Contents of Volume 139, Number 2

The FUNDAMENTA MATHEMATICAE publishes papers devoted to *Set Theory, Topology, Mathematical Logic and Foundations, Real Functions, Measure and Integration, Abstract Algebra*

Each volume consists of three separate issues

Manuscripts and editorial correspondence should be addressed to:

FUNDAMENTA MATHEMATICAE

Śniadeckich 8, P.O. Box 137, 00-950 Warszawa, Poland, telex 816112 PANIM PL

Papers for publication should be submitted in two typewritten (double spaced) copies and contain a short abstract. A complete list of all handwritten symbols with indications for the printer should be enclosed. Special typefaces should be indicated according to the following code: script letters – by encircling the typed Roman letter in black, German letters – by typing the Roman equivalent and underlining in green, boldface letters – by straight black underlining. The authors will receive 50 reprints of their articles.

The publisher would like to encourage submission of manuscripts written in TeX. On acceptance of their papers, authors should send discs (preferably PC) plus relevant details to the above address, or transmit the file by electronic mail to: edimpan@plearn.

Correspondence concerning subcriptions, library exchange and back numbers should be sent to:

INSTITUTE OF MATHEMATICS, POLISH ACADEMY OF SCIENCES

Śniadeckich 8, P.O. Box 137, 00-950 Warszawa, Poland, telex 816112 PANIM PL

Published by PWN–Polish Scientific Publishers

ISBN 83-01-10631-X ISSN 0016-2736

W R O C Ł A W S K A D R U K A R N I A N A U K O W A

Groupes à moitié ordonnés

par

M. Giraudet (Paris) et **F. Lucas** (Angers)

Abstract. This paper defines and studies a class of groups provided with an order relation which includes the class of ordered groups. These structures, named here "half ordered groups", turn out, to whom keeps in mind Holland's theorem (every lattice ordered group is a group of automorphisms of some chain), to be the appropriate setting to characterize the subgroups of automorphism groups of the between relation of some chain (which are here, more conveniently, looked upon as groups of monotonic permutations of the chain). We give a set of axioms for the class of groups which can be embedded in a group of monotonic permutations of some chain, and we construct all half lattice ordered groups which have a given lattice ordered group for their increasing part.

0. Introduction. Pour qui s'intéresse aux groupes d'automorphismes de structures, ou aux groupes ordonnés, les occasions de rencontrer des groupes de permutations monotones de chaînes sont multiples, par exemple:

1) Les permutations monotones d'une chaîne $T=(T, \leqslant)$ sont exactement les automorphismes de la relation entre de cette chaîne, et, à la dualité de l'ordre près, il est indifférent de munir leur groupe de l'ordre ou de la relation entre induite point par point (Proposition I.4.1). Les groupes de permutations monotones de chaînes sont donc des groupes d'automorphismes de structures munis de la structure induite. Nous ne nous étendrons pas sur cet aspect, la structure induite sur ces groupes par la relation d'ordre de la chaîne étant plus agréable à manier que celle induite par sa relation entre.

2) Les groupes d'automorphismes de chaînes 2-homogènes (= dont tous les intervalles bornés sont isomorphes) ont été très étudiés pour leurs propriétés remarquables. Or, l'ensemble des automorphismes de groupe de l'ensemble $\operatorname{Aut} T$ de tous les automorphismes d'une telle chaîne T s'identifie à un groupe de bijections monotones du complété de Dedekind de T ([Mc1] ou [G3]). Il en va de même de l'ensemble des automorphismes de treillis de $\operatorname{Aut} T$ ([G3]).

Un théorème de représentation de W. C. Holland, d'après lequel tout groupe réticulé (= ordonné en treillis) est un groupe d'automorphismes de chaînes ordonné

1991 *Mathematics Subject Classification*: Primary 06F15; Secondary 03C60, 20B27, 06A05, 06F20, 20B24, 03C20, 20F28.

Key words and phrases: monotonic permutation of chains, automorphisms of a between relation, lattice ordered groups, half ordered groups, first order theory.

point par point, donne leurs lettres de noblesses aux groupes ordonnés. Nos groupes de bijections monotones de chaînes munis de l'ordre point par point admettent une axiomatique aussi simple et naturelle que celle des groupes réticulés. Le I.1 présente cette notion sous le terme de groupe à moitié réticulé (avec au I.2 le cas à moitié totalement ordonné), un théorème de représentation venant au I.3. Le I.4 regroupe quelques remarques sur la force comparée de différents langages de ces structures, considérations en grande partie motivées par le souci de s'assurer que les nombreux résultats d'interprétation dans des groupes réticulés (tels que ceux de [GGHG], [G4] et [G1], par exemple) sont conservés dans les groupes à moitié réticulés correspondants.

Des études classiques, dûes à P. M. Cohn ([Ch]), M. O. Rabin ([R]), P. Conrad ([C]), entre autres, ont caractérisé les groupes (amorphes) qui se plongent dans un groupe réticulé comme étant ceux qui peuvent être munis d'un ordre à gauche, et ont déduit de cette caractérisation une axiomatique de ces groupes. Dans notre seconde partie, nous utilisons ces résultats pour donner une caractérisation des groupes (amorphes) plongeables dans un groupe à moitié réticulé en introduisant la notion appropriée de demi-ordre à gauche (Théorème II.3) qui débouche sur une axiomatique (Théorème II.5).

Le problème de savoir quels sont, pour un groupe réticulé fixé arbitrairement, les groupes à moitié réticulés dont il est exactement la partie croissante a été étudié par T. J. Scott qui, dans [S], recherche ces extensions parmi celles opérant sur une chaîne fixée. Nous déterminons ces extensions indépendamment du choix de la chaîne, uniquement en fonction des automorphismes décroissants du groupe réticulé considéré (Théorème III.2). Ce point de vue, qui nous a paru naturel, a l'avantage de nous libérer de l'hypothèse de transitivité faite dans [S], notamment dans le cas totalement ordonné (Corollaire III.5), et de donner un sens non trivial à la question même quand le groupe réticulé donné est le groupe de tous les automorphismes d'une chaîne (Corollaire III.7.2). Des exemples mettront en évidence le rôle du choix de la chaîne (Remarque III.9).

Les parties II et III sont indépendantes entre elles, mais reprennent les notations et résultats de la partie I. Une certaine familiarité avec les groupes d'automorphismes de chaînes sera également utile au lecteur (voir [G]).

Les termes non définis ici sont ceux de [F] et [G].

I. Présentation axiomatique des groupes de permutations monotones de chaînes

I.1. *Définition et propriétés immédiates des groupes à moitié ordonnés*

Définitions et exemples fondamentaux. Soit G un groupe, e son élément neutre; $E = E(G)$ désignera l'ensemble des éléments d'ordre 2 de G: $E = \{x;\ x \neq e \text{ et } x^2 = e\}$.

Supposons G muni d'une relation d'ordre $\leqslant$.

Suivant l'usage, nous dirons que la relation $\leqslant$ est *compatible à droite* si,

$$\text{pour tous } x, y, z \in G: \quad y \leqslant z \Rightarrow yx \leqslant zx.$$

Nous dirons qu'un élément x de G est *croissant* si

$$\text{pour tous } y, z \in G: \quad y \leqslant z \Rightarrow xy \leqslant xz.$$

Nous dirons qu'un élément x de G est *décroissant* si

$$\text{pour tous } y, z \in G: \quad y \leqslant z \Rightarrow xz \leqslant xy.$$

Nous noterons $G{\uparrow}$ l'ensemble des éléments croissants de G et $G{\downarrow}$ l'ensemble de ses éléments décroissants.

Nous dirons que la relation $\leqslant$ est *à moitié compatible à gauche* si $G = G{\uparrow} \cup G{\downarrow}$.

Nous dirons que G est un *groupe à moitié ordonné* s'il vérifie les conditions 1 à 3 ci-dessous:

1) $\leqslant$ est une relation d'ordre non triviale sur G,
2) $\leqslant$ est compatible à droite,
3) $\leqslant$ est à moitié compatible à gauche.

Si $G{\uparrow}$ est totalement ordonné, nous dirons que G est *à moitié totalement ordonné*; si $G{\uparrow}$ est un treillis, nous dirons que G est *à moitié réticulé*.

Soit T une chaîne. Nous noterons $M(T)$ le groupe des bijections monotones de T dans T muni de l'ordre induit par celui de T point par point; $M(T)$ est un groupe à moitié réticulé. Notons que notre définition des éléments croissants et décroissants coïncide avec les notions usuelles d'applications croissantes et décroissantes. Si T n'a pas d'anti-automorphisme, $M(T) = \operatorname{Aut} T$ est réticulé, mais si T est la chaîne des rationnels ou des réels, par exemple, $M(T)$ est un groupe à moitié réticulé tel que $M(T){\downarrow}$ et E sont non vides; si T est la chaîne des entiers, $M(T)$ est à moitié totalement ordonné.

Notons que la condition de non trivialité de la relation d'ordre nous donne une théorie qui n'est pas stable par sous-structure. Cette condition est cependant fort utile pour assurer une définissabilité agréable de $G{\uparrow}$. Elle impose aussi que $G{\uparrow}$ soit non trivial.

Notre première proposition a motivé le choix du terme "à moitié ordonné".

Proposition I.1.1. *Soit G un groupe à moitié ordonné tel que $G{\downarrow} \neq \varnothing$. Alors*:

(i) *$G{\uparrow}$ est sous-groupe d'indice 2 de G, et G est réunion disjointe de $G{\uparrow}$ et $G{\downarrow}$,*
(ii) *$G{\uparrow}$ et $G{\downarrow}$ sont à la fois isomorphes et anti-isomorphes comme ensembles ordonnés,*
(iii) *un élément de $G{\uparrow}$ et un élément de $G{\downarrow}$ ne sont jamais comparables.*

Remarque I.1.2. Si G, groupe à moitié ordonné, est abélien, alors c'est un groupe ordonné ($G{\downarrow}$ est vide).

Définition. Soit G un groupe à moitié ordonné. Nous appellerons *cône positif* de G l'ensemble $P = \{g \in G;\ g \geqslant e\}$.

Notons que P est le cône positif, au sens usuel du groupe ordonné $G{\uparrow}$; en effet, les éléments de $G{\downarrow}$ ne sont pas comparables à e d'après la Proposition I.1.1.

Proposition I.1.3. *Soit G un groupe et P un sous-ensemble de G. G admet une structure de groupe à moitié ordonné pour laquelle P est son cône positif si et seulement si les conditions* (i) *à* (iii) *ci-dessous sont satisfaites*:

(i) *P est un demi-groupe,*
(ii) *$P \cap P^{-1} = \{e\}$,*
(iii) *pour tout $x \in G$, $x^{-1}Px$ est inclus dans P ou dans P^{-1}.*

Dans ce cas, $\leqslant$ *est défini par*

$$x \leqslant y \Leftrightarrow yx^{-1} \in P,$$

et $G\uparrow$ *par*

$$x \in G\uparrow \Leftrightarrow x^{-1}Px \text{ est inclus dans } P;$$

de plus, G *est à moitié totalement ordonné si et seulement si* $P \cup P^{-1}$ *est un groupe.*

Démonstration: routine.

PROPOSITION I.1.4. (a) *Soient* y *et* $z \in G$ *tels que* $y \leqslant z$. *Alors*:
- *ou bien* $y, z \in G\uparrow$ *et* $y^{-1} \geqslant z^{-1}$,
- *ou bien* $y, z \in G\downarrow$ *et* $y^{-1} \leqslant z^{-1}$.

(b) *Soient* y *et* $z \in G$ *tels que* $\sup(y, z)$ *existe. Alors*:

(i) *ou bien* $y, z \in G\uparrow$ *et* $[\sup(y, z)]^{-1} = \inf(y^{-1}, z^{-1})$,
ou bien $y, z \in G\downarrow$ *et* $[\sup(y, z)]^{-1} = \sup(y^{-1}, z^{-1})$,

(ii) *pour tout* $x \in G$, *on a*
- $\sup(y, z)x = \sup(yx, zx)$,
- *si* $x \in G\uparrow$, $x\sup(y, z) = \sup(xy, xz)$,
- *si* $x \in G\downarrow$, $x\sup(y, z) = \inf(xy, xz)$,

et dualement.

Démonstration: routine (les assertions concernant le groupe ordonné $G\uparrow$ étant classiques).

Notons que, dans le cas particulier des groupes à moitié ordonnés qui se plongent dans un groupe à moitié réticulé, les propriétés universelles telles que celles énoncées dans la Proposition I.1.4 peuvent aussi se déduire de la généralisation du théorème de Holland, donnée ici au paragraphe I.3, et de l'observation de l'ordre défini point par point sur un groupe de permutations monotones d'une chaîne, telle que faite dans [S] par exemple. Cette remarque, appliquée aux groupes ordonnés, figure déjà dans [H1].

I.2. *Groupes à moitié totalement ordonnés*

LEMME I.2.1. *Si* G *est un groupe quelconque (sans ordre), si* x *est un élément de* $E = E(G)$ *tel que, pour tout* $y \in G\backslash E$, $xyx = y^{-1}$, *alors* $G\backslash E$ *est inclus dans* xE, xE *égale* Ex, *et, si* $G\backslash E$ *est un sous-groupe de* G, *il est abélien.*

PROPOSITION I.2.2. *Si* G *est un groupe à moitié totalement ordonné, alors*:

(i) $G\downarrow = E$,

(ii) *pour tout* $x \in E$ *et tout* $y \in G\uparrow$, $xyx = y^{-1}$,

(iii) *si* $E \neq \varnothing$, $G\uparrow$ *est abélien.*

Démonstration. (i) Si $x \in G\downarrow$ et si $x \leqslant x^{-1}$, alors $x = x^{-1}$ d'après (a) de la Proposition I.1.4, donc $x \in E$.

(ii) Si $x \in E$ et $y \in G\uparrow$, $xy \in G\downarrow = E$, donc $xyxy = e$.

(iii) D'après (i), (ii) et le Lemme I.2.1.

THÉORÈME I.2.3. *Soit* G *un groupe non totalement ordonnable. Les conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) G *admet une structure de groupe à moitié totalement ordonné.*

(ii) $G\backslash E$ *est un sous-groupe sans torsion non trivial de* G *et, pour tout* $x \in E = E(G)$ *et tout* $y \in G\backslash E$, $xyx = y^{-1}$.

Sous ces conditions, $G\backslash E$ *est abélien.*

Démonstration. (i)$\Rightarrow$(ii). D'après ce qui précède.

(ii)$\Rightarrow$(i). Sous nos hypothèses, $G\backslash E$ est un groupe abélien (d'après le Lemme I.2.1) et sans torsion, il peut donc être muni d'une structure de groupe totalement ordonné (voir [F], p. 36); il est aussi sous-groupe d'indice 2 de G, et étendre son ordre pour faire de G un groupe à moitié totalement ordonné est pure routine.

I.3. *Groupes à moitié réticulés, le Théorème de Holland.* Nous considérons ici les groupes réticulés et à moitié réticulés comme des modèles d'un langage L constitué du langage des groupes et de celui des treillis ($L = \{\cdot, \sup, \inf\}$, par exemple); les notions de sous-structure et d'homomorphisme se réfèrent donc à ce langage.

Rappelons d'abord le célèbre théorème de plongement, établi par W. C. Holland dans [H1], que nous proposons de généraliser:

LE THÉORÈME DE HOLLAND. *Si* G *est un groupe réticulé, il existe une chaîne* T *telle que* G *soit isomorphe à une sous-structure de* $\operatorname{Aut} T$.

PROPOSITION I.3.1. *Si* G *est un groupe à moitié réticulé tel que* $G\downarrow$ *soit non vide, alors* $E(G)$ *est non vide.*

Démonstration. Si $x \in G\downarrow$, où G est un groupe à moitié réticulé, d'après (b)(ii) de la Proposition I.1.4, $(\sup(x, x^{-1}))^{-1} = \sup(x, x^{-1})$, donc $\sup(x, x^{-1}) \in E$.

THÉORÈME I.3.2 (Théorème de Holland généralisé). *Soit* G *un groupe à moitié réticulé. Il existe une chaîne* S *telle que* G *soit isomorphe à une sous-structure de* $M(S)$.

Démonstration. Nous supposerons $G\downarrow$ non vide, l'autre cas n'étant qu'une application du Théorème de Holland.

D'après la Proposition I.3.1, nous pouvons considérer un $a \in E = E(G)$ fixé.

D'après le Théorème de Holland, il existe une chaîne T telle que $G\uparrow$ soit isomorphe à une sous-structure de $\operatorname{Aut} T$. Nous considérerons sans inconvénients que G est égal à cette sous-structure de $\operatorname{Aut} T$.

Notons T^* la chaîne duale de T et s un anti-isomorphisme de T sur T^*. La concaténation $\sigma = s^\wedge s^{-1}$ de s et s^{-1} est un anti-automorphisme d'orde de la chaîne $T + T^*$, notée S.

Définissons une application F de $\operatorname{Aut} T$ dans $M(S)$ en posant, pour tout $f \in \operatorname{Aut} T$,

$$F(f) = safas^{-1\wedge}f, \quad \text{concaténation de } safas^{-1} \text{ et } f.$$

Il est facile de vérifier que F induit un isomorphisme (également noté F) de $G\uparrow$ sur une sous-structure de $M(S)\uparrow$.

Vérifier que cet automorphisme s'étend en un automorphisme de G sur une sous-structure de $M(T)$ en posant $F(a) = \sigma$ est également de pure routine; à titre d'exemple, vérifions ci-dessous que $F(fg) = F(f)F(g)$ pour $f \in G\uparrow$ et $g \in G\downarrow$:

La définition de F impose, en notant $g' = ag \in G\uparrow$,

$$F(g) = F(a)F(g') = \sigma(sag'as^{-1} \wedge g') = ag'as^{-1} \wedge sg'$$

et

$$F(fg) = F\big(a(afag')\big) = \sigma F(afag'),$$

où $afag' \in G\uparrow$, donc

$$F(fg) = \sigma(saafag'as^{-1} \wedge afag') = fag'as^{-1} \wedge safag',$$

d'où

$$F(f)F(g) = (safas^{-1} \wedge f)(ag'as^{-1} \wedge sg') = F(fg).$$

Le reste de la démonstration est laissé au lecteur.

I.4. *Remarque sur les langages et définissabilités*

Définition. Si $X = (X, \leqslant)$ est un ensemble ordonné, nous noterons R la relation entre définie sur X par

$$R(a, b, c) \Leftrightarrow a \leqslant b \leqslant c \text{ ou } c \leqslant a \leqslant b \qquad (a, b, c \in X).$$

Remarque I.4.1. Si $X = (X, \leqslant)$ est un ensemble ordonné filtrant, sa relation d'ordre est définissable dans sa relation entre avec deux paramètres distincts et comparables quelconques.

Il en découle que le groupe $M(T)$ des bijections monotones d'une chaîne T est égal au groupe des automorphismes de sa relation entre et que, dans ce groupe, les deux structures induites point par point, l'une par l'ordre de T, l'autre par sa relation entre, sont définissables l'une dans l'autre avec deux paramètres.

En effet, prenons pour paramètres, dans l'ensemble filtrant X, a et b tels que $a < b$. Pour $a', b' \in X$, on a $a' < b'$ si et seulement si X satisfait

$$\exists u \quad \big(R(a, b, u) \wedge R(a', b', u)\big).$$

Il est clair que toute bijection monotone d'une chaîne T préserve sa relation entre. Réciproquement, si f est un automorphisme de (T, R), ou bien $f(a) < f(b)$, ou bien $f(b) < f(a)$. D'après ce qui précède, dans le premier cas, f est un automorphisme de la chaîne T, dans le deuxième cas, c'en est un anti-automorphisme.

Enfin, le groupe $M(T)$ des bijections monotones d'une chaîne T muni de l'ordre induit point par point est réunion de deux treillis, et sa relation entre est la relation induite point par point par la relation entre de la chaîne. Dans $M(T)$, comme dans tout groupe à moitié ordonné tel que $G\uparrow$ soit filtrant, on a $f' < g'$ équivalent à $\exists u\ \exists v\ \big(R(f, g, u) \wedge R(f'v, g'v, u)\big)$, où $f < g$ dans G.

Remarque I.4.2. Si G est un groupe à moitié ordonné tel que $G\uparrow$ soit divisible, alors $G\uparrow$ est définissable dans G avec le seul langage des groupes: c'est l'ensemble des carrés de G.

En particulier, si $G\uparrow$ est divisible et 0-3 transitif sur une chaîne et admet un élément positif à support borné, alors une chaîne T', sur laquelle $G\uparrow$ agit de façon 0-3 transitive, l'action de $G\uparrow$ sur T', et par conséquent l'ordre de G tout entier sont interprétables dans G avec le langage des groupes et (au plus) un paramètre. (Voir dans [G3], Théorème 1, les interprétations décrites ici.)

Remarque I.4.3. Si G est un groupe à moitié réticulé, alors $G\uparrow$ est définissable dans G avec le langage des treillis avec paramètre e: c'est l'ensemble des f de G tels que $\sup(f, e)$ existe dans G.

En particulier, si $G\uparrow$ est réticulé, 0-2 transitif sur une chaîne et admet un élément l-premier à support borné, alors une chaîne T', sur laquelle $G\uparrow$ agit de façon 0-2 transitive, l'action de $G\uparrow$ sur T', et par conséquent l'ordre de G tout entier sont interprétables dans G avec le langage des treillis et (au plus) deux paramètres. (Voir [G3], Théorème 2.)

Remarque I.4.4. Si G, groupe à moitié ordonné, n'est pas réticulé, alors $G\uparrow$ et E ne sont pas nécessairement définissables dans G avec le seul langage de l'ordre; par exemple, le groupe $G = \{f \in \operatorname{Aut}\mathbf{Q};\ \exists a \in \mathbf{Q} - \{0\}\ \exists b \in \mathbf{Q}\ \forall x \in \mathbf{Q}\colon f(x) = ax + b\}$, où $\mathbf{Q}$ désigne la chaîne des rationnels, est à moitié ordonné et est, en tant qu'ensemble ordonné, isomorphe à sa partie croissante.

II. Théorie des sous-groupes de groupes à moitié réticulés

Définitions. Soit G un groupe muni d'une relation d'ordre notée $\leqslant$. Nous dirons que G est *à moitié totalement ordonné à gauche* si les conditions 1 et 2 ci-dessous sont satisfaites:

1) $\leqslant$ est à moitié compatible à gauche,

2) $\leqslant$ est une relation d'ordre total sur $G\uparrow$; un élément de $G\uparrow$ et un élément de $G\downarrow$ ne sont jamais comparables (ces notions sont définies en I).

Nous appellerons *cône positif* de G l'ensemble $P = \{g \in G;\ e \leqslant g\}$.

Notons que $G\uparrow$ est un groupe à moitié ordonné à gauche au sens classique (voir [C]), qu'il est égal soit à G, soit à un sous-groupe d'indice 2 de G, et que, dans le second cas, toute translation à gauche par un élément de $G\downarrow$ est un anti-isomorphisme d'ordre entre les chaînes $G\uparrow$ et $G\downarrow$.

Proposition II.1. *Soit G un groupe et P un sous-ensemble de G. G admet une structure de groupe à moitié totalement ordonné à gauche dont P est le cône positif si et seulement si les conditions* (i) *à* (iii) *ci-dessous sont satisfaites*:

(i) *P est un demi-groupe,*

(ii) $P \cap P^{-1} = \{e\}$,

(iii) *$P \cup P^{-1}$ est un sous-groupe d'indice au plus 2 de G.*

Dans ce cas, pour tous $x, y \in G$, $x \leqslant y$ est équivalent à:

- *ou bien $x, y \in P \cup P^{-1}$ et $x^{-1}y \in P$,*
- *ou bien $x, y \in G \backslash (P \cup P^{-1})$ et $x^{-1}y \in P^{-1}$.*

Démonstration: routine.

Notons que notre prochain résultat serait faux si on y remplaçait la notion de groupe ordonné à gauche par celle de groupe ordonné (voir plus loin notre Corollaire III.5).

PROPOSITION II.2. *Si H, groupe totalement ordonné à gauche, est sous-groupe d'indice 2 d'un groupe G, alors G peut être muni d'une structure de groupe à moitié totalement ordonné à gauche étendant celle de H et pour laquelle $G\uparrow = H$.*

Démonstration. Si H est un groupe totalement ordonné à gauche, notons P son cône positif; alors $H = P \cup P^{-1}$, et le résultat découle de la Proposition II.1.

THÉORÈME II.3. *Soit G un groupe. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) *G peut être muni d'une structure de groupe à moitié totalement ordonné à gauche.*

(2) *G est sous-groupe d'un groupe de permutations monotones d'une chaîne.*

(3) *G est sous-groupe d'un groupe à moitié réticulé.*

Démonstration. (1)$\Rightarrow$(2). Si G est à moitié totalement ordonné à gauche, il est clair que, par translations à gauche, il agit de façon monotone sur la chaîne obtenue par somme ordinale de $G\uparrow$ et $G\downarrow$.

(2)$\Rightarrow$(3). Trivial.

(3)$\Rightarrow$(1). Considérons G comme muni de la structure de groupe à moitié ordonné induite par celle d'un groupe à moitié réticulé dont il est sous-groupe; avec cette convention, $G\uparrow$ est sous-groupe d'indice au plus 2 de G (voir I.1.1) et sous-groupe d'un groupe réticulé. D'après [R], [Ch], ou [C], $G\uparrow$ admet donc un ordre à gauche, et le résultat découle de la Proposition II.2.

Parmi les différentes formulations existantes d'une axiomatique de la classe des groupes qui admettent une structure de groupe totalement ordonné à gauche (voir aussi [R]), nous avons choisi celle qui se déduit du résultat de P. Conrad ci-dessous ([C], Theorem 2.2, (1) et (4), p. 268):

THÉORÈME (P. Conrad). *Soit G un groupe. Les conditions (1) et (2) ci-dessous sont équivalentes:*

(1) *G peut être muni d'une structure de groupe totalement ordonné à gauche.*

(2) *Pour tout entier n et pour tout $\{a_i;\ i \in n\} \subseteq G\setminus\{e\}$, il existe $h \in \{1, -1\}^n$ tel que e n'appartienne pas au demi-groupe engendré par $\{a_i^{h(i)};\ i \in n\}$.*

Notations. Soit $X = \{x_i;\ i \in \mathbf{N}\}$ un ensemble infini de symboles de variables; $\langle X\rangle$ désigne le demi-groupe engendré par X. Remarquons que l'assertion (*) ci-dessous:

(*) $\quad (\bigwedge_{i \in N} x_i \neq e) \Rightarrow$ Il existe $h \in \{1, -1\}^n$ tel que e n'appartienne pas à $\langle\{x_i^{h(i)};\ i \in n\}\rangle$,

utilisée dans le Théorème de Conrad, est équivalente à la satisfaction d'un ensemble infini de formules du langage des groupes à variables dans X.

Nous noterons $\{T_f(x_1, \ldots, x_{n(f)});\ f \in \mathbf{N}\}$ un ensemble de formules équivalent à celui-là et décroissant pour l'implication. La classe des groupes à moitié ordonnés à gauche est donc axiomatisée par l'ensemble de formules

$$\{\forall x_1, \ldots, x_{n(f)}\ T_f(x_1, \ldots, x_{n(f)});\ f \in \mathbf{N}\}.$$

Remarque II.4. Pour qu'un groupe dénombrable admette une structure de groupe à moitié totalement ordonné à gauche, il suffit que, pour un ensemble $B = \{b_i;\ i \in \mathbf{N}\}$ générateur de G, G satisfasse l'ensemble de formules $\{T_f(b_1, \ldots \ldots, b_{n(f)});\ f \in \mathbf{N}\}$.

THÉORÈME II.5. *Soit G un groupe non trivial. Les conditions (1) et (2) ci-dessous sont équivalentes:*

(1) *G peut être muni d'une structure de groupe à moitié totalement ordonné à gauche.*

(2) *G satisfait l'ensemble de formules:*

$$\{\forall x_1, \ldots, x_{n(f)} [T_f(x_1, \ldots, x_{n(f)}) \vee \forall y_1, \ldots, y_{n(g)} \bigvee_{j \leqslant n(f)} \bigvee_{k \in K(g)} T_g(x_j^{k(1)} y_1, \ldots \ldots, x_j^{k(n(g))} y_{n(g)})];\ f, g \in \mathbf{N}\}$$

où $K(g)$ désigne l'ensemble $\{0, 1\}^{n(g)}$.

Démonstration. Notons que nous pouvons nous contenter de démontrer le théorème en supposant G dénombrable: en effet, les propriétés de G énoncées sont de caractère finitiste.

Soit $\{a_i;\ i \in \mathbf{N}\}$, où $\mathbf{N}$ est l'ensemble des entiers positifs, une énumération de $G\setminus\{e\}$.

(1)$\Rightarrow$(2). Supposons G muni d'une structure de groupe à moitié totalement ordonné à gauche. Soit $f \in \mathbf{N}$ et soient $a_{i(1)}, \ldots, a_{i(n(f))} \in G\setminus\{e\}$.

Ou bien ces éléments sont tous dans $G\uparrow$, et alors le groupe qu'ils engendrent admet un ordre total à gauche et G satisfait

$$T_f(a_{i(1)}, \ldots, a_{i(n(f))});$$

ou bien, pour un $\alpha \leqslant n(f)$, $a_{i(\alpha)} \in G\downarrow$, et alors, pour tout $g \in \mathbf{N}$ et pour tous $a_{j(1)}, \ldots, a_{j(n(g))}$, G satisfait

$$T_g(a_{i(\alpha)}^{k(1)} a_{j(1)}, \ldots, a_{i(\alpha)}^{k(n(g))} a_{j(n(g))})$$

où $k(i) = 1$ si et seulement si $a_{j(i)} \in G\downarrow$.

(2)$\Rightarrow$(1). Si G satisfait l'ensemble d'axiomes donné et n'admet pas de structure de groupe à moitié totalement ordonné à gauche, il existe un f tel qu'il ne satisfasse pas $T_f(a_1, \ldots, a_{n(f)})$. Considérons l'arbre des sections initiales k de $\{0, 1\}^{\mathbf{N}}$ telles que, pour au moins un $g \in \mathbf{N}$ et un $\alpha \leqslant n(f)$, G satisfasse

$$T_g(a_\alpha^{k(1)} a_1, \ldots, a_\alpha^{k(n(g))} a_{n(g)}).$$

D'après le Lemme de Koenig ([KM], p. 326), il existe un $k \in \{0, 1\}^{\mathbf{N}}$ tel que G satisfasse toutes les $T_g(a_\alpha^{k(1)} a_1, \ldots, a_\alpha^{k(n(g))} a_{n(g)})$ pour tout $g \in \mathbf{N}$ et pour au moins un $\alpha \leqslant n(f)$, cet α pouvant être considéré comme indépendant de g de par la décroissance, pour l'implication, des T_g.

Pour ce k et cet α, le sous-groupe de G engendré par l'ensemble $\{a_\alpha^{k(j)} a_j;\ j \in \mathbf{N}\}$ admet une structure de groupe totalement ordonné à gauche d'après la Remarque II.4. Ce sous-groupe est d'indice 2 dans G; G admet donc une structure de groupe à moitié totalement ordonné à gauche d'après la Proposition II.2.

III. Partie croissante de groupes à moitié réticulés. Si G est un groupe à moitié réticulé et a un élément décroissant de G ($a \in G\downarrow$), alors la conjugaison par a induit un automorphisme décroissant F de $G\uparrow$. Nous savons (Proposition I.3.1) qu'un tel a peut être choisi d'ordre 2; F est alors involutif. Nous nous proposons maintenant de montrer que les automorphismes décroissants et involutifs d'un groupe réticulé caractérisent, à isomorphisme près, les groupes à moitié réticulés dont il est exactement la partie croissante. Le lecteur remarquera que, dans notre rédaction, la lettre H sera désormais affectée à la désignation d'un groupe réticulé, alors que la lettre G désignera un groupe à moitié réticulé.

Définitions. Soit H un groupe réticulé. Nous noterons $I(H)$ l'ensemble des automorphismes de groupe de H qui sont décroissants pour l'ordre de H et dont le carré est l'identité (dits *automorphismes décroissants et involutifs* de H).

Pour tout $u \in H$, nous noterons I_u l'automorphisme intérieur de H défini par $I_u(x) = uxu^{-1}$.

Pour tous F et F' dans $I(H)$, nous noterons $F \# F'$ si, pour un $u \in H$, les conditions 1 et 2 ci-dessous sont satisfaites:

1) $FF' = I_u$,
2) $F(u) = u^{-1}$.

Remarque III.1. Il est facile de vérifier que, avec les notations de cette définition,

(i) si $F, F' \in I(H)$ et $FF' = I_u$, alors $F(u) = F'(u)$,
(ii) $\#$ est une relation d'équivalence sur $I(H)$,
(iii) pour tout $F \in I(H)$, la classe d'équivalence de F modulo $\#$ dans $I(H)$ est l'ensemble des FI_v où $v = xF(x^{-1})$ pour un $x \in H$.

Théorème III.2. *Pour tout groupe réticulé H, il existe une bijection entre les deux ensembles suivants:*
— l'ensemble des classes de H-isomorphismes des groupes à moitié réticulés non réticulés dont la partie croissante est H,
— l'ensemble quotient de $I(H)$ par $\#$.

Démonstration: par les Lemmes III.3 et III.4 ci-dessous.

Lemme III.3. *Soit H un groupe réticulé. A tout élément F de $I(H)$ on peut associer un groupe à moitié réticulé non réticulé $G = G_{H,F}$ tel que:*

(i) $G\uparrow = H$,
(ii) *pour un $a \in E(G)$ et pour tout $x \in H$, $F(x) = axa$,*

et un tel G est unique à H-isomorphisme près.

Démonstration. Soient H un groupe réticulé et $F \in I(H)$. Soit a un symbole sans signification préétablie. Notons aH l'ensemble de symboles $aH = \{ah;\ h \in H\}$ et notons $G = G_{H,F}$ la réunion (disjointe) de H et aH. Etendons à G la loi de H en posant, pour $h, h' \in H$,

$$(ah)(ah') = F(h)h' \quad (\text{en particulier } a^2 = F(e)e = e),$$
$$h(ah') = a(F(h)h'), \quad (ah)h' = a(hh'),$$

et étendons la relation d'ordre en posant, pour tous $h, h' \in H$,

$$ah \leqslant ah' \text{ si et seulement si } h' \leqslant h, \quad ah \text{ et } h' \text{ non comparables.}$$

Vérifier les conclusions du lemme est maintenant de pure routine.

Lemme III.4. *Soit H un groupe réticulé et soient $F, F' \in I(H)$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) $G = G_{H,F}$ *et* $G' = G_{H,F'}$ *sont H-isomorphes.*
(2) $F \# F'$.

Démonstration. (1)$\Rightarrow$(2). Soient $a \in E(G)$ et $a' \in E(G')$ tels que, pour tout $h \in H$, $F(h) = aha$ dans G et $F'(h) = a'ha'$ dans G'. Soit φ un H-isomorphisme de G' sur G. Pour tout $h \in H$, on a

$$F'(h) = \varphi F'(h) = \varphi(a'ha') = \varphi(a')h\varphi(a'),$$

donc

$$FF'(h) = a\varphi(a')h\big(a\varphi(a')\big)^{-1}.$$

Notons u l'élément $a\varphi(a')$ de $G\uparrow = H$; on a bien

$$FF' = I_u \quad \text{et} \quad F(u) = F\big(a\varphi(a')\big) = aa\varphi(a')a = \varphi(a')a = u^{-1}.$$

(2)$\Rightarrow$(1). Soient $a \in G$ et $a' \in G'$ tels que, pour tout $h \in H$, $F(h) = aha$ dans G et $F'(h) = a'ha'$ dans G'; soit u un élément de H tel que $FF' = I_u$ et $F(u) = u^{-1}$.

Vérifions que l'on définit bien un H-automorphisme φ de G' sur G en posant, pour tout $h \in H$, $\varphi(h) = h$ et $\varphi(a'h) = auh$. Soient donc h et $k \in H$. On a

$$\varphi(a'hk) = auhk = \varphi(a'h)\varphi(k),$$
$$\varphi(a'ha'k) = a'ha'k = F'(h)k = F(uhu^{-1})k = auhu^{-1}ak = auhF(u)ak$$
$$= auhauk = \varphi(a'h)\varphi(a'k),$$
$$\varphi(ha'k) = \varphi(a'a'ha'k) = aua'ha'k = au\varphi(a'ha'k) = au\varphi(a'h)\varphi(a'k)$$
$$= auauh\varphi(a'k) = F(u)u\varphi(h)\varphi(a'k) = \varphi(h)\varphi(a'k).$$

Notre premier corollaire montre qu'on peut étendre aux groupes à moitié totalement ordonnés abéliens la classification par invariants élémentaires établie pour les groupes totalement ordonnés par P. Schmitt ([Sch]). Il sera à opposer au Corollaire III.8, plus loin.

Une partie de ce résultat, limitée au cas très particulier des groupes "réguliers", dits aussi uniquement transitifs ou Ohkuma (voir [G], p. 98), a été établie par T. J. Scott ([S], Theorem 11, p. 588).

Corollaire III.5. *Soit H un groupe totalement ordonné. Alors il existe un groupe à moitié totalement ordonné non ordonné dont la partie croissante est H si et seulement si H est abélien, et dans ce cas, ce groupe à moitié ordonné est unique à H-isomorphisme près et interprétable dans H.*

Démonstration. Si H, groupe totalement ordonné, n'est pas abélien, la conclusion découle de la Proposition I.2.2(iii); si H est abélien, il est clair que l'application F définie sur H par $F(x) = x^{-1}$ est un élément de $I(H)$ et, d'après le Lemme III.3 ci-dessus et la Proposition I.2.2(ii), c'est l'unique élément de $I(H)$; il suffit donc d'appliquer le Théorème III.4. Si H est abélien, notons a un élément définissable dans H et qui n'est pas dans H, par exemple $a = (e, e) \in H^2$; F étant ici définissable, la démonstration du Lemme III.3 donne une interprétation de $G_{H,F}$ dans H.

Remarque III.6. Si H est un groupe réticulé et si F et F' sont des éléments de $I(H)$ tels que, pour un $u \in H$, $FF' = I_u$, alors u et $F(u)$ commutent et leur produit est dans le centre de H. En effet, on a alors, pour tout $x \in H$, $F(x) = axa$ pour un $a \in G_{H,F}$, donc

$$F(u)xF(u^{-1}) = auaxau^{-1}a = FFF'F(x) = F'F(x) = (FF')^{-1}(x) = u^{-1}xu,$$

donc $uF(u)$ est dans le centre de H et, puisque $u \in H$, $uF(u)u^{-1} = F(u)$.

Corollaire III.7. *Si H est un groupe réticulé 0-2 transitif sur une chaîne T et contient un élément à support borné, il existe un groupe à moitié réticulé non réticulé G dont la partie croissante est H si et seulement s'il existe une bijection décroissante Φ du complété de Dedekind de T telle que $\Phi H \Phi^{-1} = H$ et Φ^2 soit l'identité. Si, de plus, tout automorphisme de groupe et de treillis de H est intérieur, alors G est unique à H-automorphisme près et est un sous-groupe à moitié ordonné des permutations monotones de T. En particulier:*

(1) *Le groupe de tous les automorphismes de T, où T est la chaîne des rationnels, la chaîne des réels, ou un ordre dense saturé, n'est la partie croissante que du groupe des bijections monotones de T.*

(2) *Il existe une chaîne S, 2-homogène, telle que le groupe de tous les automorphismes de S soit non trivialement la partie croissante de plusieurs groupes à moitié réticulés non isomorphes.*

Démonstration. Si H est un groupe réticulé 0-2 transitif sur une chaîne T et contient un élément à support borné, d'après [Mc1] (et aussi [G3], Corollary 1.6), pour tout automorphisme décroissant F de G, il existe une bijection décroissante Φ du complété de Dedekind de T telle que, pour tout $h \in H$, $F(h) = \Phi h \Phi^{-1}$; F est involutif si et seulement si Φ^2 commute avec tout élément de H, autrement dit est l'identité. La première affirmation du Corollaire découle donc trivialement du Théorème III.2. Dans le cas où tout automorphisme de T est intérieur, l'unicité de son extension découle de la Remarque III.6, de la définition de la relation $\#$, et du fait bien connu que le centre de notre groupe est trivial.

Le fait que tous les automorphismes des groupes réticulés décrits en (1) soient intérieurs a été établi par S. H. McCleary dans [Mc2].

Il est facile de voir que l'exemple construit par W. C. Holland dans [H2] a la propriété annoncée dans (2); pour le lecteur pressé, nous reviendrons cependant sur ce fait dans la Remarque III.9.

Corollaire III.8. *Pour un groupe réticulé H, l'existence et le nombre (à H-isomorphisme près) de groupes à moitié réticulés non réticulés dont la partie croissante est H ne sont pas caractérisés par la théorie du premier ordre de H.*

Démonstration. Soit H un groupe totalement ordonné abélien et $H \times H$ le groupe réticulé produit de deux copies de H; nous savons maintenant reconnaître qu'il existe, à $H \times H$-isomorphisme près, exactement deux groupes à moitié réticulés non réticulés dont la partie croissante est exactement $H \times H$: ceux construits avec les automorphismes décroissants F et F' définis par $F((x, y)) = (-x, -y)$ et $F'((x, y)) = (-y, -x)$ (en effet, un automorphisme de produit de groupes ordonnés ne peut que préserver ou échanger les facteurs, les paires d'éléments du produit ne différant qu'en une composante étant celles qui déterminent un intervalle non vide totalement ordonné). Soit maintenant H' une extension élémentaire de H non isomorphe à H; $H \times H'$ est une extension élémentaire de $H \times H$ ([FV, Theorem 5.2]) et il n'existe, à $H \times H'$-isomorphisme près, qu'un groupe à moitié réticulé non réticulé dont la partie croissante est $H \times H'$.

Des considérations analogues sur d'autres puissances, finies ou infinies, du même groupe H permettront de faire varier la cardinalité des extensions de 1 à une cardinalité arbitraire.

Nous reviendrons sur cet exemple dans la Remarque III.9.

Pour obtenir un exemple où le nombre d'extensions varie de 0 à l'infini, considérons une chaîne T, 2-homogène, admettant une permutation décroissante, et contenant un intervalle T' qui n'admet pas de permutation décroissante (T' a une cofinalité et une co-initialité qui ne sont pas égales: on pourra prendre, par exemple, pour T une chaîne sous-jacente à un corps totalement ordonné $\omega^{\rightarrow}$-saturé, ou une longue ligne, et pour T' un intervalle borné de cofinalité et co-initialité distinctes). Notons BT et BT' respectivement les groupes d'automorphismes à support bornés de T et T'; $I(BT')$ est vide et $I(BT)$ ne l'est pas. On trouvera dans [G2] (§ 3, Exemple 3), et aussi dans [DG] (proof of Remark 2.7), la démonstration du fait que BT' est sous-structure élémentaire de BT. Le fait que le groupe BT soit la partie croissante de plusieurs groupes à moitié ordonnés distincts dans le groupe $\operatorname{Aut} T$ de tous les automorphismes de T a été remarqué par T. J. Scott ([S], Theorem 17); le fait que le nombre des classes d'isomorphismes de ces extensions soit infini découle du Théorème III.2 et de la caractérisation des automorphismes de BT donnée dans [S] et [G3]. En effet, on obtient (au moins) une partie des éléments de $I(BT)$ de la façon suivante:

Notons a une bijection décroissante et involutive de T sur une orbite de BT dans le complété de Dedekind de T. Pour chaque élément af de aBT, notons F_f l'automorphisme de BT opérant sur BT par la conjugaison par af. Pour obtenir un F_f nilpotent, il suffit de considérer un élement g de BT dont le support est contenu dans l'ensemble T' des $t \in T$ tels que $t \leqslant s$, où s est l'élément du complété de Dedekind de T fixé par a, et de prendre pour f la concaténation de g et $ag^{-1}a$.

Pour que, avec f et f' ainsi obtenus, on ait $F_f \# F_{f'}$, il faut au moins qu'on ait f et f' congrus modulo BT, c'est-à-dire g et g' congrus modulo le groupe MT' des éléments à support minoré de $\operatorname{Aut} T'$.

Le cardinal du quotient de $I(BT)$ par $\#$, et donc, d'après le Théorème III.2, celui des classes d'isomorphismes de BT cherchées, est donc au moins égal à celui du quotient de $\operatorname{Aut} T'$ par MT'.

On peut, naturellement, combiner les deux méthodes en considérant les puissances de notre BT.

Remarque III.9 (sur le choix de la chaîne dans deux exemples que nous venons de voir). 1) *L'exemple de W. C. Holland, vu dans la démonstration du Corollaire* III.7(2). Les faits suivants sont établis dans [H2]:

Notons ω_1 le premier ordinal limite non dénombrable, U un ultrafiltre sur ω_1 contenant toute les parties finissantes, R le produit lexicographique de ω_1 copies de la chaîne $\mathbf{Z}$ des entiers, $R = \{(x_\alpha);\ \alpha \in \omega_1\}$, S l'ensemble des éléments (x_α) de R tels que $\{\alpha;\ x_\alpha \text{ est pair}\} \in U$, et S' le complémentaire de S dans R; alors, S et S' sont des chaînes 2-homogènes isomorphes.

Pour obtenir des groupes à moitié réticulés dont $\operatorname{Aut} S$, le groupe des automorphismes de S, soit la partie croissante, définissons a et a', éléments du groupe $M(R)$ des permutations monotones de R, par

$$a((x_\alpha)) = (-x_\alpha) \quad \text{et} \quad a'((x_\alpha)) = (-x_\alpha + 1)$$

et F et F', respectivement, les conjugaisons sur $\operatorname{Aut} S$ par a et a'; F et F' sont dans $I(\operatorname{Aut} S)$ et FF' n'est pas intérieur (voir [H2]). Notons $G = G_{H,F}$ et $G' = G_{H,F'}$ les extensions (non isomorphes) obtenues; G peut être considéré comme le groupe $M(S)$, et G' peut être considéré comme un sous-groupe propre de $M(S \cup S')$.

2) *L'exemple de $H \times H$, où H est un groupe abélien totalement ordonné, vu dans la démonstration du Corollaire* III.8. En identifiant chaque élément de $H \times H$ à la concaténation de deux translations sur des copies H_1 et H_2 de la chaîne H, on peut considérer $H \times H$ comme opérant sur la somme ordinale $H_1 + H_2$, notée T, ou comme opérant sur la somme ordinale $H_{1-} + H_2 + H_{1+}$ (où H_{1-} est la partie négative de H_1, H_{1+} sa partie positive), notée T'. Soient F et F' les automorphismes décroissants de $H \times H$ définis par $F((x, y)) = (-x, -y)$ et $F'((x, y)) = (-y, -x)$ et $G = G_{H \times H, F}$ et $G' = G_{H \times H, F'}$ les extensions correspondantes. G opère sur T et G' opère sur T'.

Problèmes que nous n'avons pas résolus. 1. Si H, groupe réticulé, a un automorphisme décroissant, a-t-il toujours un automorphisme décroissant nilpotent (la réponse est oui pour les groupes abéliens et les groupes 0-2 transitifs ayant un élément à support borné)?

2. Pour $F, F' \in I(H)$, H groupe réticulé, suffit-il toujours que FF' soit intérieur pour que $F \# F'$ (voir ici la Remarque III.6)?

3. Pour $F, F' \in I(H)$, H groupe réticulé, à quelle condition a-t-on $G_{H,F}$ et $G_{H,F'}$, tels que définis au Lemme III.3, élémentairement équivalents?

4. Si G et G' sont isomorphes comme groupes à moitié ordonnés, avec même partie croissante H, sont ils H-isomorphes?

5. $G\!\uparrow$ est-il définissable dans G avec le langage des groupes dans tous les cas où G est un groupe à moitié réticulé (voir la Remarque I.4.2)?

Bibliographie

[Ch] P. M. Cohn, *Groups of automorphisms of ordered sets*, Mathematika 4 (1957), 41–50.

[C] P. Conrad, *Right ordered groups*, Michigan Math. J. 6 (1965), 267–275.

[DG] M. Droste and M. Giraudet, *Embeddings into simple lattice-ordered groups with different first order theories*, Forum Math., à paraître.

[FV] S. Fefferman and R. L. Vaught, *The first order properties of algebraic systems*, Fund. Math. 47 (1959), 57–103.

[F] L. Fuchs, *Partially Ordered Algebraic Systems*, Pergamon Press, 1963.

[G1] M. (Jambu)-Giraudet, *Interprétations d'arithmétiques dans des groupes et des treillis*, dans: Model Theory and Arithmetic, Proc. Paris 1979/80, Lecture Notes in Math. 890, Springer, 1981, 143–153.

[G2] —, Thèse de troisième cycle, Université Paris 7, 1980.

[G3] —, *Bi-interpretable groups and lattices*, Trans. Amer. Math. Soc. 278 (1983), 253–269.

[G4] *Quelques remarques sur l'équivalence élémentaire entre groupes ou treillis d'automorphismes de chaînes 2-homogènes*, Discrete Math. 53 (1985), 117–124.

[G] A. M. W. Glass, *Ordered Permutation Groups*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 55, Cambridge Univ. Press, 1981.

[GGHG] A. M. W. Glass, Y. Gurevich, W. C. Holland and M. (Jambu)-Giraudet, *Elementary theory of automorphism groups of doubly homogeneous chains*, dans: Logic Year in Connecticut 1979–80, Lecture Notes in Math. 859, Springer, 1981, 67–82.

[H1] W. C. Holland, *The lattice-ordered group of automorphisms of an ordered set*, Michigan Math. J. 10 (1963), 399–408.

[H2] —, *Outer automorphisms of ordered permutation groups*, Proc. Edinburgh Math. Soc. 19 (1974–75), 331–334.

[KM] K. Kuratowski and A. Mostowski, *Set Theory*, Stud. Logic Foundations Math. 86, North-Holland, 1976.

[Mc1] S. H. McCleary, *Groups of homeomorphisms with manageable automorphism group*, Comm. Algebra 6 (1978), 497–528.

[Mc2] —, *The lattice-ordered group of automorphisms of an α-set*, Pacific J. Math. 49 (1973), 417–424.

[R] M. O. Rabin, *Universal groups of automorphisms*, dans: Symposium on the Theory of Models, North-Holland, Amsterdam 1965, 274–284.

[S] T. J. Scott, *Monotonic permutations of chains*, Pacific J. Math. 55 (1974), 583–596.

[Sch] P. Schmitt, *Model theory of ordered abelian groups*, Habilitationsschrift, Heidelberg 1982.

U.A. 753 et UNIVERSITÉ DE MANS
32 Rue de la Réunion
75020 Paris, France

U.A. 753 et UNIVERSITÉ D'ANGERS
2 Bvd. Lavoisier
49045 Angers, France

Received 24 July 1989;
in revised form 24 July 1990 and 7 February 1991