefore\equiv\therefore r\equiv q.\equiv:p\equiv r.\equiv.q\equiv p\quad \left[T7\,\frac{p\equiv r.\equiv.q\equiv p}{q},\frac{r\equiv q}{r}\right]$

$T13.\quad p\equiv q.\equiv r:\equiv:p\equiv.q\equiv r\quad [T9,\ A2]$

$T14.\quad p\equiv.q\equiv r:\equiv.s\equiv t\therefore\equiv\therefore p\equiv:q\equiv r.\equiv.s\equiv t\quad \left[T13\,\frac{q\equiv r}{q},\frac{s\equiv t}{r}\right]$

$T15.\quad s\equiv.q\equiv p:\equiv r\therefore\equiv t::\equiv\therefore s\equiv.q\equiv p:\equiv.r\equiv t\quad \left[T13\,\frac{s\equiv.q\equiv p}{p},\frac{r}{q},\frac{t}{r}\right]$

$T16.\quad p\equiv r.\equiv.q\equiv p:\equiv.q\equiv r\therefore\equiv\therefore p\equiv r.\equiv:q\equiv p.\equiv.q\equiv r\quad \left[T13\,\frac{p\equiv r}{p},\frac{q\equiv p}{q},\frac{q\equiv r}{r}\right]$

$T17.\quad q\equiv p.\equiv.q\equiv r:\equiv.p\equiv r\therefore\equiv\therefore q\equiv p.\equiv:q\equiv r.\equiv.p\equiv r\quad \left[T13\,\frac{q\equiv p}{p},\frac{q\equiv r}{q},\frac{p\equiv r}{r}\right]$

$T18.\quad s\equiv.q\equiv p:\equiv.r\equiv t\therefore\equiv\therefore p\equiv:q\equiv r.\equiv.s\equiv t::\equiv:\therefore s\equiv.q\equiv p:\equiv::r\equiv t.\equiv\therefore p\equiv:q\equiv r.\equiv.s\equiv t\quad \left[T13\,\frac{s\equiv.q\equiv p}{p},\frac{r\equiv t}{q},\frac{p\equiv:q\equiv r.\equiv.s\equiv t}{r}\right]$

$T19.\quad r\equiv r\quad [T1,\ T7]$

$T20.\quad q\equiv r.\equiv.q\equiv r\quad \left[T19\,\frac{q\equiv r}{r}\right]$

$T21.\quad r\equiv r.\equiv.r\equiv r\quad \left[T19\,\frac{r\equiv r}{r}\right]$

$T22.\quad r\equiv q.\equiv:p\equiv r.\equiv.q\equiv p\quad [T12,\ A1]$

$T23.\quad s\equiv.p\equiv r:\equiv\therefore q\equiv s.\equiv:p\equiv r.\equiv q\quad \left[T22\,\frac{q}{p},\frac{p\equiv r}{q},\frac{s}{r}\right]$

$T24.\quad r\equiv q.\equiv:p\equiv r.\equiv.q\equiv p\therefore\equiv::q\equiv r.\equiv.r\equiv q:\equiv\therefore p\equiv r.\equiv.q\equiv p:\equiv.q\equiv r\quad \left[T22\,\frac{q\equiv r}{p},\frac{p\equiv r.\equiv.q\equiv p}{q},\frac{r\equiv q}{r}\right]$

T25. $$p \equiv .\, q \equiv r : \equiv : p \equiv r .\, \equiv q \therefore \equiv :: p \equiv q .\, \equiv r : \equiv : p \equiv .\, q \equiv r \therefore \equiv \therefore p \equiv r .\, \equiv q : \equiv : p \equiv q .\, \equiv r \quad \left[T22\ \frac{p \equiv q .\, \equiv r}{p}, \frac{p \equiv r .\, \equiv q}{q}, \frac{p \equiv .\, q \equiv r}{r}\right]$$

T26. $$q \equiv r .\, \equiv .\, r \equiv q : \equiv \therefore p \equiv r .\, \equiv .\, q \equiv p : \equiv .\, q \equiv r \quad [T24,\ T22]$$

T27. $$p \equiv r .\, \equiv .\, q \equiv p : \equiv .\, q \equiv r \quad [T26,\ T7]$$

T28. $$p \equiv r .\, \equiv : q \equiv p .\, \equiv .\, q \equiv r \quad [T16,\ T27]$$

T29. $$q \equiv r .\, \equiv .\, r \equiv q : \equiv \therefore p \equiv .\, q \equiv r : \equiv : p \equiv .\, r \equiv q \quad \left[T28\ \frac{q \equiv r}{p}, \frac{p}{q}, \frac{r \equiv q}{r}\right]$$

T30. $$p \equiv r .\, \equiv q : \equiv : p \equiv q .\, \equiv r \therefore \equiv :: q \equiv s .\, \equiv : p \equiv r .\, \equiv q \therefore \equiv \therefore q \equiv s .\, \equiv : p \equiv q .\, \equiv r \quad \left[T28\ \frac{p \equiv r .\, \equiv q}{p}, \frac{q \equiv s}{q}, \frac{p \equiv q .\, \equiv r}{r}\right]$$

T31. $$p \equiv q .\, \equiv r : \equiv : q \equiv p .\, \equiv r \therefore \equiv :: p \equiv .\, q \equiv r : \equiv : p \equiv q .\, \equiv r \therefore \equiv \therefore p \equiv .\, q \equiv r : \equiv : q \equiv p .\, \equiv r \quad \left[T28\ \frac{p \equiv q .\, \equiv r}{p}, \frac{p \equiv .\, q \equiv r}{q}, \frac{q \equiv p .\, \equiv r}{r}\right]$$

T32. $$p \equiv .\, r \equiv q : \equiv : p \equiv r .\, \equiv q \therefore \equiv :: p \equiv .\, q \equiv r : \equiv : p \equiv .\, r \equiv q \therefore \equiv \therefore p \equiv .\, q \equiv r : \equiv : p \equiv r .\, \equiv q \quad \left[T28\ \frac{p \equiv .\, r \equiv q}{p}, \frac{p \equiv .\, q \equiv r}{q}, \frac{p \equiv r .\, \equiv q}{r}\right]$$

T33. $$q \equiv s .\, \equiv : p \equiv q .\, \equiv r \therefore \equiv \therefore s \equiv q .\, \equiv : p \equiv q .\, \equiv r :: \equiv :\!\cdot\!: s \equiv .\, p \equiv r : \equiv \therefore q \equiv s .\, \equiv : p \equiv q .\, \equiv r :: \equiv :: s \equiv .\, p \equiv r : \equiv \therefore s \equiv q .\, \equiv : p \equiv q .\, \equiv r \quad \left[T28\ \frac{q \equiv s .\, \equiv : p \equiv q .\, \equiv r}{p}, \frac{s \equiv .\, p \equiv r}{q}, \frac{s \equiv q .\, \equiv : p \equiv q .\, \equiv r}{r}\right]$$

T34. $$q \equiv s .\, \equiv : p \equiv r .\, \equiv q \therefore \equiv \therefore q \equiv s .\, \equiv : p \equiv q .\, \equiv r :: \equiv :\!\cdot\!: s \equiv .\, p \equiv r : \equiv \therefore q \equiv s .\, \equiv : p \equiv r .\, \equiv q :: \equiv :: s \equiv .\, p \equiv r : \equiv \therefore q \equiv s .\, \equiv : p \equiv q .\, \equiv r \quad \left[T28\ \frac{q \equiv s .\, \equiv : p \equiv r .\, \equiv q}{p}, \frac{s \equiv .\, p \equiv r}{q}, \frac{q \equiv s .\, \equiv : p \equiv q .\, \equiv r}{r}\right]$$

T35. $$q \equiv p .\, \equiv r : \equiv .\, s \equiv t \therefore \equiv :: s \equiv : q \equiv p .\, \equiv r \therefore \equiv t :\!\cdot\!: \equiv \vdots\vdots\, p \equiv .\, q \equiv r : \equiv .\, s \equiv t \therefore \equiv \therefore q \equiv p .\, \equiv r : \equiv .\, s \equiv t :: \equiv :\!\cdot\!: p \equiv .\, q \equiv r : \equiv .\, s \equiv t \therefore \equiv :: s \equiv : q \equiv p .\, \equiv r \therefore \equiv t \quad \left[T28\ \frac{q \equiv p .\, \equiv r : \equiv .\, s \equiv t}{p}, \frac{p \equiv .\, q \equiv r : \equiv .\, s \equiv t}{q}, \frac{s \equiv : q \equiv p .\, \equiv r \therefore \equiv t}{r}\right]$$

T36. $$s \equiv .\, q \equiv p : \equiv r \therefore \equiv t :: \equiv \therefore s \equiv .\, q \equiv p : \equiv .\, r \equiv t :\!\cdot\!: \equiv \vdots\vdots\, p \equiv .\, q \equiv r : \equiv .\, s \equiv t \therefore \equiv :: s \equiv .\, q \equiv p : \equiv r \therefore \equiv t :\!\cdot\!: \equiv :: p \equiv .\, q \equiv r : \equiv .\, s \equiv t \therefore \equiv \therefore s \equiv .\, q \equiv p : \equiv .\, r \equiv t \quad \left[T28\ \frac{s \equiv .\, q \equiv p : \equiv r \therefore \equiv t}{p}, \frac{p \equiv .\, q \equiv r : \equiv .\, s \equiv t}{q}, \frac{s \equiv .\, q \equiv p : \equiv .\, r \equiv t}{r}\right]$$

T37. $$s \equiv : q \equiv p .\, \equiv r \therefore \equiv t :: \equiv :: s \equiv .\, q \equiv p : \equiv r \therefore \equiv t :\!\cdot\!: \equiv \vdots\vdots\, p \equiv .\, q \equiv r : \equiv .\, s \equiv t \therefore \equiv :: s \equiv : q \equiv p .\, \equiv r \therefore \equiv t :\!\cdot\!: \equiv :\!\cdot\!: p \equiv .\, q \equiv r : \equiv .\, s \equiv t \therefore \equiv :: s \equiv .\, q \equiv p : \equiv r \therefore \equiv t \quad \left[T28\ \frac{s \equiv : q \equiv p .\, \equiv r \therefore \equiv t}{p}, \frac{p \equiv .\, q \equiv r : \equiv .\, s \equiv t}{q}, \frac{s \equiv .\, q \equiv p : \equiv r \therefore \equiv t}{r}\right]$$

T38. $$r \equiv t .\, \equiv \therefore p \equiv : q \equiv r .\, \equiv .\, s \equiv t :: \equiv \therefore t \equiv .\, r \equiv p : \equiv : q \equiv r .\, \equiv .\, s \equiv t :\!\cdot\!: \equiv \vdots\vdots\, s \equiv .\, q \equiv p : \equiv :: r \equiv t .\, \equiv \therefore p \equiv : q \equiv r .\, \equiv .\, s \equiv t :\!\cdot\!: \equiv :: s \equiv .\, q \equiv p : \equiv \therefore t \equiv .\, r \equiv p : \equiv : q \equiv r .\, \equiv .\, s \equiv t \quad \left[T28\ \frac{r \equiv t .\, \equiv \therefore p \equiv : q \equiv r .\, \equiv .\, s \equiv t}{p}, \frac{s \equiv .\, q \equiv p}{q}, \frac{t \equiv .\, r \equiv p : \equiv : q \equiv r .\, \equiv .\, s \equiv t}{r}\right]$$

T39. $$r \equiv t .\, \equiv p : \equiv : q \equiv r .\, \equiv .\, s \equiv t \therefore \equiv \therefore t \equiv .\, r \equiv p : \equiv : q \equiv r .\, \equiv .\, s \equiv t :: \equiv \vdots\vdots\, r \equiv t .\, \equiv \therefore p \equiv : q \equiv r .\, \equiv .\, s \equiv t :: \equiv \therefore r \equiv t .\, \equiv p : \equiv : q \equiv r .\, \equiv .\, s \equiv t :\!\cdot\!: \equiv :\!\cdot\!: r \equiv t .\, \equiv \therefore p \equiv : q \equiv r .\, \equiv .\, s \equiv t :: \equiv \therefore t \equiv .\, r \equiv p : \equiv : q \equiv r .\, \equiv .\, s \equiv t \quad \left[T28\ \frac{r \equiv t .\, \equiv p : \equiv : q \equiv r .\, \equiv .\, s \equiv t}{p}, \frac{r \equiv t .\, \equiv \therefore p \equiv : q \equiv r .\, \equiv .\, s \equiv t}{q}, \frac{t \equiv .\, r \equiv p : \equiv : q \equiv r .\, \equiv .\, s \equiv t}{r}\right]$$

T40. $$q \equiv p .\, \equiv .\, q \equiv r : \equiv .\, p \equiv r \quad [T11,\ T28]$$

T41. $$p \equiv .\, q \equiv r : \equiv : p \equiv .\, r \equiv q \quad [T29,\ T7]$$

T42. $p \equiv . q \equiv r : \equiv : p \equiv . r \equiv q \therefore \equiv \therefore p \equiv . q \equiv r : \equiv : p \equiv r . \equiv q$ $[T32,\ T3]$

T43. $p \equiv . q \equiv r : \equiv . s \equiv t \therefore \equiv :: s \equiv . q \equiv p : \equiv r \therefore \equiv t :\cdot: \equiv :: p \equiv . q \equiv r : \equiv . s \equiv t \therefore \equiv \therefore s \equiv . q \equiv p : \equiv . r \equiv t$ $[T36,\ T15]$

T44. $q \equiv p . \equiv : q \equiv r . \equiv . p \equiv r$ $[T17,\ T40]$

T45. $p \equiv q . \equiv . q \equiv p : \equiv \therefore p \equiv q . \equiv r : \equiv : q \equiv p . \equiv r$ $\left[T44\ \frac{q \equiv p}{p},\ \frac{p \equiv q}{q}\right]$

T46. $p \equiv . q \equiv r : \equiv : q \equiv p . \equiv r \therefore \equiv :: p \equiv . q \equiv r : \equiv . s \equiv t \therefore \equiv \therefore q \equiv p . \equiv r : \equiv . s \equiv t$ $\left[T44\ \frac{q \equiv p . \equiv r}{p},\ \frac{p \equiv . q \equiv r}{q},\ \frac{s \equiv t}{r}\right]$

T47. $s \equiv : q \equiv p . \equiv r \therefore \equiv \therefore s \equiv . q \equiv p : \equiv r :: \equiv :\cdot: s \equiv : q \equiv p . \equiv r \therefore \equiv t :: \equiv :: s \equiv . q \equiv p : \equiv r \therefore \equiv t$ $\left[T44\ \frac{s \equiv . q \equiv p : \equiv r}{p},\ \frac{s \equiv : q \equiv p . \equiv r}{q},\ \frac{t}{r}\right]$

T48. $r \equiv t . \equiv p : \equiv : t \equiv . r \equiv p \therefore \equiv :: r \equiv t . \equiv p : \equiv : q \equiv r . \equiv . s \equiv t \therefore \equiv \therefore t \equiv . r \equiv p : \equiv : q \equiv r . \equiv . s \equiv t$ $\left[T44\ \frac{t \equiv . r \equiv p}{p},\ \frac{r \equiv t . \equiv p}{q},\ \frac{q \equiv r . \equiv . s \equiv t}{r}\right]$

T49. $p \equiv . q \equiv r : \equiv . s \equiv t \therefore \equiv \therefore s \equiv . q \equiv p : \equiv . r \equiv t :: \equiv :\cdot: p \equiv . q \equiv r : \equiv . s \equiv t \therefore \equiv \therefore p \equiv : q \equiv r . \equiv . s \equiv t :: \equiv :: s \equiv . q \equiv p : \equiv . r \equiv t \therefore \equiv \therefore p \equiv : q \equiv r . \equiv . s \equiv t$ $\left[T44\ \frac{s \equiv . q \equiv p : \equiv . r \equiv t}{p},\ \frac{p \equiv . q \equiv r : \equiv . s \equiv t}{q},\ \frac{p \equiv : q \equiv r . \equiv . s \equiv t}{r}\right]$

T50. $p \equiv . q \equiv r : \equiv : p \equiv r . \equiv q$ $[T42,\ T41]$

T51. $p \equiv q . \equiv r : \equiv : q \equiv p . \equiv r$ $[T45,\ T8]$

T52. $q \equiv s . \equiv : p \equiv q . \equiv r \therefore \equiv \therefore s \equiv q . \equiv : p \equiv q . \equiv r$ $\left[T51\ \frac{q}{p},\ \frac{s}{q},\ \frac{p \equiv q . \equiv r}{r}\right]$

T53. $s \equiv : q \equiv p . \equiv r \therefore \equiv t :: \equiv :: s \equiv . q \equiv p : \equiv r \therefore \equiv t$ $[T47,\ T5]$

T54. $p \equiv q . \equiv r : \equiv : p \equiv . q \equiv r \therefore \equiv \therefore p \equiv r . \equiv q : \equiv : p \equiv q . \equiv r$ $[T25,\ T50]$

T55. $p \equiv . q \equiv r : \equiv : p \equiv q . \equiv r \therefore \equiv \therefore p \equiv . q \equiv r : \equiv : q \equiv p . \equiv r$ $[T31,\ T51]$

T56. $s \equiv . p \equiv r : \equiv \therefore q \equiv s . \equiv : p \equiv q . \equiv r :: \equiv :: s \equiv . p \equiv r : \equiv \therefore s \equiv q . \equiv : p \equiv q . \equiv r$ $[T33,\ T52]$

T57. $p \equiv . q \equiv r : \equiv . s \equiv t \therefore \equiv :: s \equiv : q \equiv p . \equiv r \therefore \equiv t :\cdot: \equiv :\cdot: p \equiv . q \equiv r : \equiv . s \equiv t \therefore \equiv :: s \equiv . q \equiv p : \equiv r \therefore \equiv t$ $[T37,\ T53]$

T58. $p \equiv r . \equiv q : \equiv : p \equiv q . \equiv r$ $[T54,\ T13]$

T59. $p \equiv . q \equiv r : \equiv : q \equiv p . \equiv r$ $[T55,\ A2]$

T60. $q \equiv p . \equiv r : \equiv . s \equiv t \therefore \equiv :: s \equiv : q \equiv p . \equiv r \therefore \equiv t$ $\left[T59\ \frac{q \equiv p . \equiv r}{p},\ \frac{s}{q},\ \frac{t}{r}\right]$

T61. $q \equiv s . \equiv : p \equiv r . \equiv q \therefore \equiv \therefore q \equiv s . \equiv : p \equiv q . \equiv r$ $[T30,\ T58]$

T62. $q \equiv p . \equiv r : \equiv : p \equiv . q \equiv r$ $[T10,\ T59]$

T63. $r \equiv t . \equiv p : \equiv : t \equiv . r \equiv p$ $\left[T62\ \frac{t}{p},\ \frac{r}{q},\ \frac{p}{r}\right]$

T64. $p \equiv . q \equiv r : \equiv . s \equiv t \therefore \equiv \therefore q \equiv p . \equiv r : \equiv . s \equiv t$ $[T46,\ T59]$

T65. $p \equiv . q \equiv r : \equiv . s \equiv t \therefore \equiv \therefore q \equiv p . \equiv r : \equiv . s \equiv t :: \equiv :\cdot: p \equiv . q \equiv r : \equiv . s \equiv t \therefore \equiv :: s \equiv : q \equiv p . \equiv r \therefore \equiv t$ $[T35,\ T60]$

T66. $s \equiv . p \equiv r : \equiv \therefore q \equiv s . \equiv : p \equiv r . \equiv q :: \equiv :: s \equiv . p \equiv r : \equiv \therefore q \equiv s . \equiv : p \equiv q . \equiv r$ $[T34,\ T61]$

T67. $r \equiv t . \equiv p : \equiv : q \equiv r . \equiv . s \equiv t \therefore \equiv \therefore t \equiv . r \equiv p : \equiv : q \equiv r . \equiv . s \equiv t$ $[T48,\ T63]$

T68. $p \equiv . q \equiv r : \equiv . s \equiv t \therefore \equiv :: s \equiv : q \equiv p . \equiv r \therefore \equiv t$ $[T65,\ T64]$

T69. $s \equiv . p \equiv r : \equiv \therefore q \equiv s . \equiv : p \equiv q . \equiv r$ $[T66,\ T23]$

T70. $s \equiv . p \equiv r : \equiv \therefore s \equiv q . \equiv : p \equiv q . \equiv r$ $[T56,\ T69]$

T71. $r \equiv t . \equiv \therefore p \equiv : q \equiv r . \equiv . s \equiv t :: \equiv \therefore r \equiv t . \equiv p : \equiv : q \equiv r . \equiv . s \equiv t :\cdot: \equiv :\cdot: r \equiv t . \equiv \therefore p \equiv : q \equiv r . \equiv . s \equiv t :: \equiv \therefore t \equiv . r \equiv p : \equiv : q \equiv r . \equiv . s \equiv t$ $[T39,\ T67]$

T72. $p \equiv . q \equiv r : \equiv . s \equiv t \therefore \equiv :: s \equiv . q \equiv p : \equiv r \therefore \equiv t$
[*T57*, *T68*]

T73. $r \equiv t . \equiv \therefore p \equiv : q \equiv r . \equiv . s \equiv t :: \equiv \therefore t \equiv . r \equiv p : \equiv : q \equiv r . \equiv . s \equiv t$ [*T71*, *T6*]

T74. $p \equiv . q \equiv r : \equiv . s \equiv t \therefore \equiv \therefore s \equiv . q \equiv p : \equiv . r \equiv t$ [*T43*, *T72*]

T75. $s \equiv . q \equiv p : \equiv :: r \equiv t . \equiv \therefore p \equiv : q \equiv r . \equiv . s \equiv t :\cdot: \equiv :: s \equiv . q \equiv p : \equiv \because t \equiv . r \equiv p : \equiv : q \equiv r . \equiv . s \equiv t$
[*T38*, *T73*]

T76. $p \equiv . q \equiv r : \equiv . s \equiv t \therefore \equiv \therefore p \equiv : q \equiv r . \equiv . s \equiv t :: \equiv :: s \equiv . q \equiv p : \equiv . r \equiv t \therefore \equiv \therefore p \equiv : q \equiv r . \equiv . s \equiv t$
[*T49*, *T74*]

T77. $s \equiv . q \equiv p : \equiv . r \equiv t \therefore \equiv \therefore p \equiv : q \equiv r . \equiv . s \equiv t$
[*T76*, *T14*]

T78. $s \equiv . q \equiv p : \equiv :: r \equiv t . \equiv \because p \equiv : q \equiv r . \equiv . s \equiv t$
[*T18*, *T77*]

T79. $s \equiv . q \equiv p : \equiv \because t \equiv . r \equiv p : \equiv : q \equiv r . \equiv . s \equiv t$
[*T75*, *T78*]

2) Jede Äquivalenz vom Grade 1 und 2 [von einem Ausdruck X werde ich hier sagen, dass er eine Äquivalenz vom Grade n ist, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: *a*) X ist eine Äquivalenz, deren beide Seiten Äquivalenzensätze sind, die genau je n (nicht unbedingt verschiedene) Variablen enthalten, *b*) wenn eine von den Seiten der Äquivalenz X irgendeine Variable Y enthält, so enthält die zweite Seite der Äquivalenz X genau so viel mit Y gleichgestalteter Variablen, wie viel von ihnen sich, einschliesslich der Variablen Y selbst, auf der ersten Seite der Äquivalenz finden] ist im System $\mathfrak{S}$ auf Grund der Theoreme *T19*, *T7*, *T20* und *T21* beweisbar.

3) Wenn —

a) A ein Äquivalenzensatz ist, der genau n ($n \geqslant 3$) Variablen enthält (welche nicht unbedingt verschieden zu sein brauchen),

b) V eine zu A gehörige Variable ist,

c) jede Äquivalenz von einem von n niederen Grade im System $\mathfrak{S}$ beweisbar ist, —

so ist im System $\mathfrak{S}$ eine gewisse Äquivalenz vom Grade n beweisbar, deren linke Seite mit A gleichgestaltet ist, und deren rechte Seite eine Äquivalenz bildet, deren rechte Seite mit V gleichgestaltet ist.

Davon können wir uns mit Hilfe einer Schlussfolgerung überzeugen, die sich in groben Zügen folgendermassen darstellen lässt:

Nehmen wir an, dass für gewisse A, n und V die Bedingungen a—c erfüllt sind. Aus a ergibt sich, dass

d) jede von den Seiten der Äquivalenz A weniger, als n, Variablen enthält,

aus a und b, dass

e) einer der folgenden vier Fälle eintritt:

α) V ist die rechte Seite der Äquivalenz A,

β) V ist die linke Seite der Äquivalenz A,

γ) V gehört zur rechten Seite der Äquivalenz A, aber erschöpft diese Seite nicht,

δ) V gehört zur linken Seite der Äquivalenz A, aber erschöpt diese Seite nicht.

f) Wenn der Fall α eintritt, so ist die Äquivalenz, deren beide Seiten mit A gleichgestaltet sind, augenscheinlich (gemäss *a*) eine Äquivalenz vom Grade n, deren linke Seite mit A gleichgestaltet ist, und deren rechte Seite eine Äquivalenz bildet, deren rechte Seite mit V gleichgestaltet ist; die gesagte Äquivalenz vom Grade n ist im System $\mathfrak{S}$ auf Grund des Theorems *T19* beweisbar, ist also eine vom Satze *3*, von dessen Richtigkeit wir uns überzeugen wollen, erforderte Äquivalenz.

g) Wenn der Fall β eintritt, so bildet die Äquivalenz (nennen wir sie B), deren linke Seite mit A gleichgestaltet ist, die rechte Seite hingegen eine Äquivalenz ist, deren linke Seite mit der rechten Seite der Äquivalenz A, und deren rechte Seite mit der linken Seite der Äquivalenz A gleichgestaltet ist, eine erforderte Äquivalenz: die Äquivalenz B ist im System $\mathfrak{S}$ auf Grund von *T7* beweisbar.

h) Wenn der Fall γ eintritt, so können wir dem Umstande gemäss, dass die rechte Seite der Äquivalenz A nach d weniger, als n, Variablen enthält, eine solche Äquivalenz (nennen wir sie C) von einem von n niederen Grade bilden, deren linke Seite gleichgestaltet ist mit der rechten Seite der Äquivalenz A, die rechte Seite hingegen eine Äquivalenz ist, deren rechte Seite mit V gleichgestaltet ist. Die Äquivalenz C ist nach c im System $\mathfrak{S}$ beweisbar. Indem wir in *T69* für „p" mit der linken Seite der rechten Seite der Äquivalenz C gleichgestaltete Sätze, für „q" mit der linken Seite der Äquivalenz A gleichgestaltete Sätze, für „r" mit V gleichgestaltete Sätze, für „*s*“ mit der rechten Seite der Äquivalenz *A* gleichgestaltete Sätze einsetzen, erhalten wir auf diese Weise eine gewisse Äquivalenz (nennen wir sie *D*), die im System $\mathfrak{S}$ auf Grund von *T69* beweisbar ist. Auf Grund der Äquivalenzen *D* und *C* können wir mit Hilfe der „Abtrennungsdirektive“ im System $\mathfrak{S}$ die erforderte Äquivalenz vom Grade *n* beweisen, deren linke Seite mit *A* gleichgestaltet ist, und deren rechte Seite eine Äquivalenz bildet, deren rechte Seite mit *V* gleichgestaltet ist.

i) Wenn der Fall $\mathfrak{d}$ eintritt, so können wir dem Umstande gemäss, dass die linke Seite der Äquivalenz *A* nach *d* weniger, als *n*, Variablen enthält, eine solche Äquivalenz (nennen wir sie *E*) von einem von *n* niederen Grade bilden, deren linke Seite gleichgestaltet ist mit der linken Seite der Äquivalenz *A*, die rechte Seite hingegen eine Aquivalenz ist, deren rechte Seite mit *V* gleichgestaltet ist. Die Äquivalenz *E* ist nach *c* im System $\mathfrak{S}$ beweisbar. Indem wir in *T70* für „*p*“ mit der linken Seite der rechten Seite der Aquivalenz *E* gleichgestaltete Sätze, für „*q*“ mit der rechten Seite der Äquivalenz *A* gleichgestaltete Sätze, für „*r*“ mit *V* gleichgestaltete Sätze, für „*s*“ mit der linken Seite der Äquivalenz *A* gleichgestaltete Sätze einsetzen, erhalten wir auf diese Weise eine gewisse Äquivalenz (nennen wir sie *F*), die im System $\mathfrak{S}$ auf Grund von *T70* beweisbar ist. Auf Grund der Äquivalenzen *F* und *E* können wir mit Hilfe der „Abtrennungsdirektive“ im System $\mathfrak{S}$ die erforderte Äquivalenz vom Grade *n* beweisen, deren linke Seite mit *A* gleichgestaltet ist, und deren rechte Seite eine Äquivalenz bildet, deren rechte Seite mit *V* gleichgestaltet ist.

Aus *e*, *f*, *g*, *h*, *i* ergibt sich, dass im System $\mathfrak{S}$ eine Äquivalenz vom Grade *n* beweisbar ist, deren linke Seite mit *A* gleichgestaltet ist, und deren rechte Seite eine Äquivalenz bildet, deren rechte Seite mit *V* gleichgestaltet ist.

4) Wenn —

a) *A* eine Äquivalenz vom Grade $n\,(n \geqslant 3)$ ist,

b) jede Äquivalenz von einem von *n* niederen Grade im System $\mathfrak{S}$ beweisbar ist, —

so ist *A* im System $\mathfrak{S}$ beweisbar.

Wir können uns davon mit Hilfe einer Schlussfolgerung überzeugen, die sich in groben Zügen folgendermassen darstellen lässt:

Nehmen wir an, dass für gewisse *A* und *n* die Bedingungen *a* und *b* erfüllt sind. Aus *a* ergibt sich, dass es so ein *V* gibt, dass

c) *V* eine Variable ist, die zur linken Seite der Äquivalenz *A* gehört;

gemäss *a*, *c* und *b* wird sich nach den Betrachtungen *sub 3* so ein *B* finden, dass —

d) *B* eine Äquivalenz vom Grade *n* ist,

e) die linke Seite der Äquivalenz *B* mit der linken Seite der Äquivalenz *A* gleichgestaltet ist,

f) die rechte Seite der rechten Seite der Äquivalenz *B* mit *V* gleichgestaltet ist,

g) *B* im System $\mathfrak{S}$ beweisbar ist;

nach *a* und *c* wird sich so ein *V′* finden, dass —

h) *V′* eine Variable ist, die zur rechten Seite der Äquivalenz *A* gehört,

i) *V′* mit *V* gleichgestaltet ist;

gemäss *a*, *h* und *b* wird sich nach den Betrachtungen *sub 3* solch ein *C* finden, dass —

k) *C* eine Äquivalenz vom Grade *n* ist,

l) die linke Seite der Äquivalenz *C* mit der rechten Seite der Äquivalenz *A* gleichgestaltet ist,

m) die rechte Seite der rechten Seite der Äquivalenz *C* mit *V′* gleichgestaltet ist,

n) *C* im System $\mathfrak{S}$ beweisbar ist;

nach *a*, *d*, *e*, *k* und *l* wird sich solch ein *D* finden, dass —

o) *D* eine Äquivalenz vom Grade *n* ist,

p) die linke Seite der Äquivalenz *D* mit der rechten Seite der Äquivalenz *B* gleichgestaltet ist,

q) die rechte Seite der Äquivalenz *D* mit der rechten Seite der Äquivalenz *C* gleichgestaltet ist;

aus *p*, *f*, *i*, *m* und *q* ergibt sich, dass

r) die rechte Seite der linken Seite der Äquivalenz *D* mit der rechten Seite der rechten Seite der Äquivalenz *D* gleichgestaltet ist;

nach *o* und *r* wird sich solch ein *E* finden, dass —

s) *E* eine Äquivalenz von einem von *n* niederen Grade ist,

t) die linke Seite der Äquivalenz *E* gleichgestaltet mit der linken Seite der linken Seite der Äquivalenz *D* ist,

u) die rechte Seite der Äquivalenz *E* gleichgestaltet mit der linken Seite der rechten Seite der Äquivalenz *D* ist;

aus *b* und *s* ergibt sich, dass

v) E im System $\mathfrak{S}$ beweisbar ist;
indem wir in *T79* für „*p*“ mit V gleichgestaltete Sätze, für „*q*“ mit der linken Seite der Äquivalenz E gleichgestaltete Sätze, für „*r*“ mit der rechten Seite der Äquivalenz E gleichgestaltete Sätze, für „*s*“ mit der linken Seite der Äquivalenz A gleichgestaltete Sätze, für „*t*“ mit der rechten Seite der Äquivalenz A gleichgestaltete Sätze einsetzen, erhalten wir auf diese Weise eine neue Äquivalenz F, die die Bedingungen erfüllt:

w) die linke Seite der Äquivalenz F ist (nach *e*, *t*, *p* und *f*) mit B gleichgestaltet,

x) die linke Seite der rechten Seite der Äquivalenz F ist (nach *l*, *u*, *q*, *i* und *m*) mit C gleichgestaltet,

y) die linke Seite der rechten Seite der rechten Seite der Äquivalenz F ist mit E gleichgestaltet,

z) die rechte Seite der rechten Seite der rechten Seite der Äquivalenz F ist mit A gleichgestaltet,

aa) die Äquivalenz F ist im System $\mathfrak{S}$ auf Grund von *T79* beweisbar;
aus *aa*, *w* und *g* ergibt sich, dass

ab) im System $\mathfrak{S}$ mit Hilfe der „Abtrennung“ ein Satz beweisbar ist, der mit der rechten Seite der Äquivalenz F gleichgestaltet ist,
aus *ab*, *x* und *n*, dass

ac) im System $\mathfrak{S}$ auf demselben Wege ein Satz beweisbar ist, der mit der rechten Seite der rechten Seite der Äquivalenz F gleichgestaltet ist,
aus *ac*, *y*, *v* und *z*, — dass A (wiederum mit Hilfe der „Abtrennung“) im System $\mathfrak{S}$ beweisbar ist.

5) Aus *2* und *4* ergibt sich, dass jede Äquivalenz von jedem natürlichen Grade im System $\mathfrak{S}$ beweisbar ist.

6) Wenn —

a) A ein Äquivalenzensatz ist,

b) wenn irgendein V eine zu A gehörige Variable ist, so ist die Zahl der mit V gleichgestalteten Variablen (V einschliesslich), die zu A gehören, eine gerade Zahl, —

so ist A im System $\mathfrak{S}$ beweisbar.

Grober Umriss der Begründung:

Nehmen wir an, dass für ein gewisses A die Bedingungen *a*

und *b* erfüllt sind. Aus *a* ergibt sich, dass sich so ein n finden wird, dass

c) A genau n (nicht unbedingt verschiedene) Variablen enthält;
gemäss *a*, *b* und *c* wird sich solch ein B finden, dass —

d) B eine Äquivalenz vom Grade n ist,

e) die linke Seite der Äquivalenz B eine Äquivalenz vom Grade $\frac{n}{2}$ ist,

f) die rechte Seite der Äquivalenz B gleichgestaltet mit A ist;
aus *d* und *e* ergibt sich nach *5*, dass

g) B und die linke Seite der Äquivalenz B im System $\mathfrak{S}$ beweisbar sind,
aus *g* und *f*, — dass auch A im System $\mathfrak{S}$ (mit Hilfe der „Abtrennung“) beweisbar ist.

7) Wenn irgendein Satz eine zu dem System $\mathfrak{S}$ gehörige These ist, so ist er ein in der gewöhnlichen Theorie der Deduktion beweisbarer Äquivalenzensatz, denn: *a*) beide Axiome des Systems $\mathfrak{S}$ sind Äquivalenzensätze, die in der gewöhnlichen Theorie der Deduktion beweisbar sind; *b*) indem wir auf die in der gewöhnlichen Theorie der Deduktion beweisbaren Äquivalenzensätze die „Einsetzungs-“ und die „Abtrennungsdirektive“, welche für das System $\mathfrak{S}$ angenommen sind, anwenden, erhalten wir immer nur Äquivalenzensätze, die in der gewöhnlichen Theorie der Deduktion beweisbar sind.

8) Keine Absurdität vom Typus 1 [von einem Ausdruck X werde ich hier sagen, dass er eine Absurdität vom Typus n ist, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: *a*) X ist ein Äquivalenzensatz, der genau n Variablen enthält, *b*) keine in X enthaltene Variable ist gleichgestaltet mit einer in X enthaltenen anderen Variablen] ist in der gewöhnlichen Theorie der Deduktion beweisbar — wegen der Widerspruchsfreihet dieser Theorie.

9) Wenn —

a) A eine Absurdität vom Typus $n\,(n \geqslant 2)$ ist,

b) keine Absurdität von einem von n niederen Typus in der gewöhnlichen Theorie der Deduktion beweisbar ist, —

so ist A in der gewöhnlichen Theorie der Deduktion nicht beweisbar.

Grober Umriss der Begründung:

Setzen wir voraus, dass für gewisse A und n die Bedingungen *a* und *b* erfüllt sind, und nehmen wir gleichzeitig an, dass *c*) A in der gewöhnlichen Theorie der Deduktion beweisbar ist. Gemäss *a* wird sich solch ein B finden, dass

d) B eine Äquivalenz vom Grade n ist,

e) die linke Seite der Äquivalenz B mit A gleichgestaltet ist,

f) die rechte Seite der Äquivalenz B eine Absurdität vom Typus n ist,

g) die linke Seite der rechten Seite der Äquivalenz B eine Satzvariable ist,

h) die rechte Seite der rechten Seite der Äquivalenz B eine Absurdität vom Typus $n-1$ ist;

aus *d* ergibt sich nach *5* und *7*, dass

i) B in der gewöhnlichen Theorie der Deduktion beweisbar ist;

nach *i*, *e* und *c* wird sich solch ein C finden, dass —

k) C mit der rechten Seite der Äquivalenz B gleichgestaltet ist,

l) C in der gewöhnlichen Theorie der Deduktion beweisbar ist;

aus *g* und *k* ergibt sich, dass

m) die linke Seite der Äquivalenz C eine Satzvariable ist; indem wir in C für die Variable, welche nach *m* die linke Seite der Äquivalenz C bildet, und welcher nach *k* und *f* keine mit ihr gleichgestaltete Variable auf der rechten Seite dieser Äquivalenz entspricht, das Theorem *T19* einsetzen, erhalten wir eine neue Äquivalenz D, die folgende Bedingungen erfüllt:

n) D ist in der gewöhnlichen Theorie der Deduktion auf Grund von C beweisbar (gemäss *l*),

o) die linke Seite der Äquivalenz D ist mit *T19* gleichgestaltet,

p) die rechte Seite der Äquivalenz D ist eine Absurdität vom Typus $n-1$ (gemäss *k* und *h*);

aus *n* und *o* ergibt sich, dass

r) die rechte Seite der Äquivalenz D in der gewöhnlichen Theorie der Deduktion beweisbar ist,

aus *b* und *p* dagegen, dass

s) die rechte Seite der Äquivalenz D in der gewöhnlichen Theorie der Deduktion nicht beweisbar ist;

s widerspricht dem *r*; es muss also unsere Annahme irrig sein, dass die Bedingungen *a*, *b* und *c* zugleich erfüllt sind.

10) Aus *8* und *9* ergibt sich, dass keine Absurdität von einem natürlichen Typus in der gewöhnlichen Theorie der Deduktion beweisbar ist.

11) Wenn —

a) A ein Äquivalenzensatz ist,

b) V eine zu A gehörige Variable ist,

c) die Zahl der mit V gleichgestalteten Variablen (V einschliesslich), die zu A gehören, eine ungerade Zahl ist, —

so ist A in der gewöhnlichen Theorie der Deduktion nicht beweisbar.

Grober Umriss der Begründung:

Setzen wir voraus dass für gewisse A und V die Bedingungen *a* — *c* erfüllt sind, und nehmen wir gleichzeitig an, dass

d) A in der gewöhnlichen Theorie der Deduktion beweisbar ist. Aus *d* ergibt sich nach *10*, dass

e) A keine Absurdität von einem natürlichen Typus ist;

gemäss *a*, *b*, *c* und *e* wird sich solch ein B finden, dass —

f) B eine Äquivalenz von einem natürlichen Grade ist,

g) die linke Seite der Äquivalenz B gleichgestaltet mit A ist,

h) die linke Seite der rechten Seite der Äquivalenz B eine Äquivalenz von einem natürlichen Grade ist,

i) die rechte Seite der rechten Seite der Äquivalenz B eine Absurdität von einem natürlichen Typus ist;

aus *f* und *h* ergibt sich nach *5* und *7*, dass —

k) B in der gewöhnlichen Theorie der Deduktion beweisbar ist,

l) die linke Seite der rechten Seite der Äquivalenz B in der gewöhnlichen Theorie der Deduktion beweisbar ist;

aus *k*, *g* und *d* schliessen wir, dass

m) die rechte Seite der Äquivalenz B in der gewöhnlichen Theorie der Deduktion beweisbar ist,

aus *m* und *l*, dass

n) die rechte Seite der rechten Seite der Äquivalenz B in der gewöhnlichen Theorie der Deduktion beweisbar ist;

aus *i* ergibt sich nach *10*, dass

o) die rechte Seite der rechten Seite der Äquivalenz B in der gewöhnlichen Theorie der Deduktion nicht beweisbar ist;

o widerspricht dem *n*; es muss also unsere Annahme irrig sein, dass die Bedingungen *a* — *c* und *d* zugleich erfüllt sind.

12) Wenn —

a) A ein Äquivalenzensatz ist,

b) A in der gewöhnlichen Theorie der Deduktion beweisbar ist, —

so ist A im System $\mathfrak{S}$ beweisbar.

Kommentar: Nehmen wir an, dass für ein gewisses A die Bedingungen a und b erfüllt sind. Aus a und b ergibt sich nach *11*, dass,

c) wenn irgendein V eine zu A gehörige Variable ist, so ist die Zahl der mit V gleichgestalteten Variablen (V einschliesslich), die zu A gehören, eine gerade Zahl;

aus a und c schliessen wir — den Betrachtungen *sub 6* gemäss —, dass A im System $\mathfrak{S}$ beweisbar ist.

13) Aus *12* und *7* ergibt sich, dass das System $\mathfrak{S}$ alle in der gewöhnlichen Theorie der Deduktion beweisbaren Äquivalenzensätze und keine anderen Sätze enthält.

§ 4. Ein weiteres Entwicklungsstadium der Protothetik habe ich erhalten, indem ich über die Frage nachdachte, mittels welcher Axiome und Direktiven man das im vorhergehenden § besprochene System $\mathfrak{S}$ [1] verstärken müsste, um aus ihm ein System des gewöhnlichen „Aussagenkalküls“ zu erhalten, vervollständigt durch die Hinzufügung der These, die besagt, dass $[p, q, f] .\therefore p \equiv q . \supset : f(p) . \equiv . f(q)$, zugleich mit allen Konsequenzen dieser These. Es lag mir an der Konstruierung eines Systems, in welchem unter anderen eben solch eine These beweisbar wäre, denn diese These hatte für mich seit dem J. 1922 und hat bis nun gerade solch eine Geltung, wie jede These des gewöhnlichen „Aussagenkalküls“ überhaupt (mit den Zweifeln theoretischer Natur, welche in Bezug auf die in Rede stehende These jemandem aufkommen könnten, werde ich mich aus technisch-redaktionellen Gründen erst in einem der weiteren Abschnitte etwas näher beschäftigen). Das auf diesem Wege von mir aufgebaute System eines verstärkten „Aussagenkalküls“ werde ich hier der Kürze halber das System $\mathfrak{S}_1$ nennen; dieses System charakterisiert sich unter anderem durch folgende Eigenschaften:

a) Im System $\mathfrak{S}_1$ treten „Variablen“ aller solcher „semantischen Kategorien“ auf, die in ihm durch irgendwelche „Konstanten“ repräsentiert sind; im besonderen haben wir es in diesem System — im Gegensatz zum System der Herren Whitehead und Russell — mit variablen Funktionszeichen bei Argumenten, die Sätze sind, zu tun [1].

1) Mit gewissen Thesen, deren jede, wie es Herr Wajsberg im J. 1926 nachgewiesen hat, als das einzige Axiom des Systems $\mathfrak{S}$ angenommen werden könnte anstatt des Axiomensystems, das aus den Axiomen *A1* und *A2* besteht, werde ich mich in einem der weiteren Abschnitte dieser Mitteilung beschäftigen.

b) Von zwei Arten der Variablen, den sogenannten scheinbaren Variablen und den sogenannten reellen Variablen, welche noch von den Herren Whitehead und Russell in der ersten Ausgabe der „*Principia mathematica*“ angenommen wurden [2], sind im System $\mathfrak{S}_1$ nur die „scheinbaren“ Variablen erhalten geblieben. [Von der Überflüssigkeit des Einführens von „reellen“ Variablen in die Mathematik gab ich mir schon im J. 1920 Rechenschaft. Herr Łukasiewicz schreibt in seiner im J. 1921 herausgegebenen „*Zweiwertigen Logik*“, die mit Hilfe von „scheinbaren“ Variablen allein aufgebaut wird: „Nur scheinbare Variablen anerkennend, bin ich der Meinung von Prof. Leśniewski nachgefolgt“ [3]. Die Überflüssigkeit des Unterscheidens der „reellen“ von den „scheinbaren“ Variablen anerkennen in der zweiten Ausgabe des Bandes I der „*Principia mathematica*“ aus dem J. 1925 die Herren Whitehead und Russell [4].]

Die Axiome des Systems $\mathfrak{S}_1$ könnte man in einer Symbolik, welche der Symbolik der Herren Whitehead und Russell nachgebildet ist, die bekanntlich eine Entwicklung der Symbolik des Herrn Peano darstellt [5], auf folgende Weise aufschreiben:

Ax. I. $[p, q, r] .\therefore p \equiv r . \equiv . q \equiv p : \equiv . r \equiv q$ [6]

Ax. II. $[p, q, r] .\therefore p \equiv . q \equiv r : \equiv : p \equiv q . \equiv r$ [7]

Ax. III. $[g, p] :\cdot : [f] :: g(p, p) . \equiv .\therefore [r] : f(r, r) . \equiv . g(p, p) : \equiv : [r] : f(r, r) . \equiv . g(p \equiv . [q] . q, p) :: \equiv . [q] . g(q, p)$

[Davon, dass das *Ax. III* im gewöhnlichen „Aussagenkalkül“, verstärkt durch die Hinzufügung der These, die besagt, dass

(*a*) $[p, q, f] .\therefore p \equiv q . \supset : f(p) . \equiv . f(q)$,

beweisbar ist, habe ich mich überzeugt, indem ich mich stützte auf das oben erwähnte Th. 10 aus der Arbeit Tarski$_1$ und auf die aus dem J. 1922 stammenden Resultate der Forschungen von Herrn Tarski, die die Äquivalenzen betrafen, welche zwischen der These,

1) Vrgl.: Whitehead-Russell$_1$. S. 7.

2) Vrgl.: Whitehead-Russell$_1$. SS. 16 und 17.

3) Łukasiewicz$_1$. S. 3.

4) Vrgl.: Whitehead-Russell$_1$. SS. XIII und XVIII.

5) Vrgl.: Whitehead-Russell$_1$. S. 4.

6) Vrgl. *A1* im § 3.

7) Vrgl. *A2* im § 3.

nach der $[p, q, f]: p \equiv q \,.\, f(p) \,.\supset.\, f(q)$, und verschiedenen anderen Thesen des „Aussagenkalküls" bestehen[1]: auf eine vollkommen banale Weise die betreffenden Schlussfolgerungsmethoden des Herrn Tarski anwendend, habe ich in dem durch die Hinzufügung der These a verstärkten „Aussagenkalkül" festgesetzt, dass —

$$(b) \qquad [g, p]: g(p, p) \,.\, g\big(\sim(p), p\big) \,.\equiv.\, [q] \,.\, g(q, p)$$ [2]

und

$$(c) \qquad [g, p] :: \sim(p) \,.\equiv: p \equiv. [q] \,.\, q \,.\therefore\supset: g\big(\sim(p), p\big) \,.\equiv.\, g(p \equiv. [q] \,.\, q, p)$$ [3];

erwägend, dass

$$(d) \qquad [p] \therefore \sim(p) \,.\equiv: p \equiv. [q] \,.\, q$$ [4],

folgerte ich aus c und d, dass

$$(e) \qquad [g, p]: g\big(\sim(p), p\big) \,.\equiv.\, g(p \equiv. [q] \,.\, q, p),$$

und weiter aus b und e, dass

$$(f) \qquad [g, p]: g(p, p) \,.\, g(p \equiv. [q] \,.\, q, p) \,.\equiv.\, [q] \,.\, g(q, p);$$

auf eine zu der von Herrn Tarski im Beweis des Th. 10 aus der Arbeit Tarski$_1$ angewandten Schlussfolgerungsmethode vollständig analoge Weise habe ich mich überzeugt, dass

$$(g) \qquad [p, q] \therefore\cdot p \,.\, q \,.\equiv :: [f] :: p \equiv \therefore [r] : f(r, r) \,.\equiv p : \equiv : [r] : f(r, r) \,.\equiv q;$$

aus f und g habe ich das *Ax. III* erhalten. Ich bemerke hier gelegentlich, dass, wie dies sich aus den in den weiteren Abschnitten dieser Mitteilung enthaltenen Betrachtungen ergeben wird, die Ausdrücke, die in den Axiomen *Ax. I* — *Ax. III* auftreten, nur zu zwei verschiedenen „semantischen Kategorien" gehören: der „semantischen Kategorie", repräsentiert z. B. durch die Variablen „p" und „r" in dem Ausdruck „$p \equiv r$", und der „semantischen Kategorie", repräsentiert z. B. durch das Zeichen „$\equiv$" oder auch durch die Variable „f" in dem Ausdruck „$f(r, r)$"; wenn ich mich beim Formulieren der Axiomatik des Systems $\mathfrak{S}_1$ für das Operieren mit Ausdrücken entschlossen hätte, die noch zur dritten „semantischen Kategorie" gehören, nämlich mit variablen Funktionszeichen bei nur einem Satzargument, hätte ich, wie ich es schon in der Entstehungszeit des Axiomensystems *Ax. I* — *Ax. III* gut wusste, dem

[1] Vrgl.: Tarski$_2$. SS. 22 und 24. Tarski$_3$. SS. 64, 65, 67, 68 und 71—73.

[2] Vrgl.: Tarski$_2$. SS. 18, 19 und 24. Tarski$_3$. SS. 67, 68 und 73.

[3] Vrgl.: Tarski$_2$. S. 24. Tarski$_3$. S. 73.

[4] Vrgl.: Schröder$_1$. S. 77. Tarski$_1$. S. 197.

Ax. III eine etwas kürzere Gestalt geben können; das Einführen noch einer dritten „semantischen Kategorie" in die Axiomatik des Systems $\mathfrak{S}_1$ wollte ich aus annähernd solchen Antrieben vermeiden, welche die Bemühungen zahlreicher Forscher in ihrem Streben nach Verringerung z. B. der Zahl der Axiome oder der Zahl der primitiven Termine dieser oder jener Theorie leiten.]

In der von mir ersonnenen Symbolik haben die Axiome des Systems $\mathfrak{S}_1$ folgende, durch das Vergleichen beider Formen der entsprechenden Axiome leicht zu entziffernde, Gestalt [die Ausdrücke vom Typus „$\varphi(p\ q)$" vertreten hier die entsprechenden Ausdrücke vom Typus „$p \equiv q$" aus den Axiomen *Ax. I* — *Ax. III*]:

$$A1. \quad \llcorner p\ q\ r \lrcorner \ulcorner \varphi\Big(\varphi\big(\varphi(p\ r)\varphi(q\ p)\big)\varphi(r\ q)\Big)\urcorner$$

$$A2. \quad \llcorner p\ q\ r \lrcorner \ulcorner \varphi\Big(\varphi\big(p\ \varphi(q\ r)\big)\ \varphi\big(\varphi(p\ q)\, r\big)\Big)\urcorner$$

$$A3. \quad \llcorner g\ p \lrcorner \ulcorner \varphi\Bigg(\llcorner f \lrcorner \ulcorner \varphi\bigg(g(p\ p)\varphi\Big(\llcorner r \lrcorner \ulcorner \varphi\big(f(r\ r)\, g(p\ p)\big)\urcorner \llcorner r \lrcorner \ulcorner \varphi\Big(f(r\ r)\, g \big(\varphi(p \llcorner q \lrcorner \ulcorner q \urcorner)\, p\big)\Big)\urcorner\Big)\bigg)\urcorner \llcorner q \lrcorner \ulcorner g(q\ p)\urcorner\Bigg)\urcorner$$

Die neuen Sätze erhielt ich im System $\mathfrak{S}_1$ auf Grund schon zu dem System gehöriger Sätze, indem ich folgende sechs Direktiven anwandte (ich beschränke mich in diesem § einstweilen auf eine nur ganz allgemeine Charakterisierung dieser Direktiven):

α) die „Abtrennungsdirektive" — eine solche, wie im System $\mathfrak{S}$;

β) die „Einsetzungsdirektive" [1];

γ) die „Direktive der Verteilung des Quantifikators", welche in dem Fall, dass irgendeine These T schon zu dem System gehört, die aus einem universalen Quantifikator Q und einer „unter" diesem Quantifikator stehenden Äquivalenz A zusammengesetzt ist, eine neue These zum System hinzuzufügen gestattet, welche aus der These T durch „Versetzung" — auf eine genau bestimmte und in der Praxis keine Zweifel aufdrängende Weise — aller oder nur

[1] Vrgl. unten im § 11 *T. E. XLVII* und *T. E. XLVIII* und weiter unten in demselben § 11 den Punkt 4 der Vorschrift, betreffend die Konstruktionsmethode des Systems $\mathfrak{S}_5$.

einiger im Quantifikator Q enthaltenen Variablen in die Quantifikatoren vor die linke und vor die rechte Seite der Äquivalenz A gebildet ist [auf Grund dieser Direktive ist es z. B. erlaubt, die These „$\phi(\llcorner p q r\lrcorner \ulcorner\phi(\phi(pr)\phi(qp))\urcorner \llcorner q r\lrcorner \ulcorner\phi(rq)\urcorner)$“ oder die These „$\llcorner r\lrcorner \ulcorner\phi(\llcorner p q\lrcorner \ulcorner\phi(\phi(pr)\phi(qp))\urcorner \llcorner q\lrcorner \ulcorner\phi(rq)\urcorner)\urcorner$“ zu dem System hinzuzufügen, sobald man schon im System das Axiom $A1$ hat; es ist auch nach der genannten Direktive gestattet, die These „$\phi(\llcorner fgp\lrcorner \ulcorner\phi(g(pp)\phi(\llcorner r\lrcorner \ulcorner\phi(f(rr)g(pp))\urcorner \llcorner r\lrcorner \ulcorner\phi(f(rr)g(\phi(p\llcorner q\lrcorner \ulcorner q\urcorner)p))\urcorner))\urcorner \llcorner gpq\lrcorner \ulcorner g(qp)\urcorner)$“ oder die These „$\llcorner p\lrcorner \ulcorner\phi(\llcorner fg\lrcorner \ulcorner\phi(g(pp)\phi(\llcorner r\lrcorner \ulcorner\phi(f(rr)g(pp))\urcorner \llcorner r\lrcorner \ulcorner\phi(f(rr)g(\phi(p\llcorner q\lrcorner \ulcorner q\urcorner)p))\urcorner))\urcorner \llcorner gg\lrcorner \ulcorner g(qp)\urcorner)\urcorner$“ in dem System abzuleiten, sobald man schon im System über das Axiom $A3$ verfügt; u. s. w.[1]][2];

δ) die Direktive des Aufschreibens von Definitionen, welche, indem sie gewissen genau festgestellten Bedingungen genügen, die Gestalt

[1] Vrgl.: Whitehead-Russell$_1$. Theoreme ∗ 10·271 und ∗ 11·33.

[2] Vrgl. unten im § 11 *T. E. XLV* und den Punkt 2 der Vorschrift, betreffend die Konstruktionsmethode des Systems $\mathfrak{S}_5$. Ich erwähne hier zur Vermeidung eventueller Missverständnisse, dass, allein genommen, keine der Direktiven des Systems $\mathfrak{S}_1$ bei Hinzufügung neuer Thesen zu dem System die Methode der „Abtrennung unter dem Quantifikator“, d. h. die Methode des Folgerns nach dem Schema —

(1) $\llcorner a\, b \ldots k\, l \ldots x\, y \ldots\lrcorner \ulcorner\phi(f(a\, b \ldots k\, l \ldots)\, g(a\, b \ldots x\, y \ldots))\urcorner$

und

(2) $\llcorner a\, b \ldots k\, l \ldots\lrcorner \ulcorner f(a\, b \ldots k\, l \ldots)\urcorner$,

also

(3) $\llcorner a\, b \ldots x\, y \ldots\lrcorner \ulcorner g(a\, b \ldots x\, y \ldots)\urcorner$ —,

anzuwenden erlaubt. Eine Ableitung aus irgendwelchen Thesen vom Typus 1 und 2 der entsprechenden These vom Typus 3 kann in dem betrachteten System schrittweise durchgeführt werden, indem man zuerst aus der These 1 nach der Direktive γ die entsprechende These erhält, die besagt, dass

(1*) $\phi(\llcorner a\, b \ldots k\, l \ldots\lrcorner \ulcorner f(a\, b \ldots k\, l \ldots)\urcorner \llcorner a\, b \ldots x\, y \ldots\lrcorner \ulcorner g(a\, b \ldots x\, y \ldots)\urcorner)$,

und indem man nachher die gewöhnliche „Abtrennung“, die mit der Direktive α übereinstimmt, auf die Thesen 1* und 2 anwendet.

von Äquivalenzen besitzen, die das *Definiendum* in ihrer linken Seite enthalten;

ε) die Direktive des Aufschreibens von Definitionen, welche, indem sie gewissen genau festgesetzten Bedingungen genügen, aus einem universalen Quantifikator und einer „unter“ diesem Quantifikator stehenden Äquivalenz, die das *Definiendum* in ihrer linken Seite enthält, bestehen;

ζ) die Direktive, welche die Quantifikatoren betrifft und welche in der Praxis in Verbindung mit den übrigen Direktiven die Durchführung aller allgemein bekannten Operationen mit den universalen Quantifikatoren gestattet (auf diese Direktive werde ich etwas näher im § 6 eingehen).

Auf Grund der weiteren Abschnitte dieser Mitteilung wird sich der Leser orientieren können, wie konkret im System $\mathfrak{S}_1$ die Ableitungen der verschiedenen Theoreme des gewöhnlichen „Aussagenkalküls“ aussahen.

§ 5. Auf die Idee, in die Axiomatik des Systems $\mathfrak{S}_1$ das Axiom $A3$ einzuführen, bin ich unter dem unmittelbaren Einfluss der oben erwähnten *„Zweiwertigen Logik“* des Herrn Łukasiewicz gekommen, welche die Tradition der Verifizierung einzelner Thesen des „Aussagenkalküls“ durch Einsetzung von „Nullen“ und „Einsen“ für die in diesen Thesen auftretenden Variablen kontinuiert[1] und welche unter ihren Direktiven eine folgendermassen lautende Direktive enthält: „*(d)* Ich anerkenne jeden Ausdruck, der Variablen mit universalen Quantifikatoren enthält, und aus dem durch Einsetzung der Werte 0 und 1 an Stelle der Variablen lauter anerkannte Ausdrücke entstehen“[2]. Die These $A3$ entstand eben, als eine Realisation der Tendenz, die theoretischen Möglichkeiten, welche aus der genannten Direktive fliessen, in den Rahmen irgendeines speziellen Axioms zu fassen. Diese These ermöglichte mir, wie es sich aus einem der weiteren Abschnitte dieser Mitteilung zeigen wird, die Anwendung in der Praxis im System $\mathfrak{S}_1$, von einer gewissen Stelle in diesem System an, der Methode des Beweisens *respective* des Widerlegens von Thesen, die mit universalen Quantifikatoren, Satzvariablen enthaltend, beginnen, mittels Berufung auf entsprechende solche schon im System bewiesene oder widerlegte

[1] Vrgl.: Łukasiewicz$_1$ S. 3.

[2] *Op. cit.*, S. 11.

Thesen, welche aus den Thesen, die eben bewiesen oder widerlegt werden sollen, durch entsprechende Einsetzung für die zu ihnen gehörigen Satzvariablen der im System $\mathfrak{S}_1$ den „Nullen" und „Einsen" des traditionellen „Aussagenkalküls" entsprechenden Ausdrücke „$\llcorner q \lrcorner \ulcorner q \urcorner$" und „$\phi(\llcorner q \lrcorner \ulcorner q \urcorner \llcorner q \lrcorner \ulcorner q \urcorner)$"[1], gebildet werden könnten.

Ich wusste nicht, im System $\mathfrak{S}_1$ eine Reihe von Thesen zu beweisen, die in diesem Systeme sinnvoll sind und die für mich dieselbe Geltung haben, wie jede bekannte These des gewöhnlichen „Aussagenkalküls" überhaupt. Ich konnte mir im besonderen in dieser Beziehung mit den zahlreichen Thesen keinen Rat schaffen, welche Variablen enthalten, die nicht Satzvariablen, sondern variable Funktionszeichen sind. Es war mir gänzlich unbekannt, ob im System $\mathfrak{S}_1$ z. B. die These ableitbar ist, die man in einer im Stile der Symbolik der Herren Whitehead und Russell gehaltenen Symbolik in die Form des Satzes „$[f, g] \therefore [p, q] : f(p, q) . \equiv . g(p, q) : \equiv : [\varphi] : \varphi\{f\} . \equiv . \varphi\{g\}$" fassen könnte. Da ich ein System des „Aussagenkalküls" aufbauen wollte, welches, das System $\mathfrak{S}_1$ enthaltend, zugleich die Eigenschaft besitzen sollte, dass ich keine in diesem System sinnvolle These zu konstruieren weiss, die ich nicht in ihm zu beweisen oder zu widerlegen wüsste, habe ich im J. 1922 das System $\mathfrak{S}_1$ mittels einer neuen Direktive η vervollständigt, welche nach dem Muster der oben zitierten Direktive d des Herrn Łukasiewicz gebildet ist und welche überhaupt alle Variablen betrifft, die im System $\mathfrak{S}_1$ auftreten und keine Satzvariablen sind. Die Direktive η gestattete mir, zu dem System eine neue mit einem universalen Quantifikator, welcher variable Funktionszeichen beliebiger „semantischer Kategorien" enthält, beginnende These T hinzuzufügen, wenn zu dem System bereits die Thesen gehören, die man aus der These T erhalten könnte, wenn man in ihr für die genannten Variablen gewisse konstante Funktionszeichen einsetzte, deren Definitionsmethode für alle „semantischen Kategorien" vollständig genau im voraus bestimmt ist. Das aus dem System $\mathfrak{S}_1$ — durch die Vervollständigung dieses Systems mittels der Direktive η — gebildete System werde ich hier der Kürze halber das System $\mathfrak{S}_2$ nennen. Es ist dies eines der zahlreichen möglichen einander gegenseitig äquivalenten Systeme der Theorie,

[1] Vrgl.: Tarski$_1$. S. 197. Tarski$_2$. S. 6.

die von mir Protothetik genannt wird. In sehr freien Worten könnte ich sagen, dass das System $\mathfrak{S}_2$ ein absolut „finitistisches" System ist, denn es gestattet uns für die Variablen jeder „semantischen Kategorie", die im System auftritt, eine genau bestimmte endliche Anzahl verschiedener möglicher Werte festzustellen [zwei Werte für Satzvariablen („Null" und „Eins" des traditionellen „Aussagenkalküls"), vier Werte für variable Funktionszeichen in Satzfunktionen von einem Satzargument[1], sechzehn Werte für variable Funktionszeichen in Satzfunktionen von einem Argument, welches zur „semantischen Kategorie" gehört, zu der die Funktionszeichen in den Satzfunktionen von einem Satzargument gehören, u. dgl.]; eben diesen möglichen Werten der Variablen jeder gegebenen „semantischen Kategorie" entsprechen die oben erwähnten konstanten Funktionszeichen, von denen in der Direktive η die Rede ist. Von dem Charakter der genannten Direktive, welche ich hier nur ganz allgemein dargestellt habe, wird sich der Leser genauer im Zusammenhang mit den weiteren Abschnitten dieser Mitteilung Rechenschaft geben können.

Zur präzisen Formulierung der hier besprochenen Direktive η hatte ich einen komplizierten Apparat zahlreicher terminologischer Hilfserklärungen nötig, der von Natur der Dinge dem eventuellen Leser ein bedeutendes Hindernis beim Verstehen der Konstruktion meines Systems bereiten müsste. Dieser Umstand bewog mich, nach irgendeiner anderen Direktive zu suchen, welche die Erreichung derselben theoretischen Effekte, wie die Direktive η, ermöglichen würde und doch präzise auf irgendeine leichtere Weise formuliert werden könnte. Ich dachte im besonderen über die Frage nach, ob man nicht ein mit dem System $\mathfrak{S}_2$ äquivalentes System der Protothetik aufbauen könnte, wenn man statt der Direktive η irgendeine Direktive annähme, welche eine unmittelbare Feststellung — in dieser oder jener Form — der „Extensionalität" jeder Art von den in der Protothetik auftretenden Funktionen[2] ohne Rücksicht auf die „semantische Kategorie" der betreffenden Funktionszeichen zuliesse. In der genannten Frage habe ich keine konkreten Resultate erreicht. Ich komme noch auf diese Frage im § 7 dieser Mitteilung zurück.

[1] Vrgl.: Tarski$_2$. S. 12. Tarski$_3$. S. 61.
[2] Vrgl.: Whitehead-Russell$_1$. SS. 72—74 und 187.

§ 6. Beim Formulieren der im § 4 erwähnten Direktive ζ zielte ich darauf hin, mir in der Praxis innerhalb des Systems $\mathfrak{S}_1$ die Berechtigung zu sichern, in den schon zu dem System gehörigen Thesen Sätze, die in einer im Stile der Symbolik der Herren Whitehead und Russell gehaltenen Symbolik mittels Formeln vom Typus „$p\supset.[q].f(q)$", „$p\supset.[q,r].f(q,r)$", „$p\supset.[q,r,s].f(q,r,s)$" u. s. w. aufgeschrieben werden können (Zahl und „semantische Kategorien" der Wörter, die im Nachsatz auftreten, sollten hier vollständig beliebig sein), durch diesen Sätzen der Tradition gemäss äquivalente Sätze zu ersetzen, die man in derselben Symbolik mittels entsprechender Formeln vom Typus „$[q]:p\supset.f(q)$", „$[q,r]:p\supset.f(q,r)$", „$[q,r,s]:p\supset.f(q,r,s)$" u. s. w. aufschreiben kann, und *vice versa* die letzteren Sätze durch die ersteren zu ersetzen. Ich gab mir Rechenschaft, dass ich die hier charakterisierte Berechtigung mit Hilfe der These, die besagt, dass $[f,p,q]\therefore p\equiv q.\supset:f(p).\equiv.f(q)$, und zu deren Ableitung aus den Axiomen des Systems $\mathfrak{S}_1$ ich mich nicht der Direktive ζ zu bedienen brauchte, erreichen würde, wenn ich in diesem System Sätze zu erhalten vermöchte, denen in der erwähnten Symbolik die Sätze „$[f,p]\therefore p\supset.[q].f(q):\equiv:[q]:p\supset.f(q)$", „$[f,p]\therefore p\supset.[q,r].f(q,r):\equiv:[q,r]:p\supset.f(q,r)$", „$[f,p]\therefore p\supset.[q,r,s].f(q,r,s):\equiv:[q,r,s]:p\supset.f(q,r,s)$" u. s. w.[1] entsprechen würden; ich konzentrierte also meine Bemühungen auf das Problem, welche möglichst einfache Direktive es genügen würde anzunehmen, um die Beweisbarkeit im betrachteten System eben dieser Sätze „$[f,p]\therefore p\supset.[q].f(q):\equiv:[q]:p\supset.f(q)$", „$[f,p]\therefore p\supset.[q,r].f[q,r]:\equiv:[q,r]:p\supset.f(q,r)$", „$[f,p]\therefore p\supset.[q,r,s].f(q,r,s):\equiv:[q,r,s]:p\supset.f(q,r,s)$" u. s. w. zu garantieren. Da ich unter den primitiven Terminen meines Systems nicht das Implikationszeichen hatte, und da ich gleichzeitig wollte, dass in den Direktiven dieses Systems nicht *in concreto* die Rede von einzelnen Zeichen wäre, die erst im System definiert werden sollen, habe ich die Direktive ζ auf eine solche Weise formuliert, dass diese Direktive, während sie verschiedene Beziehungen zwischen Äquivalenzen und Quantifikatoren betraf, das Implikationszeichen gar nicht berührte. Indem ich auf diese Weise die in Rede stehende Direktive konstruierte, benutzte ich die schon im § 1 besprochenen Resultate des Herrn Tarski, welche die Definierbarkeit aller bekannten Funktionen der Theorie der Deduktion, im besonderen der Implikationsfunktion, mittels der Äquivalenzfunktion allein, angenommen als primitive Funktion, betreffen.

[1] Vrgl.: Whitehead-Russell$_{\mathrm{I}}$. Theoreme ∗ 10·21 und ∗ 11·3.

Herr Tarski hat die Direktive ζ, die ich in meinem System annahm, etwas vereinfacht, und die auf diese Weise entstandene einfachere Direktive ist noch etwas weiter von mir vereinfacht worden. Den historischen Peripetien, die mit den einzelnen Entwicklungsstadien der Formulierung der betrachteten Direktive verbunden waren, hat der Umstand jegliche Aktualität genommen, dass, wie dies Herr Tarski im J. 1922 nachgewiesen hat, jedwede spezielle Direktive hier überhaupt gänzlich überflüssig ist, denn die oben besprochenen Sätze, die besagen, dass $[f,p]\therefore p\supset.[q].f(q):\equiv:[q]:p\supset.f(q)$, $[f,p]\therefore p\supset.[q,r].f(q,r):\equiv:[q,r]:p\supset.f(q,r)$, $[f,p]\therefore p\supset.[q,r,s].f(q,r,s):\equiv:[q,r,s]:p\supset.f(q,r,s)$ u. s. w., sind im System $\mathfrak{S}_1$ schon mit Hilfe der übrigen Direktiven dieses Systems beweisbar. Die diesbezüglichen Betrachtungen des Herrn Tarski stützten sich unter anderem auf die von mir schon früher festgestellte Möglichkeit, im System $\mathfrak{S}_1$ ohne Hilfe der Direktive ζ folgende Resultate zu erlangen: *a*) Thesen, die allen Thesen des Systems $\mathfrak{S}$ entsprechen; *b*) Thesen, die den aus der Tradition bekannten Theoremen „$[p].0\supset p$" und „$[p]:1\supset p.\equiv p$" entsprechen; *c*) die Anwendbarkeit in der Praxis des Systems $\mathfrak{S}_1$ der Methode des Beweisens von Thesen, die mit universalen Quantifikatoren, Satzvariablen enthaltend, beginnen, mittels Berufung auf entsprechende schon im System bewiesene Theoreme, welche aus den Thesen, die eben bewiesen werden sollen, durch Einsetzung von „Nullen" und „Einsen" für die zu diesen Thesen gehörigen Satzvariablen gebildet werden können.

Indem ich in groben Zügen die von Herrn Tarski angewandte Methode, im System $\mathfrak{S}_1$ ohne Hilfe der Direktive ζ Sätze zu beweisen, welche besagen, dass $[f,p]\therefore p\supset.[q].f(q):\equiv:[q]:p\supset.f(q)$, $[f,p]\therefore p\supset.[q,r].f(q,r):\equiv:[q,r]:p\supset.f(q,r)$, $[f,p]\therefore p\supset.[q,r,s].f(q,r,s):\equiv:[q,r,s]:p\supset.f(q,r,s)$ u. s. w., darstellen will, werde ich mich hier einstweilen angesichts der in diesem Augenblick noch nicht genügenden Vorbereitung des Lesers zum Verstehen der authentischen Symbolik des Systems $\mathfrak{S}_1$ vertretungsweise der Symbolik bedienen, die im Stil der Symbolik der Herren Whitehead und Russell gehalten ist. Den Beweis der These, die besagt, dass $[f,p]\therefore p\supset.[q].f(q):\equiv:[q]:p\supset.f(q)$, könnte man in dieser Symbolik in Übereinstimmung mit Herrn Tarski folgendermassen skizzieren: Es ist gestattet zu behaupten, dass (vrgl. oben die Punkte a und b) —

(1) $[p, q] \therefore p \equiv : q \equiv . p \equiv q$ [1],

(2) $[p, q, r] \therefore p \equiv q . \equiv : r \equiv q . \equiv . p \equiv r$,

(3) $[p] . 0 \supset p$,

(4) $[p] : 1 \supset p . \equiv p$;

aus These 1 schliessen wir auf Grund der Direktive β, dass

(5) $[f] :: 0 \supset . [q] . f(q) : \equiv :: [q] : 0 \supset . f(q) : \equiv \therefore 0 \supset . [q] . f(q) : \equiv : [q] : 0 \supset . f(q)$,

aus 5 auf Grund der Dir. γ, dass

(6) $[f] : 0 \supset . [q] . f(q) : \equiv :: [f] :: [q] : 0 \supset . f(q) : \equiv \therefore 0 \supset . [q] . f(q) : \equiv : [q] : 0 \supset . f(q)$,

aus 3 (Dir. β), dass —

(7) $[f] : 0 \supset . [q] . f(q)$

und

(8) $[f, q] : 0 \supset . f(q)$,

aus 6 und 7 (Dir. α), dass

(9) $[f] :: [q] : 0 \supset . f(q) : \equiv \therefore 0 \supset . [q] . f(q) : \equiv : [q] : 0 \supset . f(q)$,

aus 9 (Dir. γ), dass

(10) $[f, q] : 0 \supset . f(q) : \equiv \therefore [f] \therefore 0 \supset . [q] . f(q) : \equiv : [q] : 0 \supset . f(q)$,

aus 10 und 8 (Dir. α), dass

(11) $[f] \therefore 0 \supset . [q] . f(q) : \equiv : [q] : 0 \supset . f(q)$,

aus 2 (Dir. β), dass

(12) $[f] :: 1 \supset . [q] . f(q) : \equiv . [q] . f(q) \therefore \equiv :: [q] : 1 \supset . f(q) : \equiv . [q] . f(q) \therefore \equiv \therefore 1 \supset . [q] . f(q) : \equiv : [q] : 1 \supset . f(q)$,

aus 12 (Dir. γ), dass

(13) $[f] \therefore 1 \supset . [q] . f(q) : \equiv . [q] . f(q) \therefore \equiv :: [f] :: [q] : 1 \supset . f(q) : \equiv . [q] . f(q) \therefore \equiv \therefore 1 \supset . [q] . f(q) : \equiv : [q] : 1 \supset . f(q)$,

[1] Ich bemerke hier, dass in der gewöhnlichen Theorie der Deduktion die These, nach welcher $p \equiv : q \equiv . p \equiv q$, noch vor dem J. 1922 von Herrn Łukasiewicz bewiesen war.

aus 4 (Dir. β), dass —

(14) $[f] \therefore 1 \supset . [q] . f(q) : \equiv . [q] . f(q)$

und

(15) $[f, q] \therefore 1 \supset . f(q) : \equiv . f(q)$,

aus 13 und 14 (Dir. α), dass

(16) $[f] :: [q] : 1 \supset . f(q) : \equiv . [q] . f(q) \therefore \equiv \therefore 1 \supset . [q] . f(q) : \equiv : [q] : 1 \supset . f(q)$,

aus 16 (Dir. γ), dass

(17) $[f] \therefore [q] : 1 \supset . f(q) : \equiv . [q] . f(q) \therefore \equiv \therefore [f] \therefore 1 \supset . [q] . f(q) : \equiv : [q] : 1 \supset . f(q)$,

aus 15 (Dir. γ), dass

(18) $[f] \therefore [q] : 1 \supset . f(q) : \equiv . [q] . f(q)$,

aus 17 und 18 (Dir. α), dass

(19) $[f] \therefore 1 \supset . [q] . f(q) : \equiv : [q] : 1 \supset . f(q)$,

aus 11 und 19 (vrgl. oben den Punkt c), dass

$$[f, p] \therefore p \supset . [q] . f(q) : \equiv : [q] : p \supset . f(q).$$

Ganz analog würden sich die Beweise von Thesen darstellen lassen, die besagen, dass $[f, p] \therefore p \supset . [q, r] . f(q, r) : \equiv : [q, r] : p \supset . f(q, r)$, $[f, p] \therefore p \supset . [q, r, s] . f(q, r, s) : \equiv : [q, r, s] : p \supset . f(q, r, s)$, u. s. w..

Indem Herr Tarski auf die hier charakterisierte Weise nachwies, dass das Annehmen im System $\mathfrak{S}_1$ der Direktive ζ eine vollständig unnötige Sache ist, hat er gleichzeitig festgestellt, dass zu der eben dargestellten Schlussfolgerung analoge Schlussfolgerungen jede zu der Direktive ζ analoge Direktive auch im Gebiete der auf das System $\mathfrak{S}_1$ gestützten Theorien, im besonderen im Gebiete des Systems meiner „Ontologie", von dem die Rede weiter unten sein wird, zu einer ganz und gar überflüssigen Direktive machen. Herr Tarski hat ausserdem bemerkt, dass auf eine zu der oben angewandten völlig ähnliche Weise alle analogen sinnvollen Thesen bewiesen werden können, in welchen statt der oben betrachteten Ausdrücke vom Typus „$f(q)$", „$f(q, r)$", „$f(q, r, s)$" u. s. w. Ausdrücke von jedwedem Bau auftreten.

§ 7. Schon beim Skizzieren des ersten Umrisses des im § 5 ganz allgemein besprochenen Systems $\mathfrak{S}_2$ habe ich mich überzeugt, dass man in diesem System ausser dem ganzen System $\mathfrak{S}_1$ einschliesslich der ganzen gewöhnlichen Theorie der Deduktion unter anderen folgende Resultate erlangen kann:

a) Thesen, welche in allgemeiner Form die „Extensionalität“ aller im System auftretenden Funktionen unabhängig von der „semantichen Kategorie“ einzelner in diesen Funktionen auftretender Ausdrücke festsetzen. Als Beispiel für eben solch eine These kann die im § 5 erwähnte These gelten, die besagt, dass $[f, g] \therefore [p, q] : f(p, q) . \equiv . g(p, q) : \equiv : [\varphi] : \varphi\{f\} . \equiv . \varphi\{g\}$.

b) Thesen, die in allgemeiner Form festsetzen, dass jede im System auftretende Satzfunktion vom Typus „$\varphi\{f\}$“, „$\varphi\{f, g\}$“, „$\varphi\{f, g, h\}$“ u. s. w., von der wenigstens ein Argument nicht ein Satz ist, für alle möglichen Werte ihrer Argumente erfüllt ist, sobald das entsprechende „logische Produkt“ der Sätze erfüllt ist, die die Werte der betrachteten Funktion für gewisse — genau im voraus in endlicher Anzahl für jede „semantische Kategorie“ von mir vorhergesehene — Werte der Argumente der in Rede stehenden Funktion sind (als Werte der Argumente treten hier eben diejenigen Konstanten der verschiedenen „semantischen Kategorien“ auf, von welchen im § 5 die Rede war). Als Beispiel für eine These, die in die Rubrik *b* fällt, kann die These gelten, die besagt, dass $[\varphi] : [f] . \varphi\{f\} . \equiv . \varphi\{vr\} . \varphi\{as\} . \varphi\{\sim\} . \varphi\{fl\}$, in welcher These das Wort „$\sim$“ ein gewöhnliches Zeichen der Satznegation ist, und die Wörter „vr“, „as“, „fl“ drei andere konstante Funktionszeichen der Satzfunktionen von einem Satzargument sind [1]. Die erwähnte These ist, wie überhaupt Thesen der Kategorie *b*, mit Hilfe konstanter Funktionszeichen auf eine ganz ähnliche Weise gebildet, wie mit Hilfe der Wörter „Fl“ und „Vr“, welche den „Nullen“ und „Einsen“ des traditionellen „Aussagenkalküls“ entsprechen, die in den Arbeiten **Tarski**$_2$ und **Tarski**$_3$ erwogenen und „von der unteren Schranke“ der Funktionen handelnden Theoreme gebildet sind, die besagen, dass $[f] : [p] . f(p) . \equiv . f(Vr) . f(Fl)$ [2], $[f] : [p, q] . f(p, q) . \equiv . f(Vr, Vr) . f(Vr, Fl) . f(Fl, Vr) . f(Fl, Fl)$ [3] u. s. w., und die diejenigen Satzfunktionen betreffen, deren alle Argumente Sätze sind.

Beim Formulieren der Direktive η des Systems $\mathfrak{S}_2$ gab ich mir Rechenschaft davon, dass ich ohne Änderung des theoretischen

[1] Vrgl.: **Tarski**$_2$. S. 7. **Tarski**$_3$. S. 61.
[2] Vrgl.: **Tarski**$_2$. S. 17. **Tarski**$_3$. S. 66.
[3] Vrgl.: **Tarski**$_2$. SS. 23 und 24. **Tarski**$_3$. SS. 72 und 73.

Effekts die genannte Direktive durch irgendeine andere Direktive ersetzen könnte, die mir die Möglichkeit garantieren würde, in dem betrachteten System alle Sätze der Gruppe *b* zu erhalten. In engem Zusammenhang mit diesem Umstand steht die Tatsache, dass das im § 5 erwähnte Problem, ob man nicht ein mit dem System $\mathfrak{S}_2$ äquivalentes System der Protothetik aufbauen könnte, wenn man statt der Direktive η irgendeine Direktive annähme, die den Charakter einer „Extensionalitätsdirektive“ trägt, für mich praktisch dem Problem äquivalent war, ob die Hinzufügung zu dem System $\mathfrak{S}_1$ aller Thesen, die zur Rubrik *a* gehören, auch schon das Erhalten im betrachteten System ohne Anwendung der Direktive η aller zur Rubrik *b* gehörigen Sätze ermöglicht. In betreff der Möglichkeit einer Lösung dieses letzten Problems nach positiver Richtung war ich skeptisch veranlagt: indem ich nicht annahm, dass es möglich wäre, durch das Axiom, das besagt, dass

$$(A3^*) \quad [p, q] \therefore p \equiv q . \equiv : [f, r] : f(p, r) . \equiv . f(q, r),$$

oder auch durch irgendein anderes Axiom ähnlicher Art — im System $\mathfrak{S}_1$ das Axiom *A3* zu ersetzen, welches mit Hilfe des Äquivalenzzeichens anstatt des Zeichens des „logischen Produkts“ festsetzt, dass $[g, p] : g(p, p) . g(p \equiv . [q] . q, p) . \equiv . [q] . g(q, p)$ [1], und indem ich nicht einmal daran glaubte, dass man auf Grund der Axiome *A1*, *A2* und *A3** (*respective* eines anderen Axioms ähnlicher Art) in Übereinstimmung mit den Direktiven des genannten Systems $\mathfrak{S}_1$ die These, die besagt, dass $[f] : [p] . f(p) . \equiv . f(Vr) . f(Fl)$, beweisen könnte, hatte ich analog keine Hoffnung, dass es möglich wäre, mit Hilfe der Thesen der Kategorie *a* im System $\mathfrak{S}_1$, ohne irgendeine neue Direktive anzuwenden, die Thesen der Kategorie *b* zu erhalten, im besonderen z. B., dass es hier möglich wäre, aus der These, die besagt, dass $[f, g] \therefore [p] : f(p) . \equiv . g(p) : \equiv : [\varphi] : \varphi\{f\} . \equiv . \varphi\{g\}$, die These, nach der $[\varphi] : [f] . \varphi\{f\} . \equiv . \varphi\{vr\} . \varphi\{as\} . \varphi\{\sim\} . \varphi\{fl\}$, abzuleiten. Meinen in diesem Gebiete skeptischen Voraussichten zuwider hat Herr **Tarski** im J. 1922 eine gewisse allgemeine Methode angegeben, welche man in den Beweisen einzelner Theoreme der Kategorie *b* anwenden könnte, vorausgesetzt, dass entsprechende Thesen der Kategorie *a* schon zu dem System $\mathfrak{S}_1$ hinzugefügt sind. Die Anwendung der in Rede stehenden allgemeinen Methode ist in

[1] Vrgl. oben im § 4 die Thesen *f* und *g*.

den Arbeiten Tarski$_2$ und Tarski$_3$ an dem Beispiel der schon erwähnten These, die besagt, dass $[\varphi]:[f].\varphi\{f\}.\equiv.\varphi\{vr\}.\varphi\{as\}.\varphi\{\sim\}.\varphi\{fl\}$, skizziert worden [1]. (Ich bemerke hier gelegentlich im Zusammenhang mit der Formulierung dieser These, dass in der Arbeit Tarski$_3$ Herr Tarski schreibt: „La théorie des types de M. Leśniewski, au point de vue de laquelle mes raisonnements sont — comme j'ai écrit — irréprochables, a exercé sur la forme extérieure du présent ouvrage l'influence se manifestant p. ex. dans l'emploi des parenthèses spéciales après les signes des fonctions, n'ayant pas pour arguments de propositions. Cf. **Déf. 6** et **Déf. 7** dans le § 1“ [2]; die Verschiedenheit der Parenthesen in Abhängigkeit von der „semantischen Kategorie“ einzelner Ausdrücke habe ich beim Konstruieren der authentischen Symbolik der Systeme $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ eben aus meiner hier von Herrn Tarski erwähnten „Typentheorie“, von der schon im § 2 die Rede war, übernommen.) Indem, genetisch betrachtet, die diesbezüglichen Abschnitte der Arbeiten Tarski$_2$ und Tarski$_3$ ihre Quelle im Problem haben, mit dem ich im System $\mathfrak{S}_2$ zu tun hatte, stellen sie das Resultat von Beobachtungen des Autors dieser Arbeiten aus einer um einige Monate späteren Zeitperiode dar, als es die Entstehungszeit der übrigen in den genannten Arbeiten enthaltenen Ergebnisse ist, aus welchen ich beim Aufbauen des Systems $\mathfrak{S}_2$ in ganzer Fülle Nutzen ziehen konnte.

Als ich die von Herrn Tarski nachgewiesene Möglichkeit in Betracht zog, Thesen, die zur Kategorie b gehören, auf Grund der Thesen, die zur Kategorie a gehören, ohne Hilfe der Direktive η zu beweisen, habe ich mich aus schon im § 5 dargestellten Gründen entschlossen, im System $\mathfrak{S}_2$ die Direktive η durch eine Direktive zu ersetzen, die den Charakter einer „Extensionalitätsdirektive“ trägt. Diese Direktive werde ich hier die Direktive η^* nennen; ich werde mir weiter unten Mühe geben, sie mit einem solchen Grade der Präzisität zu formulieren, welchen ich nur erreichen kann [3].

Das auf Grund der Axiome *A1*—*A3* mit Hilfe der Direktiven α, β, γ, δ, ε und η^* aufgebaute System der Protothetik werde ich hier der Kürze halber das System $\mathfrak{S}_3$ nennen.

[1] Vrgl.: Tarski$_2$. SS. 24 und 25. Tarski$_3$. SS. 73 und 74.

[2] *Op. cit.*, S. 60. Vrgl.: Tarski$_2$. S. 4.

[3] Vrgl. im § 11 *T. E. IL* und den Punkt 5 der Vorschrift, betreffend die Konstruktionsmethode des Systems $\mathfrak{S}_5$.

§ 8. Ich habe schon im § 2 erwähnt, dass ich mich bemühte, meine Direktiven auf eine solche Weise zu formulieren, dass sie sich mit Leichtigkeit an verschiedene Systeme der Protothetik anpassen liessen — in Abhängigkeit von den primitiven Terminen, auf denen die in Rede stehenden Systeme aufgebaut werden sollten; ich bin auch geneigt anzunehmen, dass jeder, der sich in die Axiome und Direktiven meines auf das Äquivalenzzeichen, als den einzigen primitiven Termin, gestützten Systems der Protothetik gehörig einfühlen wird, beinahe automatisch verstehen wird, die erwähnten Axiome und Direktiven auf die Weise umzugestalten, dass das betrachtete System in ein anderes mit ihm äquivalentes System übergehen wird, welches auf einen beliebigen anderen einzigen primitiven Termin gestützt ist, der die Eigenschaft besitzt, dass es möglich ist, auf ihm ein System der Protothetik aufzubauen. Schon beim Konstruieren des Systems $\mathfrak{S}_2$ gab ich mir Rechenschaft davon, dass, wenn man z. B. nach dem Muster dieses Systems ein mit ihm äquivalentes System der Protothetik aufbauen wollte, welches auf das Implikationszeichen gestützt wäre, mit dessen Hilfe bekanntlich beim etsprechenden Operieren mit universalen Quantifikatoren alle bekannten Funktionen der gewöhnlichen Theorie der Deduktion definierbar sind, man die Axiome und Direktiven annehmen könnte, welche sich in groben Umrissen auf folgende Weise charakterisieren lassen:

A) Direktiven:

α_1) Die „Abtrennungsdirektive“, die die Hinzufügung zum System eines Satzes S gestattet, wenn schon ein Konditionalsatz K, dessen Nachsatz mit S gleichgestaltet ist, und ein Satz, der mit dem Vordersatz des Konditionalsatzes K gleichgestaltet ist, zu dem System gehören.

β_1) Die „Einsetzungsdirektive“.

γ_1) Die „Direktive der Verteilung des Quantifikators“, die zur Direktive γ des Systems $\mathfrak{S}_2$ analog ist, die jedoch nicht auf Äquivalenzen, wie die erwähnte Direktive γ, sondern auf Konditionalsätze angewandt wird [1].

[1] Vrgl.: Whitehead-Russell$_1$. Theoreme $*9{\cdot}21$, $*10{\cdot}27$ und $*11{\cdot}32$. Auf das hier von mir referierte System der Protothetik, das auf dem Implikationszeichen aufgebaut ist, bezieht sich *mutatis mutandis* die von mir oben im § 4 zu der Direktive γ hinzugefügte Anmerkung, die die „Abtrennung unter dem Quantifikator“ betrifft.

δ_1) und ε_1) Die Direktiven, die zur Aufschreibung von Definitionen ermächtigen, welche zu denjenigen Definitionen, zu deren Aufschreibung die Direktiven δ und ε des Systems $\mathfrak{S}_2$ berechtigen, analog sind, welche aber nicht, wie die in den erwähnten Direktiven δ und ε vorhergesehenen Definitionen, in die Form einer Äquivalenz *respective* einer Äquivalenz mit dem ihr vorangehenden universalen Quantifikator, sondern in die Form irgendeiner anderen im voraus für alle Definitionen festgesetzten Funktion gefasst werden, die mittels des Implikationszeichens ausgedrückt und der betreffenden Äquivalenz *respective* der Äquivalenz mit dem ihr vorangehenden universalen Quantifikator äquivalent ist [1]. (Eine solche einfache Funktion könnte man z. B., wie dies Herr Tarski bemerkt hat, leicht im voraus im Zusammenhang mit dem bekannten Theorem festsetzen, das besagt, dass $[p,q]::p.q.\equiv.\therefore[r]\therefore p\supset.q\supset r:\supset r$, und aus dem dem Umstande gemäss, dass $[p,q]:p\equiv q.\equiv.p\supset q.q\supset p$, folgt, dass $[p,q]\because p\equiv q.\equiv::[r]::p\supset q.\supset:q\supset p.\supset r\therefore\supset r$; ich selbst bediente mich hier früher einer etwas komplizierteren Funktion.)

ζ_1) Die zu der Direktive ζ des Systems $\mathfrak{S}_2$ analoge Direktive, die auf dieselben Ziele, wie die Direktive ζ, hinzielt, die aber *sub specie* von Konditionalsätzen, nicht dagegen, wie die Direktive ζ, *sub specie* von Äquivalenzen, redigiert ist.

η_1) Die zu der Direktive η des Systems $\mathfrak{S}_2$ vollständig analoge Direktive.

B) Axiome:

I) Eine beliebige solche Axiomenkombination, die aus in der gewöhnlichen Theorie der Deduktion geltenden und keine Konstanten ausser dem Implikationszeichen enthaltenden Thesen besteht, und auf deren Grundlage – mit Hilfe der Direktiven des Systems – die ganze gewöhnliche Theorie der Deduktion abgeleitet werden könnte. Die einfachste solcher mir in der Entstehungszeit des betrachteten Systems bekannten Axiomenkombinationen war die von Herrn Tarski stammende Kombination, die aus gewissen drei Axiomen bestand, in bezug auf welche der Autor der in Rede stehenden Axiomenkombination noch im J. 1921 festgestellt hat, dass sie zur Konstruierung der ganzen gewöhnlichen Theorie der Deduktion genügen

[1] Vrgl. oben im § 1 den Abschnitt, der das Aufschreiben von Definitionen mittels des einzigen primitiven Termins eines gegebenen Systems betrifft.

würden, wenn man beim Aufbauen des Systems neben dem „Abtrennen" und „Einsetzen" noch das — mit meiner schon erwähnten „Typentheorie" aus dem J. 1921 übereinstimmende — Einführen von Definitionen, sowie das Anwenden der durch die Tradition überlieferten Methoden der Behandlung von Quantifikatoren innerhalb der Konditionalsätze, zuliesse; die drei Axiome von Herrn Tarski, die in einer im Stile der Symbolik der Herren Whitehead und Russell gehaltenen Symbolik in die Formeln, welche besagen, dass —

$$[p,q]:p\supset.q\supset p,$$

$$[p,q,r]\therefore p\supset q.\supset:q\supset r.\supset.p\supset r$$

und

$$[p,q,r]\therefore p\supset q.\supset r:\supset:p\supset r.\supset r,$$

gefasst werden können [1], hatten in der authentischen Symbolik des betrachteten Systems folgende durch die Vergleichung beider Formen der entsprechenden Axiome leicht zu entziffernde Gestalt [die Ausdrücke vom Typus „$\multimap(p\,q)$" vertraten hier die entsprechenden Ausdrücke vom Typus „$p\supset q$"]:

1) $\llcorner p\,q\lrcorner\ulcorner\multimap\left(p\multimap(q\,p)\right)\urcorner$

2) $\llcorner p\,q\,r\lrcorner\ulcorner\multimap\left(\multimap(p\,q)\multimap\left(\multimap(q\,r)\multimap(p\,r)\right)\right)\urcorner$

3) $\llcorner p\,q\,r\lrcorner\ulcorner\multimap\left(\multimap\left(\multimap(p\,q)\,r\right)\multimap\left(\multimap(p\,r)\,r\right)\right)\urcorner$

II) Irgendein zu dem Axiom *A3* des Systems $\mathfrak{S}_2$ analoges Axiom, das ermöglicht die Anwendung in der Praxis, von einer gewissen

[1] Ich erwähne hier bei Gelegenheit, dass im J. 1926 Herr Tarski nachgewiesen hat, dass das System, welches aus Thesen, die keine Quantifikatoren enthalten, besteht und mit Hilfe der „Abtrennungsdirektive" und einer entsprechend formulierten „Einsetzungsdirektive" auf Grund von Axiomen, die besagen, dass —

$$p\supset.q\supset p,$$

$$p\supset q.\supset:q\supset r.\supset.p\supset r$$

und

$$p\supset q.\supset r:\supset:p\supset r.\supset r,$$

aufgebaut ist, — ein „vollständiges" System ist.

Stelle im System an, der Methode des Beweisens *respective* des Widerlegens von Thesen, die mit universalen Quantifikatoren, Satzvariablen enthaltend, beginnen, mittels Berufung auf entsprechende solche schon im System bewiesene oder widerlegte Thesen, welche aus den Thesen, die eben bewiesen oder widerlegt werden sollen, durch entsprechende Einsetzung für die zu ihnen gehörigen Satzvariablen der im betrachteten System den „Nullen" und „Einsen" des traditionellen „Aussagenkalküls" entsprechenden Ausdrücke „$\llcorner q \lrcorner \ulcorner q \urcorner$" und „$\phi(\llcorner q \lrcorner \ulcorner q \urcorner \llcorner q \lrcorner \ulcorner q \urcorner)$" gebildet werden können. [Als ein solches Axiom könnte z. B. das Axiom gelten, das in einer im Stile der Symbolik der Herren Whitehead und Russell gehaltenen Symbolik mittels der Formel, welche besagt, dass $[g, p, q] \therefore g(p, p) . \supset : g(p \supset . [q] . q, p) . \supset . g(q, p)$, aufgeschrieben werden kann, in der authentischen Symbolik des betrachteten Systems hingegen folgende Gestalt hat:

$$4)\qquad \llcorner g\, p\, q \lrcorner \ulcorner \phi\left(g(p\,p)\, \phi\left(g\left(\phi(p\, \llcorner q \lrcorner \ulcorner q \urcorner)p\right) g(q\, p)\right)\right) \urcorner$$

Mit der Entstehung des Systems $\mathfrak{S}_3$, welches mit dem System $\mathfrak{S}_2$ äquivalent, zugleich aber einfacher, als dieses System, war, ist es klar geworden, dass das in diesem § betrachtete, auf das Implikationszeichen gestützte System der Protothetik bedeutend vereinfacht werden könnte, wenn man es nach dem Muster des Systems $\mathfrak{S}_3$ anstatt nach dem Muster des Systems $\mathfrak{S}_2$ gestalten würde, d. h. wenn man die Direktive ζ_1 gänzlich verwärfe und die Direktive η_1 durch eine Direktive η_1^* ersetzen würde, welche den Charakter einer „Extensionalitätsdirektive" hätte und gestatten würde, mittels Thesen, die keinen konstanten Termin ausser dem Implikationszeichen enthalten, die „Extensionalität" von Funktionen jeder Art, welche in der Protothetik auftreten, unmittelbar festzustellen. Das auf den Axiomen 1–4 mit Hilfe der Direktiven α_1, β_1, γ_1, δ_1, ε_1 (die beiden letzten — mit der Anwendung der oben erwähnten Funktion des Herrn Tarski) und η_1^* aufgebaute System werde ich hier der Kürze halber das System $\mathfrak{S}_4$ nennen. Ich gebe — um der Vollständigkeit des historischen Bildes willen — ein paar Daten an, die das weitere Schicksal dieses Systems betreffen:

Herr Tarski hat im J. 1922 bemerkt, dass aus den zwei Thesen, von welchen die eine mit dem Axiom 1 des Systems $\mathfrak{S}_4$ gleichgestaltet ist, und die andere irgendeine These vom Typus „$\llcorner r \lrcorner \ulcorner \phi\left(\phi\left(P \phi(Q\, r)\right) r\right) \urcorner$" [eine der Formen des mit Hilfe des Implikationszeichens ausgedrückten „logischen Produkts" der Sätze „P" und „Q" [1]] ist, in der „P" und „Q" beliebige Sätze sind, welche keine von dem die gegebene These beginnenden Quantifikator „$\llcorner r \lrcorner$" abhängigen Variablen enthalten und welche in der Protothetik einen Sinn haben, — mit Hilfe der Direktiven des Systems $\mathfrak{S}_4$ die Sätze „P" und „Q" selbst abgeleitet werden können. Diesem Umstande gemäss hat Herr Tarski festgestellt, dass: 1) aus wie viel Axiomen auch irgendeine gegebene Axiomatik A eines mit Hilfe der Direktiven des Systems $\mathfrak{S}_4$ aufgebauten Systems der Protothetik bestände, diese Axiomatik ohne Änderung der Direktiven des Systems durch eine entsprechende Kombination von nur zwei Axiomen ersetzt werden könnte, von denen eines mit dem Axiom 1 des Systems $\mathfrak{S}_4$ gleichgestaltet ist, das andere hingegen das mit Hilfe der Funktion „$\phi(p\, q)$" ausgedrückte „logische Produkt" aller zur Axiomatik A gehörenden und von dem Axiom 1 des Systems $\mathfrak{S}_4$ verschiedenen Sätze ist; 2) die Axiomatik des Systems $\mathfrak{S}_4$ selbst — auf diesem Wege durch die Axiomatik ersetzt werden könnte, die aus dem Axiom 1 des genannten Systems und dem „logischen Produkt" der drei übrigen Axiome dieses Systems besteht.

In einem meiner Gespräche mit Herrn Tarski aus dem J. 1922 habe ich der Überzeugung Ausdruck gegeben, dass es möglich sein wird, das von Herrn Tarski ersonnene System von zwei Axiomen noch bedeutend zu vereinfachen. Indem ich gewisse zwischen den Systemen $\mathfrak{S}_3$ und $\mathfrak{S}_4$ bestehende konstruktive Ähnlichkeiten und Unterschiede hervorhob, habe ich sogar die ganz konkrete Hypothese gestellt, dass zum Aufbau eines Systems der Protothetik mit Hilfe der Direktiven des Systems $\mathfrak{S}_4$ zwei Axiome genügen werden, von denen eines eine dem Axiom 4 des Systems $\mathfrak{S}_4$ annähernd ähnliche Gestalt haben wird, und das andere eine nicht komplizierte, in der gewöhnlichen Theorie der Deduktion geltende These sein wird (es schien mir damals — ganz mit Unrecht, wie es sich später gezeigt hat —, dass zur Konstruierung eines Systems der Protothetik mit Hilfe der Direktiven des Systems $\mathfrak{S}_4$ wenigstens

[1] Vrgl. oben den Kommentar zu den Direktiven δ_1 und ε_1.

zwei —, und zur Aufbauung eines äquivalenten Systems mit Hilfe der Direktiven des Systems $\mathfrak{S}_3$ wenigstens drei Axiome notwendig sind). Herrn T a r s k i, als einem Kenner von Beziehungen, welche zwischen Thesen bestehen, die keine konstanten Termine ausser dem Implikationszeichen enthalten, habe ich bei Gelegenheit des erwähnten Gespräches vorgeschlagen, dass er in freier Zeit über die Frage einer Vereinfachungsmöglichkeit des Systems $\mathfrak{S}_4$ im Sinne meiner hier skizzierten Hypothese — nachdenken möchte. — In demselben J. 1922 machte mich Herr T a r s k i mit den zwei folgenden Ergebnissen bekannt, zu welchen er in diesem Gebiete gekommen ist:

A) Zum Aufbau eines Systems der Protothetik mit Hilfe der Direktiven des Systems $\mathfrak{S}_4$ genügen die zwei folgendermassen lautenden Axiome:

1) $\llcorner p\, q \lrcorner \ulcorner \phi\!- \left(p \;\phi\!- (q\, p)\right) \urcorner$

2) $\llcorner p\, q\, r\, f \lrcorner \ulcorner \phi\!- \left(f(r\, p) \phi\!- \left(f\left(r \;\phi\!- (p \llcorner s \lrcorner \ulcorner s \urcorner)\right) f(r\, q)\right)\right) \urcorner$

(dieses Ergebnis stellte eine vollständige Bestätigung meiner Hypothese dar).

B) Man kann ein System der Protothetik auf Grund eines einzigen Axioms aufbauen, wenn man neben den Direktiven α_1, β_1, γ_1, η_1^* des Systems $\mathfrak{S}_4$ die zwei Definitionsdirektiven — δ_1^* und ε_1^* — annimmt, die statt der Definitionen, welche auf eine in den Direktiven δ_1 und ε_1 des Systems $\mathfrak{S}_4$ vorhergesehene Weise konstruiert sind, Definitionen in Gestalt zweier einander reziproker und deshalb die entsprechende *eine* Äquivalenz vertretender Konditionalsätze (Direktive δ_1^*) *respective* zweier solcher Konditionalsätze mit den ihnen vorangehenden universalen Quantifikatoren (Direktive ε_1^*) einführen. Als ein Axiom dieser Art kann z. B. das Axiom 2 des *sub A* erwähnten Systems gelten.

§ 9. Als Herr T a r s k i im J. 1923 das System $\mathfrak{S}_3$ analysierte, hat er bemerkt, dass aus den zwei Thesen, von welchen die eine besagt, dass

(1) $\llcorner p\, q \lrcorner \ulcorner \phi \left(\phi(p\, q) \phi(q\, p)\right) \urcorner$

(das Kommutationsgesetz für Äquivalenzen), und die andere irgendeine These vom Typus

(2) $\llcorner f\, p \lrcorner \ulcorner \phi \left(f(P\, p) \phi \left(f(Q\, p) P\right)\right) \urcorner$

(eine der Formen des „logischen Produkts" der Sätze „P" und „Q" in den Systemen $\mathfrak{S}_1$ — $\mathfrak{S}_3$) ist, in der „P" und „Q" beliebige Sätze sind, welche keine von dem die gegebene These beginnenden Quantifikator „$\llcorner f\, p \lrcorner$" abhängigen Variablen enthalten und welche in der Protothetik einen Sinn haben, — mit Hilfe der Direktiven des Systems $\mathfrak{S}_3$ die Sätze „P" und „Q" selbst — nach folgendem Schema abgeleitet werden können:

(3) $\llcorner p\, q \lrcorner \ulcorner \phi \left(\Phi(p\, q) \phi \left(\phi(p\, q) \phi(q\, p)\right)\right) \urcorner$ (Definition nach der Direktive ε);

aus 2 schliessen wir auf Grund der Direktive β, dass

(4) $\phi \left(\Phi(P\, P) \phi \left(\Phi(Q\, P) P\right)\right)$,

aus 1 auf Grund der Dir. β, dass

(5) $\phi \left(\phi \left(\llcorner p\, q \lrcorner \ulcorner \Phi(p\, q) \urcorner \llcorner p\, q \lrcorner \ulcorner \phi \left(\phi(p\, q) \phi(q\, p)\right) \urcorner\right) \phi \left(\llcorner p\, q \lrcorner \ulcorner \phi \left(\phi(p\, q) \phi(q\, p)\right) \urcorner \llcorner p\, q \lrcorner \ulcorner \Phi(p\, q) \urcorner\right)\right)$,

aus 3 (Dir. γ), dass

(6) $\phi \left(\llcorner p\, q \lrcorner \ulcorner \Phi(p\, q) \urcorner \llcorner p\, q \lrcorner \ulcorner \phi \left(\phi(p\, q) \phi(q\, p)\right) \urcorner\right)$,

aus 5 und 6 (Dir. α), dass

(7) $\phi \left(\llcorner p\, q \lrcorner \ulcorner \phi \left(\phi(p\, q) \phi(q\, p)\right) \urcorner \llcorner p\, q \lrcorner \ulcorner \Phi(p\, q) \urcorner\right)$,

aus 7 und 1 (Dir. α), dass

(8) $\llcorner p\, q \lrcorner \ulcorner \Phi(p\, q) \urcorner$,

aus 8 (Dir. β), dass —

(9) $\Phi(P\, P)$,

(10) $\Phi(Q\, P)$

und

(11) $\Phi(Q\, Q)$,

aus 4 und 9 (Dir. α), dass

(12) $\phi(\Phi(QP)P)$,

aus 12 und 10 (Dir. α), dass

(13) P;

(14) $\llcorner p\,q \lrcorner \ulcorner \phi\left(\mathrm{X}(pq)\phi(\Phi(qp)p)\right)\urcorner$ (Definition nach der Direktive ε);

aus 14 folgt (Dir. β), dass —

(15) $\phi\left(\mathrm{X}(QQ)\phi(\Phi(QQ)Q)\right)$

und

(16) $\phi\left(\mathrm{X}(PQ)\phi(\Phi(QP)P)\right)$,

aus 1 (Dir. β), dass —

(17) $\phi\left(\phi(\mathrm{X}(QQ)P)\phi(P\mathrm{X}(QQ))\right)$

und

(18) $\phi\left(\phi\left(\mathrm{X}(PQ)\phi(\Phi(QP)P)\right)\phi\left(\phi(\Phi(QP)P)\mathrm{X}(PQ)\right)\right)$,

aus 2 (Dir. β), dass

(19) $\phi\left(\mathrm{X}(PQ)\phi(\mathrm{X}(QQ)P)\right)$,

aus 18 und 16 (Dir. α), dass

(20) $\phi\left(\phi(\Phi(QP)P)\mathrm{X}(PQ)\right)$,

aus 20 und 12 (Dir. α), dass

(21) $\mathrm{X}(PQ)$,

aus 19 und 21 (Dir. α), dass

(22) $\phi(\mathrm{X}(QQ)P)$,

aus 17 und 22 (Dir. α), dass

(23) $\phi(P\mathrm{X}(QQ))$,

aus 23 und 13 (Dir. α), dass

(24) $\mathrm{X}(QQ)$,

aus 15 und 24 (Dir. α), dass

(25) $\phi(\Phi(QQ)Q)$,

aus 25 und 11 (Dir. α), dass

Q.

Aus der Ableitbarkeit der Sätze „P“ und „Q“ aus den Thesen 1 und 2 mit Hilfe der Direktiven des Systems $\mathfrak{S}_3$ folgerte Herr Tarski, dass, aus wie viel Axiomen auch irgendeine gegebene Axiomatik A dieses oder jenes mit dem System $\mathfrak{S}_3$ äquivalenten und mit Hilfe der Direktiven dieses Systems aufgebauten Systems bestände, diese Axiomatik mit Hilfe der Direktiven des Systems $\mathfrak{S}_3$ aus einer entsprechenden Kombination K zweier neuer Axiome abgeleitet werden könnte, von welchen eines das Kommutationsgesetz für Äquivalenzen —, und das andere ein mittels der Funktion „$\phi(p\,q)$“ ausgedrücktes „logisches Produkt“ aller zur Axiomatik A gehörenden und von dem Kommutationsgesetz für Äquivalenzen verschiedenen Sätze ist. Indem Herr Tarski den Umstand in Betracht zog, dass, wie ich dies im J. 1922 nachgewiesen habe, wenn irgendwelche Sätze „P“ und „Q“ in der Protothetik gelten, so gilt gleichfalls in ihr das nach dem Muster der These 2 gebildete „logische Produkt“ der Sätze „P“ und „Q“ (dies wird dem Leser im Zusammenhang mit den weiteren Abschnitten dieser Mitteilung klar werden), und indem er auf diesen Umstand die Beobachtung stützte, dass das oben erwähnte „logische Produkt“ aller von dem Kommutationsgesetz für Äquivalenzen verschiedenen Sätze, welche zur Axiomatik A gehören und demnach nach der Voraussetzung im System $\mathfrak{S}_3$ gelten, in diesem System beweisbar ist, wie auch das Kommutationsgesetz für Äquivalenzen, welches ich im J. 1922 schon im System $\mathfrak{S}_1$ erhalten hatte, — hat er festgestellt, dass die oben genannte Axiomenkombination K im System $\mathfrak{S}_3$ und demnach auch in dem mit ihm äquivalenten, mit Hilfe der Direktiven des Systems $\mathfrak{S}_3$ auf Grund der Axiomatik A aufgebauten System ableitbar ist. Im Zusammenhang mit der mit Hilfe der hier dargestellten Betrachtungen nachgewiesenen Tatsache, dass eine beliebige Axiomatik eines nach den Direktiven des Systems $\mathfrak{S}_3$ aufgebauten Systems der Protothetik ohne Änderung der Direktiven des Systems durch eine entsprechende Kombination von nur zwei Axiomen ersetzt werden kann, hat Herr **Tarski** bemerkt, dass, wenn man die erwähnten Betrachtungen auf die aus den Axiomen *A1*—*A3* bestehende Axiomatik des Systems $\mathfrak{S}_3$ selbst anwenden würde, man diese Axiomatik durch die Kombination zweier Axiome ersetzen könnte, von denen das eine das Kommutationsgesetz für Äquivalenzen ist, und das andere aus dem Ausdruck „$\llcorner h\,s \lrcorner \ulcorner \phi\Big(h(P s)\phi\Big(h\Big(\llcorner k\,t\lrcorner\ulcorner\phi\big(k(Q\,t)\phi\big(k(R\,t)Q\big)\big)\urcorner s\Big)P\Big)\Big)\urcorner$“ erhalten werden kann, indem wir in ihm entsprechend für die Wörter „P“, „Q“ und „R“ die Axiome *A1, A2* und *A3* in ihrem vollen Laute einsetzen.

§ 10. Indem ich die im § 9 dargestellten Ergebnisse des Herrn **Tarski** benutzte, habe ich im J. 1923 bemerkt, dass, wenn ich statt der Definitionsdirektiven δ und ε des Systems $\mathfrak{S}_3$ Definitionsdirektiven δ^* und ε^* einführen würde, nach denen das *Definiendum* auf der rechten Seite einer Äquivalenz anstatt, wie es nach den erwähnten Direktiven δ und ε geschähe, auf der linken Seite der Äquivalenz stehen sollte [1], — ich im Fall, dass ich irgendeine These vom Typus

$$(a)\quad \llcorner f\,p \lrcorner \ulcorner \phi\big(f(P\,p)\phi\big(f(Q\,p)\,P\big)\big)\urcorner$$

zur Verfügung hätte, in der „P“ und „Q“ beliebige Sätze sind, welche keine von dem die gegebene These beginnenden Quantifikator „$\llcorner f\,p \lrcorner$“ abhängigen Variablen enthalten und welche in der Protothetik einen Sinn haben, aus der genannten These mit Hilfe der auf die oben charakterisierte Weise modifizierten Direktiven des Systems $\mathfrak{S}_3$ den Satz „P“ nach folgendem Schema ableiten könnte:

$$(b)\quad \llcorner p\,q \lrcorner \ulcorner \phi\big(\phi(p\,q)\,\Psi(q\,p)\big)\urcorner$$ (Definition nach der Dir. ε^*);

[1] Im Zusammenhang mit den Direktiven δ^* und ε^* vrgl. unten im § 11 *T. E. XLIV* und den Punkt 1 der Vorschrift, betreffend die Konstruktionsmethode des Systems $\mathfrak{S}_5$.

$$(c)\quad \llcorner p\,q \lrcorner \ulcorner \phi\Big(\phi\big(\phi(p\,q)\,\Psi(q\,p)\big)\,\Phi(p\,q)\Big)\urcorner$$ (Definition nach der Dir. ε^*);

aus c schliessen wir (Dir. γ), dass

$$(d)\quad \phi\Big(\llcorner p\,q \lrcorner \ulcorner \phi\big(\phi(p\,q)\,\Psi(q\,p)\big)\urcorner \llcorner p\,q \lrcorner \ulcorner \Phi(p\,q)\urcorner\Big),$$

aus d und b (Dir. α), dass

$$(e)\quad \llcorner p\,q \lrcorner \ulcorner \Phi(p\,q)\urcorner;$$

indem wir schon über die Prämissen a und e verfügen, die den Thesen 2 und 8 des § 9 entsprechen, leiten wir aus den genannten Prämissen mit Hilfe der im § 9 entsprechend angegebenen Direktiven der Reihe nach die den Thesen 4, 9, 10, 12 und 13 des § 9 entsprechenden Thesen ab und erreichen auf diesem Wege den Satz „P“.

Der Umstand, dass ich den Satz „P“ aus der These a allein — mit Hilfe der auf die oben charakterisierte Weise modifizierten Direktiven des Systems $\mathfrak{S}_3$ abzuleiten weiss, während ich es nicht verstehe, dieses Resultat mit Hilfe der authentischen Direktiven des Systems $\mathfrak{S}_3$ zu erreichen, bewog mich zur genaueren Erforschung des Systems, welches auf den Axiomen *A1*—*A3* des Systems $\mathfrak{S}_3$ nicht, wie das System $\mathfrak{S}_3$, mit Hilfe der Direktiven α, β, γ, δ, ε und η^*, sondern mit Hilfe der Direktiven α, β, γ, δ^*, ε^* und η^* aufgebaut ist. Das so konstruierte System werde ich hier der Kürze halber das System $\mathfrak{S}_5$ nennen.

Indem ich es erwog, dass, wie sich der Leser weiter unten überzeugen wird, das Kommutationsgesetz für Äquivalenzen aus den Axiomen *A1* und *A2* schon mit Hilfe der Direktiven α, β und γ und demnach ohne Hilfe irgendwelcher Definitionsdirektiven ableitbar ist, habe ich festgestellt, dass ich mich dieses Gesetzes im System $\mathfrak{S}_5$ bedienen kann, um in ihm aus den Definitionen, die den Direktiven δ^* und ε^* gemäss aufgeschrieben sind, alle Sätze zu erhalten, die den Definitionen entsprechen, welche man nach den Direktiven δ und ε aufschreiben dürfte, — ähnlich wie ich mich des erwähnten Gesetzes im System $\mathfrak{S}_3$ bedienen kann, um in diesem System aus den Definitionen, die den Direktiven δ und ε

gemäss aufgeschrieben sind, alle Sätze abzuleiten, die den Definitionen, welche man nach den Direktiven δ^* und ε^* aufschreiben dürfte, entsprechen. Auf diesem Wege habe ich mich überzeugt, dass das System $\mathfrak{S}_5$ ein mit dem System $\mathfrak{S}_3$ äquivalentes System der Protothetik ist.

Indem ich schon wusste, dass ich aus der These a mit Hilfe der Direktiven des Systems $\mathfrak{S}_5$ nach dem oben angegebenen Schema den Satz „P“ ableiten kann, habe ich bemerkt, dass, wenn ich neben der These a noch über das Kommutationsgesetz für Äquivalenzen verfügen würde, welches besagt, dass

$$(a_1) \quad \llcorner p\, q \lrcorner \ulcorner \phi\Big(\phi(p\, q)\phi(q\, p)\Big)\urcorner,$$

ich — bei einer weiteren Entwicklung des erwähnten Schemas — mit Hilfe derselben Direktiven auch noch den Satz „Q“ zu erreichen vermöchte. Ich könnte hier, wie folgt, schliessen:

$$(f) \quad \llcorner p\, q \lrcorner \ulcorner \phi\Big(\phi\big(\Phi(q\, p)\, p\big)\mathrm{X}(p\, q)\Big)\urcorner \text{(Definition nach der Dir. } \varepsilon^*\text{)};$$

aus a_1 folgt (Dir. β), dass

$$(g) \quad \phi\Bigg(\phi\Big(\phi\big(\Phi(Q\, Q)\, Q\big)\mathrm{X}(Q\, Q)\Big)\phi\Big(\mathrm{X}(Q\, Q)\phi\big(\Phi(Q\, Q)\, Q\big)\Big)\Bigg),$$

aus f (Dir. β), dass —

$$(h) \quad \phi\Big(\phi\big(\Phi(Q\, Q)\, Q\big)\mathrm{X}(Q\, Q)\Big)$$

und

$$(i) \quad \phi\Big(\phi\big(\Phi(Q\, P)\, P\big)\mathrm{X}(P\, Q)\Big),$$

aus g und h (Dir. α), dass

$$(k) \quad \phi\Big(\mathrm{X}(Q\, Q)\phi\big(\Phi(Q\, Q)\, Q\big)\Big);$$

indem wir jetzt neben den schon oben erwähnten Prämissen, die den Thesen 2, 8, 12 und 13 des § 9 entsprechen, noch über die den Thesen 1, 15 und 20 des § 9 entsprechenden Prämissen a_1, k und i verfügen, leiten wir aus diesen Prämissen mit Hilfe der im

§ 9 entsprechend angegebenen Direktiven der Reihe nach die den Thesen 11, 17, 19, 21, 22, 23, 24 und 25 des § 9 entsprechenden Thesen und den Satz „Q“ ab.

Aus der Möglichkeit, mit Hilfe der Direktiven des Systems $\mathfrak{S}_5$ den Satz „P“ aus der These a und die Sätze „P“ und „Q“ aus den Thesen a und a_1 abzuleiten, folgerte ich, dass, aus wie viel Axiomen auch irgendeine gegebene Axiomatik A dieses oder jenes mit dem System $\mathfrak{S}_5$ äquivalenten und mit Hilfe der Direktiven dieses Systems aufgebauten Systems bestände, diese Axiomatik mit Hilfe derselben Direktiven aus einem entsprechenden einzigen Axiom B abgeleitet werden könnte, welches wir erhalten würden, wenn wir nach dem Muster der These a das „logische Produkt“ von zwei Faktoren bilden würden, von denen einer (der dem Satz „P“ in der These a entspricht) mit der These a_1 gleichgestaltet ist, und der andere (der dem Satz „Q“ in der These a entspricht) ein mit Hilfe der — nach dem Muster der These a gebildeten — Thesen ausgedrücktes „logisches Produkt“ aller zur Axiomatik A gehörenden und von der These a_1 verschiedenen Sätze ist [um mit Hilfe der Direktiven des Systems $\mathfrak{S}_5$ aus dem Axiom B die ganze Axiomatik A abzuleiten, könnten wir zuerst aus dem genannten Axiom die These a_1 deduzieren, die in ihm dem Satz „P“ in der These a entspricht, dann aus dem Axiom B und der schon erreichten These a_1 das oben erwähnte „logische Produkt“ aller zur Axiomatik A gehörenden und von der These a_1 verschiedenen Sätze ableiten und endlich aus diesem „logischen Produkt“ und der These a_1 alle Sätze der Reihe nach erlangen, die zur Axiomatik A gehören und von der These a_1 verschieden sind]. Indem ich den Umstand in Betracht zog, dass [1] sowohl die These a_1, wie auch das „logische Produkt“ aller von der These a_1 verschiedenen Sätze, die zur Axiomatik A gehören und demnach nach der Voraussetzung im System $\mathfrak{S}_5$, welches ein System der Protothetik ist, gelten, im System $\mathfrak{S}_5$ beweisbar sind, habe ich festgestellt, dass das oben erwähnte Axiom B, welches ein nach dem Muster der These a gebildetes „logisches Produkt“ der These a_1 und des erwähnten „logischen Produkts“ aller zur Axiomatik A gehörenden und von der These a_1 verschiedenen Sätze ist, im System $\mathfrak{S}_5$ und demnach auch in dem mit ihm

[1] Vrgl. oben im § 9 den Abschnitt, der die Beweisbarkeit der Axiomenkombination K im System $\mathfrak{S}_3$ betrifft.

äquivalenten, mit Hilfe der Direktiven des Systems $\mathfrak{S}_5$ auf Grund der Axiomatik A aufgebauten System ableitbar ist. Den hier dargestellten Erwägungen gemäss habe ich festgesetzt, dass eine beliebige Axiomatik eines mit Hilfe der Direktiven des Systems $\mathfrak{S}_5$ aufgebauten Systems der Protothetik und demnach auch die aus den Axiomen $A1$—$A3$ bestehende Axiomatik des Systems $\mathfrak{S}_5$ selbst — ohne Änderung der Direktiven des Systems durch ein entsprechendes einziges Axiom ersetzt werden kann. [Ich erwähne hier noch, dass ich mich im Zusammenhang mit den Untersuchungen, die ich an dem System $\mathfrak{S}_5$ durchführte, überzeugt habe, dass man leicht ein Axiom konstruieren kann, welches, allein genommen, zum Aufbau eines Systems der Protothetik genügen würde, wenn man neben den Direktiven β, γ, δ, ε und η^* — anstatt der Direktive α eine Direktive α^* annähme, die eine „unnatürliche“ Abart der „Abtrennungsdirektive“ wäre und gestatten würde, einen Satz S zu dem System hinzuzufügen, wenn schon eine Äquivalenz A, deren linke Seite mit S gleichgestaltet ist, und ein Satz, der mit der rechten Seite der Äquivalenz A gleichgestaltet ist, zu dem System gehören. Es ist mir kein Axiom bekannt, welches, allein genommen, zum Aufbau eines Systems der Protothetik mit Hilfe der Direktiven α, β, γ, δ, ε und η^* des Systems $\mathfrak{S}_3$ oder auch mit Hilfe der Direktiven α^*, β, γ, δ^*, ε^* und η^* genügen würde.]

Indem ich an die Betrachtungen dieses § anknüpfe, die das Problem des einzigen Axioms der Protothetik, aufgebaut mittels der Äquivalenzfunktion, als der einzigen primitiven Funktion, betreffen, und indem ich der Eventualität vorbeugen möchte, dass jemand — im Zusammenhang mit den Daten, die ich im § 8 über die Systeme der Protothetik angegeben habe, welche mit Hilfe der Direktiven des Systems $\mathfrak{S}_4$ aufgebaut werden, — gewisse schon gelöste Probleme lösen wollte, — bemerke ich bei Gelegenheit, wenn ich auch in diesem Falle etwas aus der im Prinzip chronologischen Darstellungsweise eigener und fremder Resultate aus dem Gebiete der Protothetik herauskomme, dass im J. 1925 Herr Tarski eine gewisse Methode angegeben hat, welche gestattet, die Axiomatik eines beliebigen Systems der Protothetik, das mit Hilfe der Direktiven des Systems $\mathfrak{S}_4$ auf dem Implikationszeichen, als dem einzigen primitiven Termin, aufgebaut ist, durch ein entsprechendes einziges Axiom zu ersetzen. In einer *mutatis mutandis* durchgeführten Anwendung der erwähnten Methode auf die Systeme der gewöhnlichen Theorie der Deduktion, welche unter ihren primitiven Terminen das Implikationszeichen enthalten, hat Herr Tarski gezeigt, wie man auch diese Systeme auf Grund eines einzigen Axioms aufbauen kann. Diese Resultate bespreche ich hier nicht eingehender, denn sie hatten keinen Einfluss auf die Ergebnisse meiner eigenen Untersuchungen.

§ 11. Indem ich auf weitere Abschnitte dieser Mitteilung die Fragen verschiebe, die mit einer Reihe aufeinanderfolgender und weitgehender Vereinfachungen des einzigen Axioms der mit Hilfe der Direktiven des Systems $\mathfrak{S}_5$ aufgebauten Protothetik zusammenhängen, welche Vereinfachungen von mir und von Herrn Wajsberg in Jahren 1923—1926 ausgeführt worden sind und welche mich schliesslich zu dem bisher einfachsten Axiom einer solchen Protothetik, das die Gestalt des Satzes „$\llcorner f\,p\,q\,r\,s\,t\lrcorner\ulcorner\phi(\phi(p\,q)\llcorner g\lrcorner\ulcorner\phi(f(p\,f(p\llcorner u\lrcorner\ulcorner u\urcorner))\phi(\llcorner u\lrcorner\ulcorner f(q\,u)\urcorner\phi(g(\phi(\phi(r\,s)\,t)\,q)\,g(\phi(\phi(s\,t)\,r)\,p))))\urcorner)\urcorner$“ besitzt, geführt haben, werde ich mich jetzt mit der oben angesagten präziseren Formulierung der Direktiven der Protothetik beschäftigen. *Explicite* werde ich dies für die Direktiven des Systems $\mathfrak{S}_5$ tun. Ich erwähne, dass ich diese Direktiven zweimal eingehend in meinen Vorlesungen an der Warschauer Universität dargelegt habe: einmal in den Vorlesungen der *„Logistik“* in den akademischen Jahren 1924/1925 und 1925/1926, zum zweitenmal — in einer bedeutend einfacheren und demnach vollkommeneren Gestalt — in den Vorlesungen der *„Grundlagen der Ontologie“* aus dem ak. J. 1926/1927.

Indem die Direktiven nicht selber zu dem System der Protothetik, welches sie betreffen, gehören, werden sie von mir gewöhnlich in einer alltäglichen Umgangssprache formuliert. Die einzelnen Termine der Umgangssprache, welche in den Direktiven auftreten, kommentiere ich in einer Reihe „terminologischer Erklärungen“, die gleichfalls mittels üblicher Wendungen der Umgangssprache formuliert sind. Im Gegensatz dazu werde ich in dieser Mitteilung — um Platz zu sparen — beim Formulieren der Direktiven und der erwähnten „terminologischen Erklärungen“ eine Art „symbolischer Sprache“ anwenden, welche, wie es scheint, für jeden leicht verständlich sein wird, der die Symbolik kennt, die von Herren Whitehead und Russell in der Theorie der Deduktion angewandt wird. Die weiter unten angegebenen „symbolischen“ Formulierungen der „terminologischen Erklärungen“ und Direktiven sollen einzig und allein als typographische Abkürzungen angesehen werden, die durch entsprechende Ausdrücke der Umgangssprache ersetzt würden, wenn mehr Platz zur Verfügung stände.

In der folgenden Tabelle sollen die Ausdrücke der ersten Kolonne die Abkürzungen der entsprechenden Ausdrücke der zweiten Kolonne sein:

$A \varepsilon b$	A ist ein b [1]
Id (A)	derselbe Gegenstand, wie A
$\sim (a)$	Gegenstand, der nicht a ist
$a \cap b \cap \ldots \cap k$	Gegenstand, der a und b und … und k ist
$a \cup b \cup \ldots \cup k$	Gegenstand, der a oder b oder … oder k ist
$a \infty b$	es gibt ebenso viel Gegenstände a, wie es Gegenstände b gibt
a ⧜ b	es gibt weniger Gegenstände a, als es Gegenstände b gibt
vrb	Wort
expr	Ausdruck
prnt	Parenthese
prntl	linksseitige Parenthese
prntsym (A)	zu A symmetrische Parenthese
cnf (A)	mit A gleichgestalteter Ausdruck
A1	Axiom *A1*
thp	These dieses Systems der Protothetik
ingr (A)	zu A gehörend
pred (A)	dem A vorangehend
scd (A)	auf A folgend
Upred (A)	letztes der dem A vorangehenden Wörter
Uingr (A)	letztes der zu A gehörenden Wörter

[1] Vrgl.: Peano$_1$. S. 20.

1ingr (A)	erstes der zu A gehörenden Wörter
2ingr (A)	zweites der zu A gehörenden Wörter
u. s. w.	

Einigen der Ausdrücke, die in der hier angegebenen Tabelle angeführt sind, will ich ein paar Worte als Kommentar beigeben, um die Wahrscheinlichkeit eines Missverständnisses zwischen Leser und Autor zu verringern:

Ad „$a \infty b$“. Ausdrücke vom Typus „$a \infty b$“ umfassen auch solche Fälle, wo es überhaupt weder Gegenstände a noch Gegenstände b gibt.

Ad „a ⧜ b“. Ausdrücke vom Typus „a ⧜ b“ umfassen auch solche Fälle, wo es gar keinen Gegenstand a, hingegen wenigstens einen Gegenstand b gibt.

Ad „vrb“. Ausdrücke — „Mensch“, „Wort“, „p“, „⦶“, „∟“, „⌝“, „(“, „}“ — sind Beispiele von Wörtern. Ausdrücke — „der Mensch“, „(p)“, „f ∟) Wort“ — sind Beispiele von Gegenständen, die Zusammenfassungen von Wörtern, aber keine Wörter sind. Der Ausdruck „der Mensch“ besteht aus zwei Wörtern, der Ausdruck „(p)“ — aus drei Wörtern, der Ausdruck „f ∟) Wort“ — aus vier Wörtern. Das Axiom *A3* besteht aus 80 Wörtern. Einzelne Buchstaben der aus wenigstens zwei Buchstaben bestehenden Wörter sind keine Wörter. Ausdrücke, die aus wenigstens zwei Wörtern bestehen, sind keine Wörter.

Ad „expr“. Jedes Wort ist ein Ausdruck. Die Zusammenfassung einer beliebigen Anzahl von aufeinanderfolgenden Wörtern irgendeines Ausdrucks ist ein Ausdruck. Die Zusammenfassung von Wörtern, die aus dem ersten, dritten und vierten Wort irgendeines Ausdrucks besteht, ist kein Ausdruck. Jeder Ausdruck besteht aus Wörtern. Ich würde keine solche Zusammenfassung von Wörtern einen Ausdruck nennen, welche aus unendlich vielen Wörtern bestände.

Ad „prnt“ und „prntl“. Wörter — „)“, „$\Big($“, „(“, „$\Big]$“, „$\Big\{$“ — sind Beispiele von Parenthesen; das zweite, dritte und fünfte dieser Wörter sind Beispiele von linksseitigen Parenthesen. Wörter — „∟“ und „⌝“ — sind Beispiele von Wörtern, welche nicht Parenthesen sind.

Ad „prntsym (*A*)“. Jede der Parenthesen — „(“, „(“, „(“ — ist eine zu jeder der Parenthesen — „)“, „)“, „)“ — symmetrische Parenthese, und umgekehrt; jede der Parenthesen — „}“, „}“ — ist eine zu jeder der Parenthesen — „{“, „{“ — symmetrische Parenthese, und umgekehrt. Keine der Parenthesen — „(“, „]“, „}“ — ist eine zu der Parenthese „(“ symmetrische Parenthese.

Ad „cnf (*A*)“. Jeder Ausdruck ist ein mit sich selbst gleichgestalteter Ausdruck. Das siebente Wort des Axioms *A1* ist ein mit dem neunten Wort dieses Axioms gleichgestalteter Ausdruck. Die Zusammenfassung der ersten fünf Wörter des Axioms *A1* ist ein mit der Zusammenfassung der ersten fünf Wörter des Axioms *A2* gleichgestalteter Ausdruck. Die Parenthese „(“ ist ein mit der Parenthese „(“ gleichgestalteter Ausdruck. [Den miteinander gleichgestalteten Parenthesen gebe ich verschiedene Längen, um die Formeln, die ich schreibe, durchsichtiger zu machen; alle diese Längen können auf beliebige Weise verändert werden, ohne dass damit der Sinn dieser Formeln geändert würde.] Die Parenthese „(“ ist kein mit der Parenthese „[“ gleichgestalteter Ausdruck. Das Wort „⌜“ ist ein mit dem Wort „⌜“ gleichgestalteter Ausdruck. [Die verschiedenen Höhen, an welchen ich je nach Bedarf der Durchsichtigkeit die einzelnen Wörter „⌜“ und „⌝“ anbringe, haben keinen Einfluss auf den Sinn der Formeln, die ich schreibe.] Zwei miteinander gleichgestaltete Ausdrücke, an zwei verschiedenen Stellen geschrieben, sind niemals *derselbe* Ausdruck [1] [die Nichtberücksichtigung dieses Umstandes könnte den Leser zu einer ganz verkehrten Interpretation meiner weiter unten angegebenen „terminologischen Erklärungen“ und Direktiven führen].

Ad „ingr (*A*)“. Der Ausdrücke vom Typus „ingr (*A*)“ bediene ich mich auf eine Weise, die mir gestattet, von einem beliebigen Ausdruck *A* zu behaupten, dass er ein ingr (*A*) ist.

[1] Vrgl.: Frege₂. S. 107.

Den „terminologischen Erklärungen“, an die ich eben herantrete, gebe ich gewöhnlich die Gestalt der Sätze vom Typus „Von einem Gegenstand *A* sage ich, dass er ein *b* ist, dann und nur dann, wenn *p*“. Als Abkürzungen solcher Sätze sollen weiter unten entsprechende Ausdrücke vom Typus „*A* ε *b* . = *p*“ mit den ihnen vorangehenden entsprechenden universalen Quantifikatoren gelten.

Terminologische Erklärung I. [*A*] : *A* ε vrb1 . = . *A* ε cnf (1ingr (A1))

Term. Erkl. II. [*A*] : *A* ε vrb2 . = . *A* ε cnf (5ingr (A1))

T. E. III. [*A*] : *A* ε vrb3 . = . *A* ε cnf (6ingr (A1))

T. E. IV. [*A*] : *A* ε vrb4 . = . *A* ε cnf (Uingr (A1))

T. E. V. [*A*] : *A* ε trm . = . *A* ε vrb.
A ε ∼ (prnt).
A ε ∼ (vrb1).
A ε ∼ (vrb2).
A ε ∼ (vrb3).
A ε ∼ (vrb4) [1]

T. E. VI. [*A*, *B*] : *A* ε int (*B*) . = . *B* ε expr.
A ε vrb.
A ε ingr (*B*).
A ε ∼ (1ingr (*B*)).
A ε ∼ (Uingr (*B*))

T. E. VII. [*A*, *a*] : : *A* ε Cmpl (*a*) . = .·. *A* ε expr .·.
[*B*] : *B* ε vrb . *B* ε ingr (*A*) . ⊃ . [∃ *C*] . *C* ε *a* . *B* ε ingr (*C*) .·.
[*B*, *C*, *D*] : *B* ε *a* . *C* ε *a* . *D* ε vrb . *D* ε ingr (*B*) . *D* ε ingr (*C*) . ⊃ . *B* ε Id (*C*) .·.
[*B*] : *B* ε *a* . ⊃ . *B* ε expr ∩ ingr (*A*)

T. E. VIII. [*A*] : : *A* ε qntf . = .·. 1ingr (*A*) ε vrb1.
Uingr (*A*) ε vrb2 :

[1] Einzelne „logische Faktoren“, die in meinen „terminologischen Erklärungen“ nach dem Zeichen „=“ auftreten, schreibe ich der Durchsichtigkeit halber in besonderen Zeilen. Für alle „terminologischen Erklärungen“ besitze ich passende Beispiele, welche die Unabhängigkeit jedes der erwähnten „logischen Faktoren“ von dem „logischen Produkt“ der übrigen Faktoren nachweisen.

$[\exists B] . B \varepsilon \mathrm{int}(A) . .$
$[B] : B \varepsilon \mathrm{int}(A) . \supset . B \varepsilon \mathrm{trm} \therefore$
$[B, C] : B \varepsilon \mathrm{int}(A) . C \varepsilon \mathrm{int}(A) .$
$B \varepsilon \mathrm{cnf}(C) . \supset . B \varepsilon \mathrm{Id}(C)$

T. E. IX. $[A] :.: A \varepsilon \mathrm{sbqntf} . \equiv :: [\exists B] . B \varepsilon \mathrm{int}(A) ::$
$[B] \therefore B \varepsilon \mathrm{1ingr}(A) . \vee . B \varepsilon \mathrm{int}(A)$
$: \supset . \big(\mathrm{vrb3} \cap \mathrm{ingr}(A) \cap \mathrm{scd}(B)\big) \infty \big(\mathrm{vrb4} \cap \mathrm{ingr}(A) \cap \mathrm{scd}(B)\big) ::$
$[B] \therefore B \varepsilon \mathrm{int}(A) . \vee . B \varepsilon \mathrm{Uingr}(A)$
$: \supset . \big(\mathrm{vrb4} \cap \mathrm{ingr}(A) \cap \mathrm{pred}(B)\big) \infty \big(\mathrm{vrb3} \cap \mathrm{ingr}(A) \cap \mathrm{pred}(B)\big)$ [1]

T. E. X. $[A] :: A \varepsilon \mathrm{gnrl} . \equiv \therefore [\exists B] . B \varepsilon \mathrm{qntf} . B \varepsilon \mathrm{ingr}(A) . \mathrm{1ingr}(A) \varepsilon \mathrm{ingr}(B) :$
$[\exists B] . B \varepsilon \mathrm{sbqntf} . B \varepsilon \mathrm{ingr}(A) . \mathrm{Uingr}(A) \varepsilon \mathrm{ingr}(B) \therefore$
$[B, C] : B \varepsilon \mathrm{qntf} . B \varepsilon \mathrm{ingr}(A) . C \varepsilon \mathrm{sbqntf} . C \varepsilon \mathrm{ingr}(A) . \mathrm{1ingr}(A) \varepsilon \mathrm{ingr}(B) . \mathrm{Uingr}(A) \varepsilon \mathrm{ingr}(C) . \supset . A \varepsilon \mathrm{Cmpl}(B \cup C)$

T. E. XI. $[A, B] : A \varepsilon \mathrm{Qntf}(B) . \equiv . B \varepsilon \mathrm{gnrl} .$
$A \varepsilon \mathrm{qntf} \cap \mathrm{ingr}(B) .$
$\mathrm{1ingr}(B) \varepsilon \mathrm{ingr}(A)$ [2]

[1] Die terminologische Erklärung *IX* ist das Resultat einer gewissen Vereinfachung, die von mir im Redaktionsprojekt dieser Erklärung vollführt ist, welches von Herrn Dr Adolf Lindenbaum (damals noch Studenten der Warschauer Universität) mir vorgelegt wurde und welches eine Vereinigung von gewissen vier Bedingungen festsetzte, die notwendig und hinreichend ist, damit ein gegebener Gegenstand ein sbqntf sei. Das in Rede stehende Redaktionsprojekt war das Resultat einer gewissen scharfsinnigen Vereinfachung, die von Herrn Lindenbaum in meiner ursprünglichen, von mir in den oben erwähnten Vorlesungen der „*Logistik*" im ak. J. 1924/1925 vorgetragenen Redaktion der entsprechenden terminologischen Erklärung vollführt war, welche Redaktion eine Vereinigung von gewissen fünf Bedingungen festsetzte, die notwendig und hinreichend ist, damit ein gegebener Gegenstand ein sbqntf sei.

[2] Wenn ich mich auf gewisse Voraussetzungen, die Ausdrücke betreffen, stützen würde, welche Voraussetzungen ich für mich als absolut bindend betrachte, vermöchte ich, mit Hilfe der schon angegebenen terminologischen Erklärungen nachzuweisen, dass $[A, B] : B \varepsilon \mathrm{gnrl} . A \varepsilon \mathrm{qntf} . \mathrm{1ingr}(B) \varepsilon \mathrm{ingr}(A) . \supset . A \varepsilon \mathrm{ingr}(B)$. Den von diesem Gesichtspunkte aus überflüssigen Faktor „$A \varepsilon \mathrm{ingr}(B)$", der *implicite* in dem zweiten der drei voneinander unabhängigen, in der *T. E. XI* nach dem Zeichen „$\equiv$" auftretenden Faktoren steckt, bringe ich nicht weg, da ich will,

T. E. XII. $[A, B] : A \varepsilon \mathrm{Sbqntf}(B) . \equiv . B \varepsilon \mathrm{gnrl} .$
$A \varepsilon \mathrm{sbqntf} .$
$A \varepsilon \mathrm{ingr}(B) .$
$\mathrm{Uingr}(B) \varepsilon \mathrm{ingr}(A)$

T. E. XIII. $[A, B] \therefore A \varepsilon \mathrm{Essnt}(B) . \equiv : A \varepsilon \mathrm{Cmpl}\Big(\mathrm{int}\big(\mathrm{Sbqntf}(B)\big)\Big) . \vee . A \varepsilon \mathrm{expr} . A \varepsilon \mathrm{Id}(B) . A \varepsilon \sim(\mathrm{gnrl})$

T. E. XIV. $[A, B, C] :: A \varepsilon \mathrm{var}(B, C) . \equiv \therefore B \varepsilon \mathrm{int}\big(\mathrm{Qntf}(C)\big) .$
$A \varepsilon \mathrm{cnf}(B) .$
$A \varepsilon \mathrm{ingr}\big(\mathrm{Essnt}(C)\big) \therefore$
$[D, E] : D \varepsilon \mathrm{ingr}(C) . E \varepsilon \mathrm{int}\big(\mathrm{Qntf}(D)\big) . A \varepsilon \mathrm{cnf}(E) . A \varepsilon \mathrm{ingr}(D) . \supset . D \varepsilon \mathrm{Id}(C)$ [1]

T. E. XV. $[A, B, C] \therefore A \varepsilon \mathrm{cnvar}(B, C) . \equiv : [\exists D] . A \varepsilon \mathrm{var}(D, C) :$
$[\exists D] . B \varepsilon \mathrm{var}(D, C) :$
$A \varepsilon \mathrm{cnf}(B)$ [2]

T. E. XVI. $[A] :.: A \varepsilon \mathrm{prntm} . \equiv :: [\exists B] . B \varepsilon \mathrm{int}(A) ::$
$[B] \therefore B \varepsilon \mathrm{1ingr}(A) . \vee . B \varepsilon \mathrm{int}(A) : \supset . \Big(\mathrm{ingr}(A) \cap \mathrm{scd}(B) \cap \mathrm{cnf}\big(\mathrm{1ingr}(A)\big)\Big) \infty \Big(\mathrm{ingr}(A) \cap \mathrm{scd}(B) \cap \mathrm{prntsym}\big(\mathrm{1ingr}(A)\big)\Big) ::$
$[B] \therefore B \varepsilon \mathrm{int}(A) . \vee . B \varepsilon \mathrm{Uingr}(A) : \supset . \Big(\mathrm{ingr}(A) \cap \mathrm{pred}(B) \cap \mathrm{prntsym}\big(\mathrm{1ingr}(A)\big)\Big) \infty \Big(\mathrm{ingr}(A) \cap \mathrm{pred}(B) \cap \mathrm{prntl} \cap \mathrm{cnf}\big(\mathrm{1ingr}(A)\big)\Big)$ [3]

T. E. XVII. $[A, a, B] :: A \varepsilon \mathrm{prntm}(B, a) . \equiv \therefore [C] : C \varepsilon a . \supset . C \varepsilon \mathrm{prntm} \therefore$
$B \varepsilon \mathrm{Cmpl}\big(\mathrm{1ingr}(B) \cup a\big) .$
$\mathrm{1ingr}(B) \varepsilon \mathrm{trm} .$
$A \varepsilon a$

dass sich der Leser auch ohne Hilfe der oben erwähnten Voraussetzungen genau Rechenschaft davon gebe, dass A nur in dem Falle ein $\mathrm{Qntf}(B)$ sein kann, wenn es ein $\mathrm{ingr}(B)$ ist.

[1] Vrgl.: Frege, S. 13.

[2] Vrgl. *l. c.*

[3] Die oben zu der *T. E. IX* hinzugefügte Anmerkung bezieht sich in ihrer ganzen Ausdehnung auch auf die *T. E. XVI.*

T. E. XVIII. [A, B] : A ε prntm (B) . = . [∃ a] . A ε prntm (B, a) [1)]

T. E. XIX. [A] : A ε fnct . = . [∃ B] . B ε prntm (A)

T. E. XX. [A, a, B] :·: A ε arg (B, a) . = :: B ε prntm ::
[C] ∴ C ε a . ⊃ : C ε trm . ∨ . C ε gnrl . ∨ . C ε fnct ::
Cmpl (int (B)) ε Cmpl (a) .
A ε a

T. E. XXI. [A, B] : A ε arg (B) . = . [∃ a] . A ε arg (B, a)

T. E. XXII. [A, B] : A ε Sgnfnct (B) . = . A ε expr .
A ε ingr (B) .
Cmpl (vrb ∩ ingr (B) ∩ ∼ (ingr (A))) ε prntm (B) [2)]

T. E. XXIII. [A, B] : A ε simprntm (B) . = . A ε prntm .
B ε prntm .
1ingr(A) ε cnf (1ingr (B)).
arg (A) ∞ arg (B)

T. E. XXIV. [A, B] :: A ε genfnct (B) . = ∴ A ε fnct :
prntm (A) ∞ prntm (B) . ∨ . prntm (A) ∞ prntm (B) ∴
[C, D] : C ε prntm (A) . D ε prntm (B) . (prntm (A) ∩ scd (C)) ∞ (prntm (B) ∩ scd (D)) . ⊃ . C ε simprntm (D)

[1)] In dem betrachteten System der Protothetik begegnen uns neben Ausdrücken vom Typus „f(a b...)" Ausdrücke von den Typen „f[k l...] (a b...)", „f{x y...} [k l...] (a b...)" u. s. w.. Dies ist das Resultat einer „Verallgemeinerung" der Tendenz, die ihren Ausdruck in der mathematischen Logik in solchen Formen, wie z. B. „x {Cnv' (P ⌢ Q)} y" bei den Herren Whitehead und Russell gefunden hat (vrgl.: Whitehead-Russell$_1$, S. 239).

[2)] Beim Redigieren der *T. E. XXII* benutzte ich die Bemerkungen des Herrn Lindenbaum über eine gewisse andere terminologische Erklärung, welche ich in den schon erwähnten Vorlesungen der *„Logistik"* in dem ak. J. 1924/1925 angegeben habe und welche ich jetzt — im Zusammenhang mit der Gesamtheit weitgehender Vereinfachungen, die von mir in der Zwischenzeit im System der terminologischen Erklärungen zu den Direktiven der Protothetik eingeführt worden sind, — gänzlich weggelassen habe.

T. E. XXV. [A, B, C, D] : A ε Anarg (B, C, D) . = . C ε simprntm (D) .
A ε arg (C) .
B ε arg (D) .
(arg (C) ∩ pred (A)) ∞ (arg (D) ∩ pred (B))

T. E. XXVI. [A, B, C, D] ∴ A ε Ansgnfnct (B, C, D) . = : A ε Sgnfnct (C) .
B ε Sgnfnct (D) :
[∃ E, F] . E ε prntm (C) . E ε scd (A) . F ε prntm (D) . F ε scd (B) . E ε simprntm (F)

T. E. XXVII. [A, B, C, D] ∴ A ε An (B, C, D) . = : A ε Anarg (B, C, D) . ∨ . A ε Ansgnfnct (B, C, D)

T. E. XXVIII. [A, B] : A ε Arg1 (B) . = . [∃ C] . C ε ingr (A1) . A ε Anarg (13ingr (A1), B, C)

T. E. XXIX. [A, B] : A ε Arg2 (B) . = . [∃ C] . C ε ingr (A1) . A ε Anarg (14ingr (A1), B, C) [1)]

T. E. XXX. [A, B] ∴ A ε Eqvl1 (B) . = : Sgnfnct (B) ε cnf (7ingr (A1)) :
[∃ C] . C ε prntm (B) . A ε Arg1 (C)

T. E. XXXI. [A, B] ∴ A ε Eqvl2 (B) . = : Sgnfnct (B) ε cnf (7ingr (A1)) :
[∃ C] . C ε prntm (B) . A ε Arg2 (C)

T. E. XXXII. [A, B] ∴ A ε thp (B) . = : A ε thp .
B ε thp :
A ε pred (B) . ∨ . A ε Id (B)

T. E. XXXIII. [A, B] ∴ A ε frp (B) . = : A ε thp (B) . ∨ . [∃ C, D] . C ε thp (B) . D ε ingr (C) . A ε Arg1 (D) . ∨ . [∃ C, D] . C ε thp (B) . D ε ingr (C) . A ε Arg2 (D) . ∨ . [∃ C, D] . C ε thp (B) . D ε sbqntf . D ε ingr (C) . A ε Cmpl (int (D))

T. E. XXXIV. [A, B, C] ∴ A ε 1homosemp (B, C) . = : A ε frp (C) . B ε frp (C) . ∨ . [∃ D, E] . D ε thp (C) . E ε ingr (D) . A ε cnvar (B, E) .

[1)] Auf den in der *T. E. XXVIII* und *T. E. XXIX* auftretenden Faktor „C ε ingr (A1)" bezieht sich *mutatis mutandis* die oben zu der *T. E. XI* hinzugefügte Anmerkung, die den Faktor „A ε ingr (B)" betrifft.

$\vee . [\exists D, E, F, G] . D \varepsilon \mathrm{thp}(C) . E \varepsilon \mathrm{ingr}(D) . F \varepsilon \mathrm{thp}(C) . G \varepsilon \mathrm{ingr}(F) . A \varepsilon \mathrm{An}(B, E, G)$

T. E. XXXV. $[A, B, C] :: A \varepsilon \mathrm{homosemp}(B, C) . = :\cdot: A \varepsilon \mathrm{1homosemp}(A, C) . B \varepsilon \mathrm{1homosemp}(B, C) :\cdot:$

$[a] :: [D] : D \varepsilon a . \supset . D \varepsilon \mathrm{1homosemp}(D, C) \therefore [D, E] : D \varepsilon a . E \varepsilon \mathrm{1homosemp}(D, C) . \supset . E \varepsilon a \therefore B \varepsilon a \therefore \supset . A \varepsilon a$ [1)]

Die Ausdrücke vom Typus „$A \varepsilon \mathrm{homosemp}(B, C)$“ könnte man in einer ganz freien Sprache mittels entsprechender Wendungen vom Typus „A ist mit Rücksicht auf die These C, die schon zu dem System der Protothetik gehört, ein Ausdruck von derselben semantischen Kategorie, wie B“ ablesen. Der an der letzten Stelle in dem Wort „homosemp“ auftretende Buchstabe „p“ dient zum Andeuten, dass die Zugehörigkeit irgendwelcher Ausdrücke A und B zu derselben semantischen Kategorie hier in jedem Fall — in vollkommenem Einklang mit meiner ganzen Konzeption der semantischen Kategorien — in bezug auf eine gegebene These C relativiert ist, welche zu dem System der *Protothetik* gehört. In den terminologischen Erklärungen zu den Direktiven des Systems der „Ontologie“, in der neben den semantischen Kategorien, welche schon in der Protothetik auftreten, noch verschiedene neue semantische Kategorien repräsentiert sind, wird uns das Wort „homosemo“ begegnen, dessen Endbuchstabe „o“ auf eine ähnliche Weise zum Andeuten dienen wird, dass die Zugehörigkeit irgendwelcher Ausdrücke zu derselben semantischen Kategorie dort in bezug auf die Thesen relativisiert ist, welche zu dem System der *Ontologie* gehören. Auf eine entsprechende Relativisation in dem System der „Mereologie“ wird der Endbuchstabe „m“ des Wortes „homosemm“ hinweisen, das uns in den terminologischen Erklärungen zu den Direktiven des genannten Systems der *Mereologie* begegnen wird. Eine analoge Relativisation in bezug auf die Systeme der Protothetik, Ontologie und Mereologie deuten entsprechend die Buchstaben „p“, „o“ und „m“ in einer Reihe noch anderer meiner sprachlichen

1) Auf den Faktor „$A \varepsilon \mathrm{1homosemp}(A, C)$“ bezieht sich *mutatis mutandis* die zu der *T. E. XI* hinzugefügte Anmerkung. Ähnlich verhält sich die Sache mit dem Ausdruck „$[D] : D \varepsilon a . \supset . D \varepsilon \mathrm{1homosemp}(D, C)$“, der im Vordersatz des Konditionalsatzes auftritt, welcher in der *T. E. XXXV* unter dem Quantifikator „$[a]$“ steht. Im Zusammenhang mit der *T. E. XXXV* vrgl.: Frege$_1$, SS. 40 und 41.

Abkürzungen an: neben dem Wort „thp“ werden wir es mit den Wörtern „tho“ und „thm“ zu tun haben, neben dem Wort „frp“ — mit den Wörtern „fro“ und „frm“, u. s. w..

T. E. XXXVI. $[A, B, C, D, E] :: A \varepsilon \mathrm{constp}(B, C, D, E) . = \therefore D \varepsilon \mathrm{homosemp}(E, B) \therefore$

$[F, G] : G \varepsilon \mathrm{thp}(B) . F \varepsilon \mathrm{ingr}(G) . \supset . D \varepsilon \sim \left(\mathrm{cnvar}(D, F)\right) \therefore$

$A \varepsilon \mathrm{cnf}(D) :$

$[\exists F, G, H] . F \varepsilon \mathrm{ingr}(C) . G \varepsilon \mathrm{thp}(B) . H \varepsilon \mathrm{ingr}(G) . A \varepsilon \mathrm{An}(E, F, H)$

T. E. XXXVII. $[A, B, C] : A \varepsilon \mathrm{constp}(B, C) . = . [\exists D, E] . A \varepsilon \mathrm{constp}(B, C, D, E)$

T. E. XXXVIII. $[A, B, C, D, E, F] \therefore A \varepsilon \mathrm{quasihomosemp}(B, C, D, E, F) . = : E \varepsilon \mathrm{homosemp}(F, C) :$

$[\exists G, H, I] . G \varepsilon \mathrm{ingr}(D) . H \varepsilon \mathrm{thp}(C) . I \varepsilon \mathrm{ingr}(H) . A \varepsilon \mathrm{An}(E, G, I) :$

$[\exists G, H, I] . G \varepsilon \mathrm{ingr}(D) . H \varepsilon \mathrm{thp}(C) . I \varepsilon \mathrm{ingr}(H) . B \varepsilon \mathrm{An}(F, G, I)$

T. E. XXXIX. $[A, B, C, D, E] \therefore A \varepsilon \mathrm{fnctp}(B, C, D, E) . = : D \varepsilon \mathrm{homosemp}(E, B) .$

$A \varepsilon \mathrm{genfnct}(D) :$

$[\exists F, G, H] . F \varepsilon \mathrm{ingr}(C) . G \varepsilon \mathrm{thp}(B) . H \varepsilon \mathrm{ingr}(G) . A \varepsilon \mathrm{An}(E, F, H)$

T. E. XL. $[A, B, C, D, E, F] \therefore A \varepsilon \mathrm{varp}(B, C, D, E, F) . = : E \varepsilon \mathrm{homosemp}(B, C) :$

$[\exists G, H, I] . G \varepsilon \mathrm{ingr}(D) . H \varepsilon \mathrm{thp}(C) . I \varepsilon \mathrm{ingr}(H) . F \varepsilon \mathrm{An}(E, G, I) :$

$F \varepsilon \mathrm{ingr}\left(\mathrm{Eqvl1}\left(\mathrm{Essnt}(D)\right)\right) .$

$A \varepsilon \mathrm{cnvar}(F, D)$

T. E. XLI. $[A, B, C, D, E] :: A \varepsilon \mathrm{prntmp}(B, C, D, E) . = \therefore D \varepsilon \mathrm{homosemp}(B, B) .$

$E \varepsilon \mathrm{prntm}(D) .$

A ε prntm (Eqvl2 (Essnt (C))) . arg (A) ∞ arg (E) ∴ [F, G] : F ε arg (A) . G ε arg (E) . (arg (A) ∩ pred (F)) ∞ (arg (E) ∩ pred (G)) . ⊃ . [∃ H, I] . F ε varp (G, B, C, H, I)

T. E. XLII. [A, B, C, D, E] : A ε 1prntmp (B, C, D, E) . = . A ε prntmp (B, C, D, E) . Uingr (D) ε ingr (E)

T. E. XLIII. [A, B, C, D, E, F, G] : A ε 2prntmp (B, C, D, E, F, G) . = . A ε prntmp (B, C, D, E) .
F ε prntm (D) .
Upred (F) ε ingr (E) .
G ε simprntm (F)

T. E. XLIV. [A, B] :·: A ε defp (B)[1] . = ∷ 1ingr (Essnt (A)) ε ∼ (cnvar (1ingr (Essnt (A)), A)) . 1ingr (Eqvl2 (Essnt (A))) ε ∼ (cnvar (1ingr (Eqvl2 (Essnt (A))), A)) . 1ingr (Eqvl2 (Essnt (A))) ε ∼ (constp (B, A))[2] ∷ [C] ∴ C ε trm . C ε ingr (Eqvl1 (Essnt (A))) . ⊃ : [∃ D] . D ε qntf . D ε ingr (A) . C ε int (D) . ∨ . [∃ D, E] . D ε ingr (A) . C ε var (E, D) . ∨ . C ε constp (B, A)[3] ∷

[1] Die Ausdrücke vom Typus „A ε defp (B)“ könnte man in einer ganz freien Sprache mittels entsprechender Wendungen vom Typus „A ist ein Ausdruck, der in dem System der Protothetik unmittelbar nach der These B als eine Definition gelten könnte“ ablesen.

[2] Vrgl.: Frege$_1$. S. 51.

[3] Vrgl.: Frege$_1$. SS. 41, 45 und 51.

[C, D] : D ε qntf . D ε ingr (A) . C ε int (D) . ⊃ . [∃ E, F] . E ε ingr (A) . F ε var (C, E)[1] ∴ [C, D, E] : C ε int (Qntf (A)) . E ε prntm (Essnt (A)) . D ε arg (E) . ⊃ . [∃ F] . F ε ingr (D) . F ε var (C, A)[2] ∷ [C, D, E] ∴ C ε ingr (Eqvl1 (Essnt (A))) . E ε ingr (A) . D ε cnvar (C, E) . D ε ingr (Eqvl1 (Essnt (A))) . ⊃ : D ε Id (C) . ∨ . [∃ F, G] . D ε quasihomosemp (C, B, A, F, G)[3] ∷ [C] : C ε gnrl . C ε ingr (A) . C ε ∼ (Id (A)) . ⊃ . [∃ D, E, F, G] . D ε homosemp (B, B) . E ε thp (B) . F ε ingr (E) . G ε ingr (A) . D ε Anarg (C, F, G) ∷ [C, D] ∴ C ε gnrl . C ε ingr (A) . D ε Essnt (C) . ⊃ : D ε vrb . ∨ . [∃ E] . E ε frp (B) . D ε genfnct (E) ∷ [C] ∴ C ε fnct . C ε ingr (Eqvl1 (Essnt (A))) . ⊃ : [∃ D] . D ε gnrl . D ε ingr (A) . C ε Essnt (D) . ∨ . [∃ D, E] . C ε fnctp (B, A, D, E) ∷ [C] : C ε prntm (Eqvl2 (Essnt (A))) . ⊃ . [∃ D] . D ε arg (C)[4] ∴ [C, D] : C ε prntm (Eqvl2 (Essnt (A))) . D ε arg (C) . ⊃ : [∃ E] . D ε var (E, A)[5] ∴ [C, D] : C ε trm . C ε ingr (Eqvl2 (Essnt (A))) . D ε trm . D ε ingr (Eqvl2 (Essnt (A))) . C ε cnf (D) . ⊃ . C ε Id (D) ∴ [C, D] : C ε prntm (Eqvl2 (Essnt (A))) . D ε prntm (Eqvl2 (Essnt (A))) . C ε simprntm (D) . ⊃ . C ε Id (D) ∴

[1] Vrgl.: Frege$_1$. SS. 45 und 51.

[2] Vrgl.: Frege$_1$. S. 52.

[3] Vrgl.: Frege$_1$. SS. 43—45 und 51.

[4] Vrgl.: Frege$_1$. SS. 51 und 52.

[5] Vrgl. *l. c.*

$[C, D, E] : C \;\varepsilon\; \mathrm{1prntmp}(B, A, D, E) . \mathrm{Uingr}(\mathrm{Eqvl2}(\mathrm{Essnt}(A))) \;\varepsilon\; \mathrm{ingr}(C) . \supset . C \;\varepsilon\; \mathrm{simprntm}(E) \therefore$

$[C, D, E, F, G] : C \;\varepsilon\; \mathrm{2prntmp}(B, A, D, E, F, G) . G \;\varepsilon\; \mathrm{ingr}(A) . \mathrm{Upred}(G) \;\varepsilon\; \mathrm{ingr}(C) . \supset . C \;\varepsilon\; \mathrm{simprntm}(E) \therefore$

$[C, D, E] : C \;\varepsilon\; \mathrm{prntm}(\mathrm{Eqvl2}(\mathrm{Essnt}(A))) . \mathrm{Uingr}(\mathrm{Eqvl2}(\mathrm{Essnt}(A))) \;\varepsilon\; \mathrm{ingr}(C) . D \;\varepsilon\; \mathrm{thp}(B) . E \;\varepsilon\; \mathrm{ingr}(D) . C \;\varepsilon\; \mathrm{simprntm}(E) . \supset . [\exists F, G] . C \;\varepsilon\; \mathrm{1prntmp}(B, A, F, G) \therefore$

$[C, D, E, F] : C \;\varepsilon\; \mathrm{prntm}(\mathrm{Eqvl2}(\mathrm{Essnt}(A))) . D \;\varepsilon\; \mathrm{prntm} . D \;\varepsilon\; \mathrm{ingr}(A) . \mathrm{Upred}(D) \;\varepsilon\; \mathrm{ingr}(C) . E \;\varepsilon\; \mathrm{thp}(B) . F \;\varepsilon\; \mathrm{ingr}(E) . C \;\varepsilon\; \mathrm{simprntm}(F) . \supset . [\exists G, H, I] . C \;\varepsilon\; \mathrm{2prntmp}(B, A, G, H, I, D)$

T. E. XLV. $[A, B] \,{:}{\cdot}{:}\, A \;\varepsilon\; \mathrm{cnsqrprtqntf}(B)$ [1] $. = :: \mathrm{Essnt}(\mathrm{Eqvl1}(\mathrm{Essnt}(A))) \;\varepsilon\; \mathrm{cnf}(\mathrm{Essnt}(\mathrm{Eqvl1}(\mathrm{Essnt}(B)))) .$

$\mathrm{Essnt}(\mathrm{Eqvl2}(\mathrm{Essnt}(A))) \;\varepsilon\; \mathrm{cnf}(\mathrm{Essnt}(\mathrm{Eqvl2}(\mathrm{Essnt}(B)))) \therefore$

$[C] : C \;\varepsilon\; \mathrm{int}(\mathrm{Qntf}(A)) . \supset . [\exists D] . D \;\varepsilon\; \mathrm{cnf}(C) . D \;\varepsilon\; \mathrm{ingr}(\mathrm{Qntf}(B)) ::$

$[C, D, E, F, G, H] \therefore F \;\varepsilon\; \mathrm{prntm}(\mathrm{Essnt}(A)) . G \;\varepsilon\; \mathrm{prntm}(\mathrm{Essnt}(B)) . C \;\varepsilon\; \mathrm{Anarg}(D, F, G) . E \;\varepsilon\; \mathrm{var}(H, B) . E \;\varepsilon\; \mathrm{ingr}(D) . \supset : [\exists I] : I \;\varepsilon\; \mathrm{cnf}(E) : I \;\varepsilon\; \mathrm{int}(\mathrm{Qntf}(A)) . \vee . I \;\varepsilon\; \mathrm{int}(\mathrm{Qntf}(C)) ::$

$[C, D, E, F, G] : F \;\varepsilon\; \mathrm{prntm}(\mathrm{Essnt}(A)) . G \;\varepsilon\; \mathrm{prntm}(\mathrm{Essnt}(B)) . C \;\varepsilon\; \mathrm{Anarg}(D, F, G) . E \;\varepsilon\; \mathrm{int}(\mathrm{Qntf}(D)) . \supset . [\exists H] . H \;\varepsilon\; \mathrm{cnf}(E) . H \;\varepsilon\; \mathrm{ingr}(\mathrm{Qntf}(C)) ::$

[1] Die Ausdrücke vom Typus „$A \;\varepsilon\; \mathrm{cnsqrprtqntf}(B)$" könnte man in einer ganz freien Sprache mittels entsprechender Wendungen vom Typus „A ist aus B mittels einer entsprechenden Verteilung des Quantifikators ableitbar" ablesen (vrgl. die Dir. γ).

$[C, D, E, F, G] \therefore F \;\varepsilon\; \mathrm{prntm}(\mathrm{Essnt}(A)) . G \;\varepsilon\; \mathrm{prntm}(\mathrm{Essnt}(B)) . C \;\varepsilon\; \mathrm{Anarg}(D, F, G) . E \;\varepsilon\; \mathrm{int}(\mathrm{Qntf}(C)) . \supset : [\exists H] : H \;\varepsilon\; \mathrm{cnf}(E) . H \;\varepsilon\; \mathrm{ingr}(D) : [\exists I] . H \;\varepsilon\; \mathrm{var}(I, B) . \vee . H \;\varepsilon\; \mathrm{int}(\mathrm{Qntf}(D)) ::$

$[C, D, E, F, G, H] : F \;\varepsilon\; \mathrm{prntm}(\mathrm{Essnt}(A)) . G \;\varepsilon\; \mathrm{prntm}(\mathrm{Essnt}(B)) . C \;\varepsilon\; \mathrm{Anarg}(D, F, G) . H \;\varepsilon\; \mathrm{int}(\mathrm{Qntf}(A)) . E \;\varepsilon\; \mathrm{cnf}(H) . E \;\varepsilon\; \mathrm{ingr}(\mathrm{Qntf}(C)) . \supset . [\exists I] . I \;\varepsilon\; \mathrm{cnf}(E) . I \;\varepsilon\; \mathrm{ingr}(\mathrm{Qntf}(D))$

T. E. XLVI. $[A, B, C] : A \;\varepsilon\; \mathrm{cnsqeqvl}(B, C) . = . C \;\varepsilon\; \mathrm{cnf}(\mathrm{Eqvl1}(B)) . A \;\varepsilon\; \mathrm{cnf}(\mathrm{Eqvl2}(B))$

T. E. XLVII. $[A, a, B, C] \,{:}{\cdot}{:}\, A \;\varepsilon\; \mathrm{cnsqsbstp}(B, C, a)$ [1] $. = :: \mathrm{Essnt}(A) \;\varepsilon\; \mathrm{Cmpl}(a) .$

$a \infty \mathrm{int}(\mathrm{Sbqntf}(C)) ::$

$[D, E] \therefore D \;\varepsilon\; \mathrm{int}(\mathrm{Sbqntf}(C)) . E \;\varepsilon\; a . (a \cap \mathrm{pred}(E)) \infty (\mathrm{int}(\mathrm{Sbqntf}(C)) \cap \mathrm{pred}(D)) . \supset : [\exists F] . D \;\varepsilon\; \mathrm{var}(F, C) . \vee . D \;\varepsilon\; \mathrm{cnf}(E) ::$

$[D, E] \therefore D \;\varepsilon\; \mathrm{int}(\mathrm{Sbqntf}(C)) . E \;\varepsilon\; a . (a \cap \mathrm{pred}(E)) \infty (\mathrm{int}(\mathrm{Sbqntf}(C)) \cap \mathrm{pred}(D)) . \supset : E \;\varepsilon\; \mathrm{trm} . \vee . E \;\varepsilon\; \mathrm{gnrl} . \vee . E \;\varepsilon\; \mathrm{fnct} . \vee . E \;\varepsilon\; \mathrm{cnf}(D) ::$

$[D, E, F, G] : D \;\varepsilon\; \mathrm{cnvar}(E, C) . F \;\varepsilon\; a . G \;\varepsilon\; a . (a \cap \mathrm{pred}(F)) \infty (\mathrm{int}(\mathrm{Sbqntf}(C)) \cap \mathrm{pred}(D)) . (a \cap \mathrm{pred}(G)) \infty (\mathrm{int}(\mathrm{Sbqntf}(C)) \cap \mathrm{pred}(E)) . \supset . F \;\varepsilon\; \mathrm{cnf}(G) \therefore$

$[D, E, F, G, H, I, K, L] : D \;\varepsilon\; \mathrm{ingr}(\mathrm{Essnt}(C)) . E \;\varepsilon\; \mathrm{int}(\mathrm{Qntf}(D)) . F \;\varepsilon\; \mathrm{var}(K, C) .$

[1] Die Ausdrücke vom Typus „$A \;\varepsilon\; \mathrm{cnsqsbstp}(B, C, a)$" könnte man in einer ganz freien Sprache mittels entsprechender Wendungen vom Typus „A ist aus C mit Hilfe der Ausdrücke a mittels einer in der Protothetik mit Rücksicht auf B korrekten Einsetzung ableitbar" ablesen (vrgl. die Dir. β).

F ε ingr (D) . G ε a . H ε a . (a ∩ pred (G)) ∞ (int (Sbqntf (C)) ∩ pred (E)) (a ∩ pred (H)) ∞ (int (Sbqntf (C)) ∩ pred (F)) . L ε ingr (A) . I ε var (G, L) . ⊃ . I ε ∼ (ingr (H)) [1] ::

[D, E] ∴ D ε int (Qntf (A)) . E ε cnf (D) . E ε ingr (C) . ⊃ : [∃ F] . F ε qntf . F ε ingr (C) . E ε int (F) . ∨ . [∃ F, G] . F ε ingr (C) . E ε var (G, F) ::

B ε expr :: [D] ∴ D ε trm . D ε ingr (A) . ⊃ : [∃ E] . E ε qntf . E ε ingr (A) . D ε int (E) . ∨ . [∃ E, F] . E ε ingr (A) . D ε var (F, E) . ∨ . D ε constp (B, A) ::

[D, E] : E ε qntf . E ε ingr (A) . D ε int (E) . ⊃ . [∃ F, G] . F ε ingr (A) . G ε var (D, F) ::

[D, E, F] ∴ E ε ingr (A) . F ε cnvar (D, E) . ⊃ : F ε Id (D) . ∨ . [∃ G, H] . F ε quasihomosemp (D, B, A, G, H) ::

[D] : D ε gnrl . D ε ingr (A) . D ε ∼ (Id (A)) . ⊃ . [∃ E, F, G, H] . E ε homosemp (B, B) . F ε tbp (B) . G ε ingr (F) . H ε ingr (A) . E ε Anarg (D, G, H) ::

[D, E] ∴ D ε gnrl . D ε ingr (A) . E ε Essnt (D) . ⊃ : E ε vrb . ∨ [∃ F] . F ε frp (B) . E ε genfnct (F) ::

[D] ∴ D ε fnct . D ε ingr (A) . ⊃ : D ε Id (A) . ∨ . [∃ E] . E ε gnrl . E ε ingr (A) . D ε Essnt (E) . ∨ . [∃ E, F] . D ε fnctp (B, A, E, F)

T. E. XLVIII. [A, B, C] : A ε cnsqsbstp (B, C) . = . [∃ a] . A ε cnsqsbstp (B, C, a)

T. E. IL. [A, B] ∴ A ε extnsnlp (B) . = ∷ [∃ C, D] . C ε int (Qntf (A)) . D ε int (Qntf (A)) . C ε pred (D) ∴

[C, D] : D ε qntf . D ε ingr (A) . C ε int (D) . ⊃ . [∃ E, F] . E ε ingr (A) . F ε var (C, E) . F ε ∼ (cnf (1ingr (Essnt (A)))) ∴

[1] Vrgl.: Frege$_1$, SS. 62 und 63.

[∃ C] . C ε prntm (Eqvl1 (Essnt (Eqvl2 (Essnt (A))))) . 1ingr (Eqvl1 (Cmpl (int (Sbqntf (Eqvl1 (Essnt (A))))))) ε cnvar (Cmpl (int (C)), A) :

[∃ C] . C ε prntm (Eqvl2 (Essnt (Eqvl2 (Essnt (A))))) . 1ingr (Eqvl2 (Essnt (Eqvl1 (Essnt (A))))) ε cnvar (Cmpl (int (C)), A) ::

[C] ∴ C ε fnct . C ε ingr (A) . ⊃ : [∃ D] . D ε gnrl . D ε ingr (A) . C ε Essnt (D) . ∨ . [∃ D, E] . C ε fnctp (B, A, D, E) ::

[C, D, E, F] : D ε prntm (Eqvl1 (Essnt (Eqvl1 (Essnt (A))))) . E ε prntm (Eqvl2 (Essnt (Eqvl1 (Essnt (A))))) . F ε Anarg (C, D, E) . ⊃ . F ε cnvar (C, Eqvl1 (Essnt (A))) ∴

[C, D, E] : D ε ingr (A) . E ε cnvar (C, D) . ⊃ . [∃ F, G] . E ε quasihomosemp (C, B, A, F, G) ∴

[C, D] : D ε cnvar (C, Eqvl1 (Essnt (A))) . ⊃ . [∃ E, F] . E ε ingr (A) . F ε ingr (A) . D ε Anarg (C, E, F) ∴

[C, D, E] : C ε prntm (Essnt (Eqvl2 (Essnt (A)))) . D ε arg (C) . E ε Sgnfnct (D) . ⊃ . E ε var (Cmpl (int (Qntf (Eqvl2 (Essnt (A))))), Eqvl2 (Essnt (A)))

Die Formulierung der Direktiven des Systems $\mathfrak{S}_5$ lässt sich mit Hilfe der Termine, deren Bedeutung ich in den hier angegebenen terminologischen Erklärungen festgestellt habe, auf die Festsetzung folgender Vorschrift reduzieren:

Unter der Voraussetzung, dass eine These A die letzte der Thesen ist, die schon zu dem System gehören, darf man zu ihm als neue These einen Ausdruck B nur in dem Fall hinzufügen, wenn wenigstens eine der fünf folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1) $B\, \varepsilon\, \mathrm{defp}(A)$ [Vereinigung der Dir. δ^* und ε^*]
2) $[\exists\, C] \,.\, C\, \varepsilon\, \mathrm{thp}(A) \,.\, B\, \varepsilon\, \mathrm{cnsqrprtqntf}(C)$ [Dir. γ]
3) $[\exists\, C, D] \,.\, C\, \varepsilon\, \mathrm{thp}(A) \,.\, D\, \varepsilon\, \mathrm{thp}(A) \,.\, B\, \varepsilon\, \mathrm{cnsqeqvl}(C, D)$ [Dir. α]
4) $[\exists\, C] \,.\, C\, \varepsilon\, \mathrm{thp}(A) \,.\, B\, \varepsilon\, \mathrm{cnsqsbstp}(A, C)$ [Dir. β]
5) $B\, \varepsilon\, \mathrm{extnsnlp}(A)$ [Dir. η^*]

Im § 12 leite ich auf die eben dargestellte Weise aus den Axiomen *A1*—*A3* eine Reihe verschiedener Theoreme des betrachteten Systems ab; hier möchte ich noch, etwas Licht auf die Konstruktion dieses Systems dadurch werfen, dass ich in einer ganz freien Sprache die Aufmerksamkeit des Lesers auf folgende Umstände lenke:

A) Die Direktiven des Systems $\mathfrak{S}_5$ setzen keine speziellen Gestalten voraus, die als die Gestalten der konstanten Termine des Systems im Gegensatz zu den Gestalten der Variablen dieses Systems gelten sollten: alle möglichen Wörter mit Ausnahme der Parenthesen und der Wörter, die mit dem ersten, fünften, sechsten oder letzten Wort des Axioms *A1* gleichgestaltet sind, können einmal als Konstanten, andermal als Variablen im System auftreten; der Charakter, welchen sie nach dieser Rücksicht in dieser oder jener Formel haben, hängt von der Art der in der gegebenen Formel enthaltenen Quantifikatoren und von den Positionen der genannten Quantifikatoren ab.

B) Die Direktiven des betrachteten Systems setzen keine speziellen Gestalten voraus, die als die Gestalten der konstanten oder variablen Wörter dieser oder jener semantischen Kategorie im Gegensatz zu den Gestalten der Wörter von anderen semantischen Kategorien gelten sollten. Die Wörter von beliebigen semantischen Kategorien können miteinander — sogar im Rahmen irgendwelcher *einer* zu dem System gehörigen These — gleichgestaltet sein.

C) Nach den Direktiven des Systems dürfen die Funktionszeichen einzig und allein vor den Parenthesen gestellt werden, die die Argumente umfassen, auf welche sich die betreffenden Funktionszeichen beziehen.

D) Nach den Direktiven — brauchen nicht die einzelnen Argumente voneinander durch Kommata abgetrennt werden: die terminologische Erklärung *XXI* erlaubt, ohne Hilfe irgendwelcher Kommata festzustellen, wo ein Argument endet und ein anderes beginnt.

E) Die Definitionsdirektive ist auf eine Weise formuliert, dass es unmöglich ist, in das System irgendwelche Art von Quantifikatoren — ausser den schon im voraus eingeführten universalen Quantifikatoren mit einer beliebigen Anzahl von Variablen — einzuführen.

F) Die Direktiven ermöglichen es nicht, im System irgendeine These zu erhalten, die unter ihren Bestandteilen einen universalen Satz (gnrl) enthielte, dessen Essnt gleichfalls ein universaler Satz wäre: in den Fällen, in denen man normal mit Ausdrücken vom Typus „$\llcorner a\, b \ldots \lrcorner \ulcorner \llcorner k\, l \ldots \lrcorner \ulcorner f(a\, b \ldots k\, l \ldots) \urcorner \urcorner$“ zu tun hätte, begegnen uns in meinem System nur entsprechende Ausdrücke vom Typus „$\llcorner a\, b \ldots k\, l \ldots \lrcorner \ulcorner f(a\, b \ldots k\, l \ldots) \urcorner$“, in welchen die Variablen, die im Quantifikator auftreten, angesichts der genügend „liberalen“ Formulierung der Direktiven des Systems leicht auf eine beliebige Weise innerhalb des genannten Quantifikators umgestellt werden können.

G) Die oben festgestellte „Einsetzungsdirektive“, indem sie zu verschiedenen Einsetzungen für Variablen berechtigt, gestattet nicht, etwas für einen ganzen Ausdruck vom Typus „$f(a\, b \ldots)$“ einzusetzen, wozu, wie bekannt, die Einsetzungsdirektiven ermächtigen, die mit einer weitgehenden Präzision von Frege in seinem System der Grundlagen der Arithmetik formuliert worden sind[1]. Meine Direktive ist demnach eine in dieser Beziehung schwächere Direktive. Ausschliesslich als eben solch eine schwächere Einsetzungsdirektive galt mir von Anfang an die Direktive β des Systems $\mathfrak{S}_1$ und aller Systeme der Protothetik, die ich oben besprach[2].

[1] Vrgl. *l. c.*.

[2] Vrgl.: Ajdukiewicz$_1$. SS. 209, 210, 213 und 214. Ajdukiewicz$_2$. S. 252. Vrgl. gleichfalls: v. Neumann$_1$. SS. 10, 16 und 42.

Ich bemerke hier bei Gelegenheit, dass ich der „Formalisierung“ des Systems der Protothetik durch deutliche Formulierung seiner Direktiven mit Hilfe einer Reihe von Hilfsterminen, deren Bedeutung von mir in den oben angegebenen terminologischen Erklärungen festgesetzt wurde, — einen bedeutenden Aufwand systematischer vielmonatlicher Arbeit gewidmet habe. Da ich keine Vorliebe für verschiedene „Mathematikspiele“ habe, welche darin bestehen, dass man nach diesen oder jenen konventionellen Regeln verschiedene mehr oder minder malerische Formeln aufschreibt, die nicht notwendig sinnvoll zu sein brauchen oder auch sogar, wie es einige der „Mathematikspieler“ lieber haben möchten, notwendig sinnlos sein sollen, — hätte ich mir nicht die Mühe der Systematisierung und der vielmaligen skrupulösen Kontrollierung der Direktiven meines Systems gegeben, wenn ich nicht in die Thesen dieses Systems einen gewissen ganz bestimmten, eben diesen und nicht einen anderen, Sinn legen würde, bei dem für mich die Axiome des Systems und die in den Direktiven zu diesem System kodifizierten Schluss- und Definitionsmethoden eine unwiderstehliche intuitive Geltung haben. Ich sähe keinen Widerspruch darin, wenn ich behaupten wollte, dass ich eben deshalb beim Aufbau meines Systems einen ziemlich radikalen „Formalismus“ treibe, weil ich ein verstockter „Intuitionist“ bin: indem ich mich beim Darstellen von verschiedenen deduktiven Theorien bemühe, in einer Reihe sinnvoller Sätze eine Reihe von Gedanken auszudrücken, welche ich über dieses oder jenes Thema hege, und die einen Sätze aus den anderen Sätzen auf eine Weise abzuleiten, die mit den Schlussweisen harmonisieren würde, welche ich „intuitiv“ als für mich bindend betrachte, kenne ich keine wirksamere Methode, den Leser mit meinen „logischen Intuitionen“ bekannt zu machen, als die Methode der „Formalisierung“ der darzulegenden deduktiven Theorien, die jedoch keineswegs unter dem Einfluss solch einer „Formalisierung“ aufhören, aus lauter sinnvollen Sätzen zu bestehen, welche für mich intuitive Geltung haben. Die Methode der Durchführung von mathematischen Deduktionen auf der „intuitionistischen“ Basis verschiedener logischer Geheimnisse sehe ich auf jeden Fall als eine bedeutend weniger zweckmässige Methode an [1].

[1] Die oben dargestellten Direktiven des Systems der Protothetik in Verbindung mit den Direktiven der Ontologie und Mereologie, mit welchen Direktiven

ich mich in den weiteren Abschnitten dieser Mitteilung befassen werde, betrachte ich mit ganzer Bescheidenheit nur als einen der zahlreichen Versuche der „Formalisierung“ der Mathematik, die in grösserem Massstab von verschiedenen Forschern seit den Zeiten Freges unternommen wurden und die heute am bekanntesten unter dem „metamathematischen“ Banner des Herrn David Hilbert repräsentiert werden. Indem ich erwähne, dass ich eigentlich unter den Arbeiten, die den Aufbau der Grundlagen der Mathematik zur Aufgabe haben, nicht eine einzige kenne, die auf eine -- keine Interpretationszweifel erregende — Weise eine zur Ableitung aller in dem betreffenden System effektiv anerkannten Thesen genügende Direktivenkombination festsetzen und nicht gleichzeitig auf diesem oder jenem von dem Autor des gegebenen Systems nicht vorhergesehenen Wege zum Widerspruch führen würde, — gebe ich hier bei Gelegenheit einige Beispiele gerade solcher von den Autoren nicht vorhergesehenen Ungenauigkeiten, welche im besonderen, wie es mir scheint, in den Systemen enthalten sind, die in den letzten Jahren von den Herren Chwistek (vrgl. Chwistek_1 und Chwistek_2) und J. v. Neumann (vrgl. v. Neumann_1) veröffentlicht worden sind und bisher nicht, soweit es mir bekannt ist, einer genügend erschöpfenden kritischen Analyse unterzogen wurden [kritische Bemerkungen über die Arbeiten aus demselben Gebiete, die von Herrn Hilbert und Herrn W. Ackermann herausgegeben worden sind, will ich lieber bis zu dem Augenblick unterlassen, wo schon das letztens angesagte Werk der Herren P. Bernays und Hilbert im Druck erscheinen wird, von welchem Werk man eine Synthese der bisherigen Forschungen der regen „metamathematischen“ Schule erwarten könnte (vrgl.: $\text{Hilbert-Ackermann}_1$, SS. V und 115)]:

1) Herr Chwistek setzt beim Formulieren der Direktiven seines Systems eine gewisse Kombination der Bedingungen fest, denen ein Ausdruck genügen soll, damit man ihn als eine Definition aufschreiben dürfe (vrgl.: Chwistek_1, S. 28, Punkt 0·3; Chwistek_2, S. 97, *errata*). Den Bedingungen des Herrn Chwistek scheint unter anderen die Formel zu genügen, die festsetzt, dass

(1) $\quad . p \bar{\sigma} p . \underset{df}{=} . p \supset q .$

und die wir z. B. als den Punkt 2·002 aufschreiben [im Zusammenhang mit der Bedingung 2° des Punktes 0·3 bemerke ich, dass den Ausdruck „.“, der in dem Ausdruck „. $p \bar{\sigma} p$.“ enthalten ist, der Autor hier noch nicht als „*significant*“ betrachten kann, denn er bedient sich des Ausdrucks „.“ in den „defined symbols“ einer Reihe seiner Definitionen, die mit den höheren Nummern versehen sind (vrgl. z. B.: Chwistek_1, S. 34, Punkt 3·01), was zu tun ihm die erwähnte Bedingung 2° des Punktes 0·3 verbieten würde, wenn der Ausdruck „.“ schon „*significant*“ wäre]. Aus der These 2·02 (vrgl. *l. c.*), der Def. 2·001 (vrgl. *l. c.*) und der Formel 1 (vrgl. oben in dieser Anmerkung) ergibt sich, dass

(2) $\quad \vdash . q \supset . p \bar{\sigma} p ..$

aus der Formel 2, dass

(3) $\quad \vdash .. p \supset p . \supset . p \bar{\sigma} p ..$

aus der Formel 3 und der These 2·08 (vrgl. *l. c.*), dass

(4) $\quad \vdash . p \bar{\sigma} p .$

aus den Formeln 4 und 1, dass

$$(5) \quad \vdash . p \supset q .$$

aus der Formel 5, dass

$$(6) \quad \vdash . . p \mho p . \supset q .$$

aus den Formeln 6 und 4, dass

$$(7) \quad \vdash q$$

aus der Formel 7, dass

$$(8) \quad \vdash \sim q$$

Die Formel 8 widerspricht der Formel 7.

II) Die von Herrn Chwistek festgesetzte Definitionsdirektive gestattet, wie es scheint, als Punkt 2·003 die Definition aufzuschreiben, die besagt, dass

$$(a) \quad . \underset{df}{=} . \sim$$

Aus der These 2·08 und der Def. 1·01 (vrgl.: Chwistek$_1$, S. 28) ergibt sich, dass

$$(b) \quad \vdash . \sim p \vee p$$

aus b und a, dass

$$(c) \quad \vdash . p \vee p .$$

aus der These 1·2 (vrgl.: Chwistek$_1$, S. 33) und c, dass

$$(d) \quad \vdash p$$

aus d, dass

$$(e) \quad \vdash \sim p$$

Die Formel e widerspricht der Formel d.

III) Die „klassische" Mathematik und Logik sollen nach den Intentionen des Herrn v. Neumann durch ein gewisses Formelsystem ersetzt werden, in betreff dessen dieser Autor mit Nachdruck hervorhebt, dass es mittels lauter sinnloser Zeichen aufgebaut werden soll (vrgl.: v. Neumann$_1$, SS. 4 und 5). Das Konstruieren des erwähnten Formelsystems soll im Sinne gewisser von Herrn v. Neumann festgestellter Regeln vorgehen, die ich übrigens nicht in allen Einzelheiten genau zu verstehen vermochte. Als Ausgangspunkt beim Aufbau des genannten Formelsystems gelten hier gewisse spezielle Aufschriften, von dem Autor „Axiomenschemata" genannt und von ihm auf eine gewisse Weise in die Gruppen I—VI verteilt (vrgl.: v. Neumann$_1$, SS. 13—21). Indem Herr v. Neumann in seiner Arbeit die Vermutung ausspricht, dass das in Rede stehende System ein widerspruchsfreies System in dem Sinne ist, dass in ihm keine zwei Formeln ableitbar sind, deren eine die Gestalt irgendeines Ausdrucks „a", die andere dagegen die Gestalt des entsprechenden Ausdrucks „$\sim a$" hätte (vrgl.: v. Neumann$_1$, SS. 12, 21, 36 und 37), — skizziert er gleichzeitig ein Raisonnement, das nachweisen soll, dass auf jeden Fall dasjenige System ein widerspruchsfreies System ist, welches man aus dem vorhergehenden System durch Weglassen des einzigen „Axiomenschemas", das von dem Autor zur Gruppe V gezählt wird, erhalten könnte (vrgl.: v. Neumann$_1$, SS. 18 und 21—37). Das Raisonnement des Autors über das Thema der Widerspruchsfreiheit eben dieses schwächeren Systems scheint nicht in allen Punkten genügend vorsichtig zu sein, denn, wie ich geneigt bin anzunehmen, können wir sogar ohne Hilfe des erwähnten „Schemas" der Gruppe V auf eine solche Weise mit den von dem Autor zugelassenen Methoden, neue Formeln in seinem System zu erhalten, manipulieren, dass wir in diesem System zu zwei einander widersprechenden Formeln etwa auf folgendem Wege gelangen:

Indem wir die von Herrn v. Neumann auf S. 20 seiner Arbeit besprochenen Folgen von Formeln $b^{(n)}_{u,v}$ erwägen, können wir (vrgl. *op. cit.*, S. 21) behaupten, dass sich eine solche natürliche Zahl k finden wird, dass die die Gestalt des Ausdrucks „x_1" besitzende Formel mit der Formel $b^{(1)}_{k,1}$ identisch ist, die eines der Elemente der Folge $b^{(1)}_{x,1}$ bildet; nach der von dem Autor erhaltenen Ermächtigung, zu dem System die Formeln hinzuzufügen, die auf eine von dem Autor vorhergesehene Weise unter das „Schema" 2 der Gruppe VI fallen (*op. cit.*, S. 20), dürfen wir zu dem System die entsprechende Formel hinzufügen, die besagt, dass

$$(\alpha) \quad \Omega^{(1)}_{k,1}\, 0 = 0;$$

indem wir das Symbol „$\Omega^{(1)}_{k,1}$" (vrgl. *op. cit.*, S. 21) in vollständigster Übereinstimmung mit den Vorschriften des Herrn v. Neumann, die „Abänderungen" betreffen (vrgl. *op. cit.*, SS. 8 und 9), auf eine Weise „abändern", bei der die Ausdrücke vom Typus „$\Omega^{(1)}_{k,1}\, a_1$" in die entsprechenden Ausdrücke vom Typus „$1 + a_1$" übergehen, können wir aus der Formel α die Formel erhalten, die feststellt, dass

$$(\beta) \quad 1 + 0 = 0;$$

indem wir das „Schema" 3 der Gruppe III (*op. cit.*, S. 15) in Betracht ziehen, dürfen wir behaupten [vrgl. *op. cit.*, die Vorschrift b auf S. 9, betreffend das Fortlassen von Parenthesen, und die Bezeichnungsweise des Autors auf SS. 19 und 21], dass

$$(\gamma) \quad \sim (0 + 1 = 0);$$

indem wir das Symbol „0" — wiederum in vollem Einklang mit den betreffenden Vorschriften des Herrn v. Neumann (vrgl. *op. cit.*, S. 8) — in das Symbol „1" „abändern", erhalten wir entsprechend aus den Formeln β und γ die Formeln, die festsetzen, dass —

$$1 + 1 = 1$$

und

$$\sim (1 + 1 = 1).$$

[Fortsetzung folgt.]