But now five points of L_{ki} are arranged in the following order:

$$E_1 \cap L_{ki},\ \langle a_k, b_k\rangle,\ E_2 \cap L_{ki},\ \langle a_i, b_i\rangle,\ E_3 \cap L_{ki}.$$

Since $\langle a_k, b_k\rangle, \langle a_i, b_i\rangle \in E^c$, this means that $E \cap L_{ki}$ cannot be the union of at most two disjoint open intervals (i.e., $E \cap L_{ki} \notin \mathcal{O}_2$). Furthermore, it should be clear that the choice of $\langle a_k, b_k\rangle$ can be made from an infinite number of points $\langle a_n, b_n\rangle$ such that $E \cap L_{ni} \notin \mathcal{O}_2$, where L_{ni} and L_{mi} have different inclinations if $m \neq n$. This contradicts the fact that $D\backslash\tilde{D}$ is finite.

Remarks. It is not difficult to apply a similar method and induction to prove the following generalization: If E is a subset of $\mathbf{R}^k$ for any $k \in \mathbf{N}$ such that $E \cap L$ is open in L for every line L in $\mathbf{R}^k$, and $E \cap L \in \mathcal{O}_2$ for every line L in $\mathbf{R}^k$ except for lines in a finite number of directions, then E is open in $\mathbf{R}^k$.

Note that the theorem does not hold if the number of directions in which $E \cap L \notin \mathcal{O}_2$ is infinite. For example, let B denote the open unit ball in $\mathbf{R}^2$, let S be the sequence of points $\langle 1/n, 1/n^2\rangle$ for $n \geqslant 2$, and let $E = B\backslash S$. Then $E \cap L \in \mathcal{O}_2$ except for the lines L_{mn} determined by pairs of points in S (observe that $\operatorname{card}\{L_{mn}\} = \aleph_0$ and that $E \cap L_{mn} \in \mathcal{O}_3$ for each L_{mn}). In this case, E is neither open nor closed.

Examples of sets satisfying the hypothesis of the theorem suggest an affirmative answer to the following open question suggested by the referee: Can any set satisfying the hypothesis of Theorem 3 be written as a finite union of convex sets?

Proof of Theorem 4. Let F be a (linearly) nonmeasurable subset of $I := (0, 1)$. Then $E = F \times I$ belongs to $\mathcal{G}_1(\pi/2)$, and by Fubini's theorem, E is clearly nonmeasurable.

The author is indebted to Professor C. D. Aliprantis for a careful reading of an early draft, and especially to Professor Yuri Abramovich for his advice and encouragement. Thanks are also due to the referee for several corrections and improvements.

References

[1] E. K. van Douwen, *Fubini's theorem for null sets*, Amer. Math. Monthly 96 (1989), 718–721.
[2] B. R. Gelbaum and J. M. H. Olmstead, *Counterexamples in Analysis*, Holden-Day, San Francisco 1964.
[3] Z. Grande, *Un théorème sur la mesurabilité des fonctions de deux variables*, Acta Math. Hungar. 41 (1983), 89–91.
[4] W. Sierpiński, *Sur un problème concernant les ensembles mesurables superficiellement*, Fund. Math. 1 (1920), 112–115.

DEPARTMENT OF MATHEMATICAL SCIENCES
INDIANA UNIVERSITY – PURDUE UNIVERSITY AT INDIANAPOLIS
1125 East 38th Str.
Indianapolis, Indiana 46205-2810, U.S.A.

Received 10 April 1990;
in revised form 22 October 1990

Les fonctions continues et les fonctions intégrables au sens de Riemann comme sous-espaces de $\mathcal{L}^1$

par

Robert Cauty (Paris)

Abstract. Let $\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{C}$) be the subspace of $\mathcal{L}^1([0, 1])$ consisting of those elements having a representative which is Riemann-integrable (resp. continuous). We prove that $\mathcal{R}$ and $\mathcal{C}$ are homeomorphic to the countable product Σ^∞, where $\Sigma = \{(x_n) \in l^2 : \sum_{n=1}^\infty (nx_n)^2 < \infty\}$. We give topological characterizations of the pair $(\mathcal{R}, \mathcal{C})$ and of the difference $\mathcal{R}\backslash\mathcal{C}$.

1. Introduction. Soit $\mathcal{L}^1$ l'espace des classes de fonctions réelles intégrables sur $[0, 1]$ avec la norme usuelle $\|f\| = \int_0^1 |f(t)|\,dt$. Soit $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{R}$) le sous-espace de $\mathcal{L}^1$ formé des éléments ayant un représentant continu (resp. intégrable au sens de Riemann). Nous nous proposons ici de caractériser topologiquement les espaces $\mathcal{R}$ et $\mathcal{C}$, leur différence $\mathcal{R}\backslash\mathcal{C}$ et le couple $(\mathcal{R}, \mathcal{C})$.

Soit Σ le sous-espace de l'espace de Hilbert l^2 formé des suites (x_n) telles que $\sum_{n=1}^\infty (nx_n)^2 < \infty$, et soit Σ^∞ le produit d'une infinité dénombrable de copies de Σ.

1.1. THÉORÈME. *$\mathcal{R}$ et $\mathcal{C}$ sont homéomorphes à Σ^∞.*

Pour formuler nos caractérisations de $\mathcal{R}\backslash\mathcal{C}$ et de $(\mathcal{R}, \mathcal{C})$, nous avons besoin de quelques définitions. Si f et g sont deux fonctions de Y dans X, et si $\mathcal{U}$ est un recouvrement ouvert de X, nous dirons que f est *$\mathcal{U}$-proche* de g si, pour tout y dans Y, il y un élément de $\mathcal{U}$ contenant à la fois $f(y)$ et $g(y)$. Un sous-ensemble F d'un rétracte absolu de voisinage X est appelé un *Z-ensemble* dans X s'il est fermé et si, pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X, il existe une fonction continue f de X dans X, $\mathcal{U}$-proche de l'identité, et telle que $f(X) \subset X\backslash F$; si, de plus, il est toujours possible de choisir la fonction f de façon que $\overline{f(X)} \cap F = \emptyset$, alors F est appelé un *Z-ensemble au sens fort* dans X. Une fonction $f\colon Y \to X$ est appelée un *Z-plongement* si c'est un plongement et si $f(Y)$ est un Z-ensemble dans X.

Par un *couple* (X, X'), nous entendons un espace X et un sous-espace X' de X. Soient $\mathcal{K}_1$ et $\mathcal{K}_2$ deux classes d'espaces métrisables et séparables. Un couple (X, X') où X est un rétracte absolu de voisinage est dit *$(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$-universel* si, pour tout couple (C_1, C_2) où C_1 appartient à $\mathcal{K}_1$ et C_2 à $\mathcal{K}_2$, toute fonction continue f de C_1 dans X et tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X, il existe un Z-plongement g de C_1 dans X qui est

$\mathscr{U}$-proche de f et vérifie $g^{-1}(X') = C_2$. Le couple (X, X') est dit *fortement* $(\mathscr{K}_1, \mathscr{K}_2)$-*universel* si, pour tout couple (C_1, C_2) où C_1 appartient à $\mathscr{K}_1$ et C_2 à $\mathscr{K}_2$, tout fermé D de C_1, toute fonction continue f de C_1 dans X dont la restriction à D est un Z-plongement vérifiant $(f|D)^{-1}(X') = D \cap C_2$ et tout recouvrement ouvert $\mathscr{U}$ de X, il existe un Z-plongement g de C_1 dans X qui est $\mathscr{U}$-proche de f et vérifie $g|D = f|D$ et $g^{-1}(X') = C_2$. Si $\mathscr{K}_2$ ne contient que l'espace vide et si X' est vide, nous retrouvons la notion d'espace (fortement) $\mathscr{K}_1$-universel, introduite dans [2] par M. Bestvina et J. Mogilski.

Nous noterons $\mathscr{F}_{\sigma\delta}$ la classe des espaces (métrisables séparables) qui sont des $F_{\sigma\delta}$ absolus et $\mathscr{F}_2^2$ la classe des espaces qui sont absolument différence de deux $F_{\sigma\delta}$ (voir [4], § 33, IV).

1.2. THÉORÈME. *Un couple (X, X') d'espaces métriques séparables est homéomorphe à $(\mathscr{R}, \mathscr{C})$ si, et seulement si, il vérifie les conditions suivantes:*

(1) *X est un rétracte absolu,*

(2) *X et X' appartiennent à $\mathscr{F}_{\sigma\delta}$,*

(3) *(X, X') est fortement $(\mathscr{F}_{\sigma\delta}, \mathscr{F}_{\sigma\delta})$-universel,*

(4) *X est réunion dénombrable de Z-ensembles au sens fort.*

1.3. THÉORÈME. *Un espace métrique séparable X est homéomorphe à $\mathscr{R} \backslash \mathscr{C}$ si, et seulement si, il vérifie les conditions suivantes:*

(1) *X est un rétracte absolu appartenant à $\mathscr{F}_2^2$,*

(2) *X est fortement $\mathscr{F}_2^2$-universel,*

(3) *X est réunion dénombrable de Z-ensembles au sens fort.*

Ces trois théorèmes restent vrais si nous regardons $\mathscr{C}$ et $\mathscr{R}$ comme des sous-espaces de $\mathscr{L}^p$ $(0 < p < \infty)$. Il suffit pour le voir de remarquer que l'homéomorphisme de Mazur ([1], p. 207) de $\mathscr{L}^1$ sur $\mathscr{L}^p$ transforme une fonction continue (resp. intégrable au sens de Riemann) en une fonction continue (resp. intégrable au sens de Riemann).

Rappelons qu'une fonction f est intégrable au sens de Riemann sur $[0, 1]$ si, et seulement si, elle est bornée et l'ensemble de ses points de discontinuité est de mesure nulle (voir par exemple [6], théorème 7.5).

Pour $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, nous identifions $\mathscr{L}^1([a, b])$ à un sous-espace de $\mathscr{L}^1$ en prolongeant chaque fonction intégrable sur $[a, b]$ par zéro hors de $[a, b]$; cela identifie l'ensemble des éléments de $\mathscr{L}^1([a, b])$ ayant un représentant intégrable au sens de Riemann à $\mathscr{R} \cap \mathscr{L}^1([a, b])$. Nous notons $\mathscr{C}([a, b])$ le sous-espace de $\mathscr{L}^1([a, b])$ formé des éléments ayant un représentant continu sur $[a, b]$.

Nous commettrons systématiquement quelques abus de langage. Pour construire une fonction φ de X dans $\mathscr{L}^1$, nous construisons, pour tout x dans X, une fonction de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$ représentant $\varphi(x)$; nous appelons aussi $\varphi(x)$ cette fonction et, lorsque nous disons que $\varphi(x)$ est continue en un point t ou que $\varphi(x)(t) \geqslant 0$, c'est d'elle qu'il s'agit. Puisqu'un élément de $\mathscr{L}^1$ a au plus un représentant continu, nous identifions chaque élément f de $\mathscr{C}$ à son représentant continu, et nous posons, pour f dans $\mathscr{C}$, $\|f\|_0 = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |f(t)|$. Nous notons $(\mathscr{C}, \|\ \|_0)$ l'espace $\mathscr{C}$ muni de la topologie de la convergence uniforme.

2. Couples absorbants. Un sous-espace A d'un espace X est dit *localement homotopiquement négligeable* dans X si, pour tout ouvert U de X, l'inclusion de $U \backslash A$ dans U est une équivalence homotopique faible. Il est connu que, si X est un rétracte absolu de voisinage, cela équivaut à l'existence d'une déformation instantanée de X en $X \backslash A$, i.e. d'une fonction $\varphi\colon X \times [0, 1] \to X$ telle que $\varphi(x, 0) = x$ et que $\varphi(X \times]0, 1]) \subset X \backslash A$ (voir [7], théorème 2.4); en outre, $X \backslash A$ est alors un rétracte absolu de voisinage ([7], théorème 3.1). Il est connu que si X est un espace normé et E un sous-espace vectoriel partout dense, alors $X \backslash E$ est localement homotopiquement négligeable dans X (voir [7], théorème 2.3). D'autre part, si X est homéomorphe à l^2 et si A est un sous-ensemble de X tel que $X \backslash A$ soit localement homotopiquement négligeable dans X, alors tout Z-ensemble dans A est un Z-ensemble au sens fort (voir [2], proposition 1.7). Enfin, si X est un rétracte absolu de voisinage, A un sous-ensemble de X tel que $X \backslash A$ soit localement homotopiquement négligeable dans X et Z un Z-ensemble au sens fort dans X, alors $Z \cap A$ est un Z-ensemble au sens fort dans A (ce fait est connu; nous en avons écrit la démonstration dans [3]); en particulier, si X, Y sont deux sous-ensembles de $\mathscr{L}^1$ avec $Y \subset X$ tels que $\mathscr{L}^1 \backslash X$ et $\mathscr{L}^1 \backslash Y$ soient localement homotopiquement négligeables dans $\mathscr{L}^1$ et si U est un ouvert de X, alors, pour tout Z-ensemble Z dans U, $Z \cap Y$ est un Z-ensemble dans $U \cap Y$.

Dans la suite de cette section, $\mathscr{K}_1$ et $\mathscr{K}_2$ désigneront des classes d'espaces métriques séparables vérifiant, pour $i = 1, 2$, (i) si K appartient à $\mathscr{K}_i$ et si K' est homéomorphe à K, alors K' appartient à $\mathscr{K}_i$, (ii) tout espace qui est réunion de deux fermés appartenant à $\mathscr{K}_i$ appartient a $\mathscr{K}_i$, et (iii) tout fermé d'un espace appartenant à $\mathscr{K}_i$ appartient à $\mathscr{K}_i$.

Soit M une l^2-variété. Un couple (X, X') de sous-ensembles de M sera dit $(\mathscr{K}_1, \mathscr{K}_2)$-*absorbant* dans M s'il vérifie des conditions suivantes:

(1) $M \backslash X$ est localement homotopiquement négligeable dans M,

(2) (X, X') est fortement $(\mathscr{K}_1, \mathscr{K}_2)$-universel,

(3) $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ où chaque X_n est un Z-ensemble dans X, X_n appartient à $\mathscr{K}_1$ et $X_n \cap X'$ appartient à $\mathscr{K}_2$.

Si la classe $\mathscr{K}_2$ ne contient que l'ensemble vide, alors $X' = \emptyset$ et nous retrouvons la notion d'ensemble $\mathscr{K}_1$-absorbant due à M. Bestvina et J. Mogilski [2].

2.1. THÉORÈME. *Soient (X, X') et (Y, Y') deux couples $(\mathscr{K}_1, \mathscr{K}_2)$-absorbants dans une l^2-variété M. Alors, pour tout recouvrement ouvert $\mathscr{U}$ de M, il existe un homéomorphisme h de (X, X') sur (Y, Y') qui est $\mathscr{U}$-proche de l'inclusion $X \subsetneq M$.*

Ce théorème est l'analogue pour les couples du théorème 3.1 de [2]. L'argument de [2] s'applique à sa démonstration avec les modifications suivantes: les homéomorphismes f_n et g_n doivent être construits de façon à vérifier en plus

$$(\mathrm{e})_n \quad f_n(X_n) \cap Y' = f_n(X_n \cap X') \text{ et } g_n(Y_n) \cap X' = g_n(Y_n \cap Y').$$

Pour cela, dans la construction de f_n, le Z-plongement $h\colon X_n \cup g_{n-1}(Y_{n-1}) \to Y$ doit être choisi de façon que $h(X_n) \cap Y' = h(X_n \cap X')$, ce qui est possible d'après la $(\mathscr{K}_1, \mathscr{K}_2)$-universalité forte.

2.2. THÉORÈME. *Supposons que l^2 contienne un couple $(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$-absorbant (Ω, Ω'). Alors, un couple (X, X') d'espaces métriques séparables est homéomorphe à (Ω, Ω') si, et seulement si, il vérifie:*

(1) *X est un rétracte absolu,*

(2) *$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ où X_n est un fermé appartenant à $\mathcal{K}_1$ tel que $X_n \cap X'$ appartienne à $\mathcal{K}_2$.*

(3) *(X, X') est fortement $(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$-universel,*

(4) *X est réunion dénombrable de Z-ensembles au sens fort.*

Ce théorème correspond au théorème 5.3 de [2]. La démonstration de [2] se généralise aux couples en utilisant le fait suivant, qui est l'analogue du théorème 3.3 de [2] et se déduit du théorème 2.1 ci-dessus de la même façon que le théorème 3.3 se déduit du théorème 3.1 dans [2].

2.3. THÉORÈME. *Soient (X, X') et (Y, Y') des couples $(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$-absorbants dans une l^2-variété M, et soit $f\colon X \to Y$ une équivalence homotopique fine. Pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de Y, il y a un homéomorphisme g de (X, X') sur (Y, Y') qui est $\mathcal{U}$-proche de f.*

En fait, tous les résultats de [2] concernant la $\mathcal{K}$-universalité (forte) et les ensembles $\mathcal{K}$-absorbants se généralisent à la $(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$-universalité (forte) et aux couples $(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$-absorbants sans changement de démonstration. Nous mentionnerons seulement le résultat suivant, qui est l'analogue de la proposition 2.2 de [2].

2.4. LEMME. *Supposons que les classes $\mathcal{K}_1$ et $\mathcal{K}_2$ vérifient aussi* (iv) *tout ouvert d'un espace appartenant à $\mathcal{K}_i$ appartient à $\mathcal{K}_i$. Soient X un rétracte absolue de voisinage et X' un sous-ensemble de X. Supposons que tout Z-ensemble dans X soit un Z-ensemble au sens fort et que, pour tout ouvert U de X, le couple $(U, U \cap X')$ soit $(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$-universel. Alors, (X, X') est fortement $(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$-universel.*

3. Démonstration des théorèmes 1.1, 1.2 et 1.3. D'après [5], $\mathcal{R}$ et $\mathcal{C}$ appartiennent à $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$, donc $\mathcal{R}\backslash\mathcal{C}$ appartient à $\mathcal{F}_2^2$. D'après [2], Σ^∞ est homéomorphe à un sous-ensemble $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$-absorbant de l^2. Compte tenu des théorèmes 3.1 et 5.3 de [2] et du théorème 2.2 ci-dessus, il suffit donc, pour prouver les théorèmes 1.1, 1.2 et 1.3, de montrer que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{C}$ sont $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$-absorbants dans $\mathcal{L}^1$, que $(\mathcal{R}, \mathcal{C})$ est $(\mathcal{F}_{\sigma\delta}, \mathcal{F}_{\sigma\delta})$-absorbant et que $\mathcal{R}\backslash\mathcal{C}$ est $\mathcal{F}_2^2$-absorbant.

3.1. LEMME. *$\mathcal{L}^1\backslash\mathcal{R}$, $\mathcal{L}^1\backslash\mathcal{C}$ et $\mathcal{L}^1\backslash(\mathcal{R}\backslash\mathcal{C})$ sont localement homotopiquement négligeables dans $\mathcal{L}^1$.*

Démonstration. Puisque $\mathcal{C}$ et $\mathcal{R}$ sont des sous-espaces vectoriels partout denses de $\mathcal{L}^1$, $\mathcal{L}^1\backslash\mathcal{R}$ et $\mathcal{L}^1\backslash\mathcal{C}$ sont localement homotopiquement négligeables. Si $\varphi\colon \mathcal{L}^1\times[0, 1] \to \mathcal{L}^1$ est une déformation instantanée de $\mathcal{L}^1$ en $\mathcal{C}$ et f un élément de $\mathcal{R}\backslash\mathcal{C}$, la fonction $\psi\colon \mathcal{L}^1\times[0, 1] \to \mathcal{L}^1$ définie par $\psi(g, t) = \varphi(g, t)+tf$ est une déformation instantanée de $\mathcal{L}^1$ en $\mathcal{R}\backslash\mathcal{C}$, donc $\mathcal{L}^1\backslash(\mathcal{R}\backslash\mathcal{C})$ est localement homotopiquement négligeable.

Comme nous l'avons remarqué à la section précédente, ce lemme entraîne que $\mathcal{R}\backslash\mathcal{C}$ est un rétracte absolu et que tout Z-ensemble dans l'un des espaces $\mathcal{R}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{R}\backslash\mathcal{C}$ est un Z-ensemble au sens fort.

La vérification de l'universalité forte de $\mathcal{R}$, $\mathcal{C}$, $(\mathcal{R}, \mathcal{C})$ et $\mathcal{R}\backslash\mathcal{C}$ nécessite quelques préliminaires.

3.2. LEMME. *Soient X un espace métrique, $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ des fermés de X et $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Etant donné un réel $\varepsilon > 0$, il existe une fonction continue $\xi\colon X \to \mathcal{L}^1$ vérifiant*

(i) *$0 \leqslant \xi(x)(t) \leqslant \varepsilon$ quels que soient x et t,*

(ii) *$\xi(x)(0) = \xi(x)(1) = 0$ quel que soit x,*

(iii) *pour tout x, $\xi(x)$ est continue en tout point de $]0, 1]$,*

(iv) *$\xi(x)$ est continue en 0 si, et seulement si, $x \in F$,*

(v) *si $x \notin F$, $\underline{\lim}_{t\to 0}\, \xi(x)(t) = 0$ et $\overline{\lim}_{t\to 0}\, \xi(x)(t) = \varepsilon$,*

(vi) *si $x \in F_1$, alors $\xi(x) \equiv 0$.*

Démonstration. Supposons la distance d de X bornée par 1. Définissons par récurrence des fonction continues a_n, b_n de X dans $[0, 1]$ par

$$b_1(x) = d(x, F_1), \quad a_1(x) = \tfrac{1}{2}b_1(x),$$

$$b_{n+1}(x) = a_n(x)d(x, F_{n+1}), \quad a_{n+1}(x) = \tfrac{1}{2}b_{n+1}(x).$$

Nous avons alors $0 \leqslant b_{n+1}(x) \leqslant a_n(x) \leqslant b_n(x)$ et $a_n(x) \leqslant 2^{-n}$ pour tout n, donc les suites $\{a_n(x)\}$ et $\{b_n(x)\}$ tendent vers 0. Posant, pour $n \geqslant 1$ et x dans X, $c_n(x) = \frac{1}{2}(a_n(x)+b_n(x))$, définissons la fonction $\xi(x)$ par

(1) $\xi(x)(t) = 0$ si $t \notin \bigcup_{n=1}^{\infty}]a_n(x), b_n(x)[$,

(2) $\xi(x)(c_n(x)) = \varepsilon$ si $a_n(x) \neq b_n(x)$,

(3) $\xi(x)$ est linéaire sur $[a_n(x), c_n(x)]$ et sur $[c_n(x), b_n(x)]$.

Il est clair que $\xi(x)$ vérifie (i)–(iii), donc détermine un élément de $\mathcal{L}^1$. Utilisant le fait que a_n, b_n sont continues et que $\{b_n(x)\}$ tend vers 0, on vérifie facilement que, si $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ est une suite de points de X tendant vers x_0, alors

(4) $\forall \delta > 0$, $\xi(x_i)|[\delta, 1]$ converge uniformément vers $\xi(x_0)|[\delta, 1]$.

La continuité de $\xi\colon X \to \mathcal{L}^1$ résulte facilement de (4) et de (i).

Si x est un point de F, il y a un n tel que F_n contienne x; alors $b_m(x) = a_m(x) = 0$ pour tout $m \geqslant n$; d'après la définition de ξ, $\xi(x)$ est alors continue. Si, en particulier, $x \in F_1$, alors $b_n(x) = a_n(x) = 0$ pour tout n et (vi) résulte de (1).

Si $x \notin F$, alors $a_n(x) \neq 0 \neq b_n(x)$ quel que soit n. Alors, d'après (1) et (2), $\xi(x)(a_n(x)) = 0$ et $\xi(x)(c_n(x)) = \varepsilon$. Compte tenu de (i), puisque $\{a_n(x)\}$ et $\{c_n(x)\}$ tendent vers 0, cela prouve (v); en particulier, $\xi(x)$ n'est pas continue en 0, ce qui achève de vérifier (iv).

3.3. LEMME. *Soient X un espace métrique, A et B deux sous-ensembles de X de type $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$ avec $A \subset B$. Il existe une fonction continue $\varphi\colon X \to \mathcal{L}^1$ vérifiant*

(i) *$0 \leqslant \varphi(x)(t) \leqslant 1$ quels que soient x et t,*

(ii) *$\varphi(x)(0) = \varphi(x)(1) = 0$ quel que soit x,*

(iii) *$\varphi^{-1}(\mathcal{C}) = A$ et $\varphi(x)$ est continue pour tout x dans A,*

(iv) *$\varphi^{-1}(\mathcal{R}) = B$.*

Démonstration. Pour $n \geq 1$, prenons des réels a_n, b_n, c_n, d_n vérifiant

$$0 < d_{n+1} < c_n < d_n < 1/2 < b_{n+1} < a_n < b_n < 1$$

de façon que les suites $\{a_n\}$ et $\{c_n\}$ convergent vers 1/2 et 0 respectivement. Posons $I_n = [a_n, b_n]$ et $J_n = [c_n, d_n]$. Soit C_n un ensemble de Cantor de mesure > 0 contenu dans J_n et contenant $\{c_n, d_n\}$; soient $I_n^k = [a_n^k, b_n^k]$, $k \geq 1$, les fermetures des composantes de $J_n \setminus C_n$.

Soit $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, où F_n est un sous-ensemble de X de type F_σ. Le lemme 3.2 nous permet de trouver, pour tout $n \geq 1$, une fonction continue $\xi_n\colon X \to \mathscr{L}^1([a_n, b_n])$ vérifiant

(1) $0 \leq \xi_n(x)(t) \leq 1/n$ quels que soient x et t,
(2) $\xi_n(x)(a_n) = \xi_n(x)(b_n) = 0$ quel que soit x,
(3) $\xi_n(x)$ est continue en tout point de $]a_n, b_n]$,
(4) $\xi_n(x)$ est continue en a_n si, et seulement si, x appartient à F_n,
(5) si $x \notin F_n$, $\varliminf_{t \to a_n^+} \xi_n(x)(t) = 0$ et $\varlimsup_{t \to a_n^+} \xi_n(x)(t) = 1/n$.

Soit $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, où $G_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_n^k$, les G_n^k étant fermés dans X et vérifiant $G_n^k \subset G_n^{k+1}$ quels que soient n et k. Le lemme 3.2 nous permet de trouver une fonction continue $\xi_n^k\colon X \to \mathscr{L}^1([a_n^k, b_n^k])$ vérifiant

(6) $0 \leq \xi_n^k(x)(t) \leq 1/n$ quels que soient x et t,
(7) $\xi_n^k(x)(a_n^k) = \xi_n^k(x)(b_n^k) = 0$ quel que soit x,
(8) $\xi_n^k(x)$ est continue en tout point de $]a_n^k, b_n^k]$,
(9) $\xi_n^k(x)$ est continue en a_n^k si, et seulement si, x appartient à G_n,
(10) si $x \notin G_n$, $\varliminf_{t \to a_n^{k+}} \xi_n^k(x)(t) = 0$ et $\varlimsup_{t \to a_n^{k+}} \xi_n^k(x)(t) = 1/n$ pour tout $k \geq 1$,
(11) si $x \in G_n^k$, alors $\xi_n^k(x) \equiv 0$.

Définissons une fonction $\varphi(x)\colon [0, 1] \to \mathbf{R}$ par

$$\varphi(x)(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) \cup \left(\bigcup_{n,k=1}^{\infty} I_n^k\right), \\ \xi_n(x)(t) & \text{si } t \in I_n, \\ \xi_n^k(x)(t) & \text{si } t \in I_n^k. \end{cases} \tag{12}$$

Puisque les intervalles I_n et I_n^k sont deux à deux disjoints, cette définition a un sens. Pour $m \geq 1$, la fonction $\varphi_m\colon X \to \mathscr{L}^1$ définie par

$$\varphi_m(x)(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin \left(\bigcup_{n=1}^{m} I_n\right) \cup \left(\bigcup_{n,k=1}^{m} I_n^k\right), \\ \xi_n(x)(t) & \text{si } t \in I_n,\ n \leq m, \\ \xi_n^k(x)(t) & \text{si } t \in I_n^k,\ n, k \leq m, \end{cases}$$

est évidemment continue. De plus, d'après (1) et (6), $\|\varphi_m(x) - \varphi(x)\|$ est inférieure à la somme Δ_m des longueurs des intervalles I_n et I_n^k tels que $n > m$ ou $k > m$; ces intervalles étant deux à deux disjoints, Δ_m tend vers 0, donc φ est la limite uniforme des fonctions continues φ_m, donc est une fonction continue de X dans $\mathscr{L}^1$. Les conditions (i) et (ii) sont évidemment vérifiées.

Soit x un point de $X \setminus B$, et soit f un représentant de $\varphi(x)$. Il y a un n tel que $x \notin G_n$. Si t_0 est un point de C_n et U un voisinage de t_0 dans $[0, 1]$, il y a un k tel que U contienne I_n^k. Puisque f et $\varphi(x)$ sont égales presque partout, il résulte de (8) et (10) que

$$\sup\{f(t)\colon t \in U\} \geq \sup\{\varphi(x)(t)\colon a_n^k < t < b_n^k\} \geq 1/n,$$
$$\inf\{f(t)\colon t \in U\} \leq \inf\{\varphi(x)(t)\colon a_n^k < t < b_n^k\} \leq 0.$$

Ceci étant vrai pour tout voisinage de t_0, f n'est pas continue en t_0. L'ensemble des points de discontinuité de f contient donc C_n, qui est de mesure > 0, donc f n'est pas intégrable au sens de Riemann, ce qui montre que $\varphi(x) \notin \mathscr{R}$.

Pour montrer que $\varphi(B)$ est contenu dans $\mathscr{R}$, il suffit de vérifier que, si x appartient à B, l'ensemble des points de discontinuité de $\varphi(x)$ est contenu dans l'ensemble dénombrable $\{a_n\colon n \geq 1\}$. D'après (12) et (1), $0 \leq \varphi(x)(t) \leq 1/n$ pour $d_1 < t < b_n$; puisque $d_1 < 1/2 < b_n$, $\varphi(x)$ est continue en 1/2. D'après (12), (2) et (3), $\varphi(x)$ est continue en tout point de $]1/2, 1]$ qui n'est pas un des a_n. D'après (12) et (6), $0 \leq \varphi(x)(t) \leq 1/n$ pour $0 \leq t \leq d_n$, donc $\varphi(x)$ est continue en 0. D'après (12), (7) et (8), $\varphi(x)$ est continue en tout point de $]0, 1/2[$ qui n'appartient à aucun des J_n, et elle est continue à gauche (resp. droite) en c_n (resp. d_n). Reste à voir que $\varphi(x)|J_n$ est continue. Pour cela, remarquons que, n étant fixé, x appartient à G_n, donc il existe un k_0 tel que $x \in G_n^k$ pour $k \geq k_0$. D'après (11), $\xi_n^k(x) \equiv 0$ pour $k \geq k_0$, donc, d'après (12), $\varphi(x)$ est nulle sur $J_n \setminus \bigcup_{k=1}^{k_0} I_n^k$, et la continuité de $\varphi(x)|J_n$ résulte de (12), (7), (8) et (9).

Soit $x \in B \setminus A$, et soit f un représentant de $\varphi(x)$. Il y a un n tel que $x \notin F_n$. Puisque f et $\varphi(x)$ sont égales presque partout, il résulte de (12), (3) et (5) que

$$\varlimsup_{t \to a_n^+} f(t) \geq \varlimsup_{t \to a_n^+} \varphi(x)(t) = 1/n, \qquad \varliminf_{t \to a_n^+} f(t) \leq \varliminf_{t \to a_n^+} \varphi(x)(t) = 0,$$

donc f n'est pas continue en a_n, ce qui montre que $\varphi(x) \notin \mathscr{C}$.

Pour montrer que $\varphi(A) \subset \mathscr{C}$, il reste seulement à vérifier que si x appartient à A, alors $\varphi(x)$ est aussi continue aux points a_n, ce qui résulte de (12), (2) et (4).

3.4. Lemme. *Pour tout couple (X, Y) d'espaces appartenant à $\mathscr{F}_{\sigma\delta}$, il existe un plongement fermé ψ de X dans $\mathscr{R}$ vérifiant*

(i) $0 \leq \psi(x)(t) \leq 1$ *quels que soient x et t,*
(ii) $\psi(x)(0) = \psi(x)(1) = 0$ *pour tout x,*
(iii) $\psi^{-1}(\mathscr{C}) = Y$ *et $\psi(x)$ est continue pour tout x dans Y.*

Démonstration. Nous pouvons supposer X contenu dans le cube de Hilbert $Q = \prod_{n=1}^{\infty} I_n$, où $I_n = [0, 1]$ pour tout n. D'après le lemme précédent, il existe une fonction continue $\varphi\colon Q \to \mathscr{L}^1$ vérifiant

(1) $0 \leq \varphi(x)(t) \leq 1$ quels que soient x et t,
(2) $\varphi(x)(0) = \varphi(x)(1) = 0$ pour tout x,
(3) $\varphi^{-1}(\mathscr{C}) = Y$ et $\varphi(x)$ est continue pour tout x dans Y,
(4) $\varphi^{-1}(\mathscr{R}) = X$.

Définissons une fonction $\theta\colon Q \to \mathscr{L}^1$ comme suit:

(5) $\theta(x)(0) = \theta(x)(2^{-n}) = 0$ pour tout $n \geq 0$,

(6) $\theta(x)(2^{-n}+2^{-(n+1)}) = x_n 2^{-n}$ pour $x = (x_n)$ dans Q et $n \geqslant 1$,

(7) $\theta(x)$ est linéaire sur chaque intervalle $[2^{-n}, 2^{-n}+2^{-(n+1)}]$ et $[2^{-n}+2^{-(n+1)}, 2^{-(n-1)}]$ $(n \geqslant 1)$.

Il est clair que $\theta(x)$ est continue, ainsi que θ. Si x et x' sont deux points distincts de Q, il existe un n tel que $x_n \neq x_n'$; alors, d'après (5)–(7), $\theta(x)(t) \neq \theta(x')(t)$ pour tout t dans $]2^{-n}, 2^{-(n-1)}[$, donc $\theta(x) \neq \theta(x')$ dans $\mathscr{L}^1$, ce qui montre que θ est injective.

Définissons enfin $\hat{\psi}$: $Q \to \mathscr{L}^1$ par

$$\hat{\psi}(x)(t) = \begin{cases} \varphi(x)(2t), & 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ \theta(x)(2t-1), & 1/2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Il est clair que $\hat{\psi}$ est continue. Si $x \neq x'$, alors $\theta(x) \neq \theta(x')$ dans $\mathscr{L}^1$, donc $\hat{\psi}(x) \neq \hat{\psi}(x')$ et $\hat{\psi}$ est un plongement de Q dans $\mathscr{L}^1$. Puisque $\theta(x)$ est continue, $\hat{\psi}(x)$ appartient à $\mathscr{R}$ si, et seulement si, $\varphi(x)$ appartient à $\mathscr{R}$, donc $\hat{\psi}(Q) \cap \mathscr{R} = \hat{\psi}(X)$ d'après (4); la restriction ψ de $\hat{\psi}$ à X est donc un plongement fermé de X dans $\mathscr{R}$. Si $x \in X \setminus Y$, (3) entraîne que $\psi(x)|[0, 1/2]$ n'a pas de représentant continu, donc $\psi(x)$ n'appartient pas à $\mathscr{C}$. Si $x \in Y$, il résulte de (3), (5) et de la continuité de $\theta(x)$ que $\psi(x)$ est continue. Ceci vérifie (iii). Les conditions (i) et (ii) sont évidemment satisfaites.

3.5. LEMME. *Il existe une fonction continue Φ: $\mathscr{L}^1 \times [0, 1/2] \to \mathscr{L}^1$ vérifiant*

(i) *$\Phi(f, 0) = f$ pour tout f,*

(ii) *$\Phi(\mathscr{L}^1 \times]0, 1/2]) \subset \mathscr{C}$,*

(iii) *$\Phi(f, t)$ est nulle sur $[0, t]$ pour (f, t) dans $\mathscr{L}^1 \times]0, 1/2]$,*

(iv) *si $\{(f_n, t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite dans $\mathscr{L}^1 \times]0, 1/2]$ telle que $\{\Phi(f_n, t_n)\}$ converge vers un élément g de $\mathscr{L}^1$ et que $\{t_n\}$ tende vers 0, alors $\{f_n\}$ tend aussi vers g.*

Démonstration. Construisons d'abord une fonction continue Ψ: $\mathscr{L}^1 \times [0, 1/2] \to \mathscr{L}^1$ vérifiant

(1) $\|f - \Psi(f, t)\| \leqslant t$ quels que soient f et t,

(2) $\Psi(\mathscr{L}^1 \times]0, 1/2]) \subset \mathscr{C}$ et $\Psi|\mathscr{L}^1 \times]0, 1/2]$: $\mathscr{L}^1 \times]0, 1/2] \to (\mathscr{C}, \| \ \|_0)$ est continue,

(3) $\Psi(f, t)(0) = 0$ pour (f, t) dans $\mathscr{L}^1 \times]0, 1/2]$.

Pour cela, prenons, pour tout $n \geqslant 1$, un recouvrement ouvert localement fini $\mathscr{U}_n = \{U_\alpha: \alpha \in A_n\}$ de $\mathscr{L}^1$ tel que le diamètre de chaque U_α soit $< 2^{-(n+1)}$. Soit $\{\varphi_\alpha: \alpha \in A_n\}$ une partition de l'unité subordonnée à $\mathscr{U}_n$. En utilisant le fait que $\mathscr{C}$ est dense dans $\mathscr{L}^1$, nous pouvons trouver, pour tout α dans A_n, un élément g_α^n de $\mathscr{C} \cap U_\alpha$ vérifiant $g_\alpha^n(0) = 0$. Définissons ψ_n: $\mathscr{L}^1 \to \mathscr{L}^1$ par

$$\psi_n(f) = \sum_{\alpha \in A_n} \varphi_\alpha(f) g_\alpha^n.$$

Alors

(4) $$\psi_n(f)(0) = 0 \quad \text{pour tout } f \text{ dans } \mathscr{L}^1.$$

Pour f dans $\mathscr{L}^1$ et α dans A_n, si $\varphi_\alpha(f) \neq 0$, alors $f \in U_\alpha$, donc $\|f - g_\alpha^n\| < 2^{-(n+1)}$, d'où

(5) $$\|f - \psi_n(f)\| < 2^{-(n+1)}.$$

Définissons Ψ: $\mathscr{L}^1 \times [0, 1/2] \to \mathscr{L}^1$ par

$$\Psi(f, 0) = f,$$
$$\Psi(f, t) = (2^{n+1}t - 1)\psi_n(f) - (2 - 2^{n+1}t)\psi_{n+1}(f), \quad 2^{-(n+1)} \leqslant t \leqslant 2^{-n}.$$

Pour f dans $\mathscr{L}^1$ et $2^{-(n+1)} \leqslant t \leqslant 2^{-n}$, nous avons, d'après (5),

$$\|f - \Psi(f, t)\| \leqslant \max(\|f - \psi_{n+1}(f)\|, \|f - \psi_n(f)\|) \leqslant 2^{-(n+1)} \leqslant t,$$

d'où (1). Soient f dans $\mathscr{L}^1$ et $t > 0$; soit n tel que $2^{-(n+1)} \leqslant t \leqslant 2^{-n}$, et soit V un voisinage de f ne rencontrant qu'un nombre fini d'éléments de $\mathscr{U}_{n+1}$ et $\mathscr{U}_n$. La restriction de Ψ à $V_n \times [2^{-(n+1)}, 2^{-n}]$ est une combinaison convexe, à coefficients continus, d'un nombre fini de fonctions g_α^m où $m = n$ ou $n+1$, donc $\Psi|V \times [2^{-(n+1)}, 2^{-n}]$: $V \times [2^{-(n+1)}, 2^{-n}] \to (\mathscr{C}, \| \ \|_0)$ est continue; la condition (2) s'en déduit. Enfin, (3) résulte de (4).

Pour $0 < \varepsilon \leqslant 1/2$, définissons μ_ε: $[0, 1] \to [0, 1]$ par

(6) $$\mu_\varepsilon(s) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant s \leqslant \varepsilon, \\ 2(s-\varepsilon), & \varepsilon \leqslant s \leqslant 2\varepsilon, \\ s, & 2\varepsilon \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Posons enfin

$$\Phi(f, t) = \begin{cases} f, & t = 0, \\ \Psi(f, t) \circ \mu_t, & 0 < t \leqslant 1/2. \end{cases}$$

Ceci a un sens puisque $\Psi(f, t)$ est une fonction continue pour $t > 0$. La continuité de Φ sur $\mathscr{L}^1 \times]0, 1/2]$ résulte de (2) et de la continuité de μ: $]0, 1/2] \to (\mathscr{C}, \| \ \|_0)$. Fixons un élément f de $\mathscr{L}^1$ et montrons la continuité de Φ au point $(f, 0)$. Pour (g, t) dans $\mathscr{L}^1 \times]0, 1/2]$, nous avons

(7) $$\|f - \Phi(g, t)\| \leqslant \|f - \Psi(f, t)\| + \|\Psi(f, t) - \Phi(f, t)\| + \|\Phi(f, t) - \Phi(g, t)\|.$$

En utilisant (6) et (3), nous avons

(8) $$\begin{aligned} \|\Psi(f, t) - \Phi(f, t)\| &= \|\Psi(f, t) - \Psi(f, t) \circ \mu_t\| \leqslant \int_0^{2t} |\Psi(f, t)(s)| ds + \int_0^{2t} |\Psi(f, t) \circ \mu_t(s)| ds \\ &\leqslant \int_0^{2t} |\Psi(f, t)(s)| ds + \int_0^t |\Psi(f, t)(0)| ds + \int_t^{2t} |\Psi(f, t)(2(s-t))| ds \\ &\leqslant 2 \int_0^{2t} |\Psi(f, t)(s)| ds \leqslant 2\|f - \Psi(f, t)\| + 2 \int_0^{2t} |f(s)| ds. \end{aligned}$$

D'autre part, toujours d'après (6) et (3),

(9) $$\begin{aligned} \|\Phi(f, t) - \Phi(g, t)\| &= \int_0^t |\Psi(f, t)(0) - \Psi(g, t)(0)| ds + \int_t^{2t} |(\Psi(f, t) - \Psi(g, t))(2(s-t))| ds \\ &\quad + \int_{2t}^1 |\Psi(f, t)(s) - \Psi(g, t)(s)| ds \\ &\leqslant \int_0^1 |\Psi(f, t)(s) - \Psi(g, t)(s)| ds = \|\Psi(f, t) - \Psi(g, t)\|. \end{aligned}$$

D'après (1) et (7)–(9), nous avons

$$\|f-\Phi(g, t)\| \leqslant 3t+2\int_0^{2t} |f(s)|ds+\|\Psi(f, t)-\Psi(g, t)\|.$$

Puisque Ψ est continue, cette majoration tend vers zéro quand (g, t) tend vers $(f, 0)$, et la continuité de Φ en $(f, 0)$ en résulte.

Il est clair que Φ vérifie (i)–(iii). Soit $\{(f_n, t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de points de $\mathscr{L}^1\times]0, 1/2]$ telle que $\{\Phi(f_n, t_n)\}$ converge vers g et que $\{t_n\}$ tende vers 0. D'après (6), $\mu_t|[t, 1]$ est un homéomorphisme de $[t, 1]$ sur $[0, 1]$; notant μ_t^{-1} son inverse, nous avons

$$\Psi(f, t) = \Phi(f, t)\circ\mu_t^{-1} \quad \text{pour } t > 0.$$

Nous avons

$$\|g-\Psi(f_n, t_n)\| \leqslant \|g-g\circ\mu_{t_n}^{-1}\|+\|(g-\Phi(f_n, t_n))\circ\mu_{t_n}^{-1}\|. \tag{10}$$

D'après (6), nous avons

$$\begin{aligned}\|g-g\circ\mu_{t_n}^{-1}\| &\leqslant \int_0^{2t_n}|g(s)|ds+\int_0^{2t_n}|g\circ\mu_{t_n}^{-1}(s)|ds \\ &= \int_0^{2t_n}|g(s)|ds+\int_0^{2t_n}|g(\tfrac{1}{2}s+t_n)|ds \leqslant 3\int_0^{2t_n}|g(s)|ds\end{aligned} \tag{11}$$

et

$$\begin{aligned}\|(g-\Phi(f_n, t_n))\circ\mu_{t_n}^{-1}\| &= \int_0^{2t_n}|(g-\Phi(f_n, t_n))(\tfrac{1}{2}s+t_n)|ds+\int_{2t_n}^{1}|g(s)-\Phi(f_n, t_n)(s)|ds \\ &\leqslant 3\int_0^1|g(s)-\Phi(f_n, t_n)(s)|ds = 3\|g-\Phi(f_n, t_n)\|.\end{aligned} \tag{12}$$

D'après (10)–(12),

$$\|g-\Psi(f_n, t_n)\| \leqslant 3\int_0^{2t_n}|g(s)|ds+3\|g-\Phi(f_n, t_n)\|.$$

Puisque $\Phi(f_n, t_n)$ tend vers g et t_n vers 0, $\|g-\Psi(f_n, t_n)\|$ tend vers 0. Mais alors, d'après (1), $\|g-f_n\|$ tend aussi vers 0, donc $\{f_n\}$ tend vers g, d'où (iv).

3.6. LEMME. *Pour tout ouvert U de $\mathscr{R}$, $(U, U\cap\mathscr{C})$ est $(\mathscr{F}_{\sigma\delta}, \mathscr{F}_{\sigma\delta})$-universel.*

Démonstration. Soient (X, Y) un couple d'espaces appartenant à $\mathscr{F}_{\sigma\delta}$, F une fonction continue de X dans U et $\mathscr{U}$ un recouvrement ouvert de U. Prenons une fonction continue ω: $U\to]0, 1]$ telle que, pour tout f dans U, la boule ouverte de centre f et de rayon $2\omega(f)$ soit contenue dans un élément de $\mathscr{U}$.

Soit Φ: $\mathscr{L}^1\times[0, 1/2]\to\mathscr{L}^1$ la fonction du lemme 3.5. Nous pouvons trouver une fonction continue ε: $U\to]0, 1/2]$ telle que, posant $G(f) = \Phi(f, \varepsilon(f))$ pour f dans U, on ait

$$\varepsilon(f) < \omega(f), \tag{1}$$

$$\|f-G(f)\| < \omega(f). \tag{2}$$

Soient (a_n) et (b_n) des suites tendant vers 0 vérifiant $0 < b_{n+1} < a_n < b_n < 1$ pour tout $n\geqslant 1$. En utilisant le lemme 3.4, nous pouvons trouver, pour tout $n\geqslant 1$, un plongement fermé ψ_n de X dans $\mathscr{R}\cap\mathscr{L}^1([a_n, b_n])$ vérifiant

(3) $0\leqslant\psi_n(x)(t)\leqslant 1/n$ quels que soient x, t et n,
(4) $\psi_n(x)(a_n) = \psi_n(x)(b_n) = 0$ quels que soient x et n,
(5) $\psi_n^{-1}(\mathscr{C}([a_n, b_n])) = Y$ et $\psi_n(x)$ est continue pour tout x dans Y.

Définissons φ: $X\to\mathscr{L}^1$ par

$$\varphi(x)(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t\notin\bigcup_n[a_n, b_n], \\ \psi_n(x)(t) & \text{si } t\in[a_n, b_n],\ n\geqslant 1.\end{cases} \tag{6}$$

La fonction φ_n: $X\to\mathscr{L}^1$ définie par $\varphi_n(x)(t) = \varphi(x)(t)$ si $a_n\leqslant t\leqslant 1$ et $\varphi_n(x)(t) = 0$ si $0\leqslant t\leqslant a_n$ est évidemment continue. De plus, d'après (6) et (3), $\|\varphi(x)-\varphi_n(x)\|\leqslant a_n$ pour tout x, ce qui montre que φ est limite uniforme d'une suite de fonctions continues, donc est continue.

D'après (6) et (4), $\varphi(x)$ est continue en tout point $t\neq 0$ qui n'est pas un point de discontinuité d'une des $\psi_n(x)$; puisque $\psi_n(x)$ appartient à $\mathscr{R}$, l'ensemble de ses points de discontinuité est de mesure nulle; il en est donc de même de l'ensemble des points de discontinuité de $\varphi(x)$, donc, $\varphi(x)$ étant bornée, elle appartient à $\mathscr{R}$. Nous avons en outre

(7) Si $x\in Y$, $\varphi(x)$ est continue.
(8) Si $x\in X\setminus Y$, $\varphi(x)|[0, b_n]\notin\mathscr{C}([0, b_n])$ $\forall n\geqslant 1$.

En effet, si $x\in Y$, $\varphi(x)$ est continue en tout point $t\neq 0$ d'après ce qui précède et, d'après (6) et (3), nous avons $|\varphi(x)(t)|\leqslant 1/n$ pour $0\leqslant t\leqslant b_n$, ce qui entraîne la continuité en 0, d'où (7). La relation (8) résulte de (6) et (5).

Pour $0 < \varepsilon\leqslant 1/2$, définissons $\lambda(\varepsilon)$: $[0, 1]\to\mathbf{R}$ par

$$\lambda(\varepsilon)(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0\leqslant t\leqslant\varepsilon/2, \\ 2\varepsilon^{-1}(\varepsilon-t) & \text{si } \varepsilon/2\leqslant t\leqslant\varepsilon, \\ 0 & \text{si } \varepsilon\leqslant t\leqslant 1.\end{cases} \tag{9}$$

Il est clair que λ est une fonction continue de $]0, 1/2]$ dans $(\mathscr{C}, \|\ \|_0)$; par suite, la fonction H: $X\to\mathscr{R}$ définie par

$$H(x) = \lambda(\varepsilon\circ F(x))\cdot\varphi(x)$$

est continue; d'après (3), (6) et (9), $0\leqslant H(x)(t)\leqslant 1$ pour tout t et $H(x)(t) = 0$ pour $t\geqslant\varepsilon(F(x))$, d'où

$$\|H(x)\|\leqslant\varepsilon(F(x)). \tag{10}$$

Définissons enfin $K\colon X \to \mathscr{R}$ par $K(x) = G(F(x)) + H(x)$. D'après (1), (2) et (10), nous avons

$$\|F(x) - K(x)\| < 2\varepsilon(F(x)) < \omega(F(x)),$$

donc, d'après le choix de ω, K est $\mathscr{U}$-proche de F; en particulier, K est à valeurs dans U.

D'après la propriété (iii) de Φ et (9), nous avons

$$K(x)(t) = \varphi(x)(t) \quad \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon(F(x))/2. \tag{11}$$

Puisque $\varepsilon(f) > 0$ pour tout f, $G(F(x))$ appartient à $\mathscr{C}$ d'après la propriété (ii) de Φ; d'après (7), $K(x)$ appartient à $\mathscr{C}$ si $x \in Y$. D'après (11) et (8), $K(x) \notin \mathscr{C}$ si $x \in X \setminus Y$, donc $K^{-1}(\mathscr{C}) = Y$.

Reste à montrer que K est un Z-plongement. Soient x et x' tels que $K(x) = K(x')$, et soit n tel que $b_n < \min(\varepsilon(F(x))/2, \varepsilon(F(x'))/2)$. Alors, d'après (11) et (6), $\psi_n(x)|[a_n, b_n] = \psi_n(x')|[a_n, b]$ dans $\mathscr{R} \cap \mathscr{L}^1([a_n, b_n])$, donc $x = x'$ puisque ψ_n est un plongement de X dans $\mathscr{R} \cap \mathscr{L}^1([a_n, b_n])$. Ceci montre que K est injective.

Puisque K est injective, pour prouver que c'est un plongement fermé dans U, il suffit de montrer que si $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ est une suite de points de X telle que la suite $\{K(x_i)\}$ converge vers un élément g de U, alors $\{x_i\}$ a une sous-suite qui converge vers un point x_0 de X. Posant $\varepsilon_i = \varepsilon(F(x_i))$, nous pouvons supposer que $\{\varepsilon_i\}$ tend vers $\varepsilon_0 \in [0, 1/2]$. Alors $\varepsilon_0 > 0$. En effet, dans le cas contraire, il résulte de (10) que $G(F(x_i)) = K(x_i) - H(x_i)$ converge aussi vers g. Puisque $G(F(x_i)) = \Phi(F(x_i), \varepsilon_i)$, il résulte de la propriété (iv) de Φ que $\{F(x_i)\}$ tend vers g et, d'après la continuité de ε, ε_i tend vers $\varepsilon(g) > 0$, ce qui est contradictoire.

Puisque $\varepsilon_0 > 0$, nous pouvons trouver un n tel que $b_n < \varepsilon_0/2$; nous pouvons supposer que $b_n < \varepsilon_i/2$ pour tout i. Alors, d'après (11) et (6), $\{\psi_n(x_i)\}$ converge vers $g|[a_n, b_n]$ dans $\mathscr{R} \cap \mathscr{L}^1([a_n, b_n])$. Puisque ψ_n est un plongement fermé de X dans $\mathscr{R} \cap \mathscr{L}^1([a_n, b_n]$, la suite $\{x_i\}$ converge dans X.

Pour voir que $K(X)$ est un Z-ensemble dans U, il suffit de remarquer que, pour tout f dans $K(X)$, il y a un $\delta > 0$ tel que $0 \leqslant f(t) \leqslant 1$ pour tout t dans $[0, \delta]$, et que l'identité de U peut être approximée arbitrairement par des fonctions K' telles que, pour tout f dans $K'(U)$, il existe un $\delta' > 0$ tel que $f'(t) = -1$ pour t dans $[0, \delta']$ (prendre $K'(f) = \Phi(f, \varepsilon'(f)) - \lambda(\varepsilon'(f))$ où $\varepsilon'\colon U \to]0, 1/2]$ est suffisamment petite).

3.7. **Corollaire.** (a) *$(\mathscr{R}, \mathscr{C})$ est fortement $(\mathscr{F}_{\sigma\delta}, \mathscr{F}_{\sigma\delta})$-universel.*

(b) *$\mathscr{R}$ et $\mathscr{C}$ sont fortement $\mathscr{F}_{\sigma\delta}$-universels.*

(c) *$\mathscr{R} \setminus \mathscr{C}$ est fortement $\mathscr{F}_2^2$-universel.*

Démonstration. (a) résulte immédiatement des lemmes 3.6 et 2.4. Particularisant la définition de la $(\mathscr{F}_{\sigma\delta}, \mathscr{F}_{\sigma\delta})$-universalité forte aux couples de la forme $(C_1, \emptyset)$, nous constatons alors que $\mathscr{R}$ est fortement $\mathscr{F}_{\sigma\delta}$-universel.

Soient U un ouvert de $\mathscr{C}$, C un espace appartenant à $\mathscr{F}_{\sigma\delta}$, f une fonction continue de C dans U et $\mathscr{U} = \{U_\alpha\colon \alpha \in A\}$ un recouvrement ouvert de U. Pour tout α dans A, soit U'_α un ouvert de $\mathscr{R}$ tel que $U_\alpha = U'_\alpha \cap \mathscr{C}$; soient $U' = \bigcup_{\alpha \in A} U'_\alpha$ et $\mathscr{U}' = \{U'_\alpha\colon \alpha \in A\}$.

Le lemme 3.6, appliqué au couple (C, C), entraîne l'existence d'un Z-plongement g de C dans U' qui est $\mathscr{U}'$-proche de f et vérifie $g(C) \subset U' \cap \mathscr{C} = U$; alors g est $\mathscr{U}$-proche de f et, d'après les remarques faites à la section 2, $g(C) = g(C) \cap \mathscr{C}$ est un Z-ensemble dans $U' \cap \mathscr{C} = U$. Ceci montre que tout ouvert de $\mathscr{C}$ est $\mathscr{F}_{\sigma\delta}$-universel, donc $\mathscr{C}$ est fortement $\mathscr{F}_{\sigma\delta}$-universel d'après la proposition 2.2 de [2].

Soient U un ouvert de $\mathscr{R} \setminus \mathscr{C}$, C un espace appartenant à $\mathscr{F}_2^2$, f une fonction continue de C dans U et $\mathscr{U} = \{U_\alpha\colon \alpha \in A\}$ un recouvrement ouvert de U. Pour tout α dans A, soit U'_α un ouvert de $\mathscr{L}^1$ tel que $U'_\alpha \cap (\mathscr{R} \setminus \mathscr{C}) = U_\alpha$; soient $U' = \bigcup_{\alpha \in A} U'_\alpha$ et $\mathscr{U}' = \{U'_\alpha\colon \alpha \in A\}$. Alors U' est un ouvert de $\mathscr{L}^1$ tel que $U' \cap (\mathscr{R} \setminus \mathscr{C}) = U$. Nous pouvons trouver un espace topologiquement complet $\hat{C}$ contenant C et une fonction continue $\hat{f}\colon \hat{C} \to U'$ prolongeant f (voir [4], § 31.I). Puisque C appartient à $\mathscr{F}_2^2$, $C = F \setminus G$ où F et G sont du type $\mathscr{F}_{\sigma\delta}$ dans $\hat{C}$. Soient $C_1 = F \cap \hat{f}^{-1}(\mathscr{R})$ et $C_2 = C_1 \cap G$; comme $\hat{f}$ prolonge f et que $f(C) \subset \mathscr{R}$, il est facile de vérifier que $C = C_1 \setminus C_2$. Puisque $\mathscr{R}$ est un $F_{\sigma\delta}$ dans $\mathscr{L}^1$ (voir [5]), C_1 et C_2 sont des $F_{\sigma\delta}$ dans $\hat{C}$, donc appartiennent à $\mathscr{F}_{\sigma\delta}$. Puisque $\hat{f}(C_1) \subset \mathscr{R} \cap U'$, le lemme 3.6 garantit l'existence d'un Z-plongement g de C_1 dans $\mathscr{R} \cap U'$ qui est $\mathscr{U}'$-proche de $\hat{f}|C_1$ et vérifie $g^{-1}(\mathscr{C} \cap U') = C_2$. Alors $g^{-1}(\mathscr{R} \setminus \mathscr{C}) = C_1 \setminus C_2 = C$, donc $g|C$ est un plongement $\mathscr{U}$-proche de f de C dans $(\mathscr{R} \setminus \mathscr{C}) \cap U' = U$ dont l'image $g(C) = g(C_1) \cap (\mathscr{R} \setminus \mathscr{C})$ est un Z-ensemble dans $U' \cap (\mathscr{R} \setminus \mathscr{C}) = U$ d'après les remarques faites à la section 2. Ceci montre que tout ouvert de $\mathscr{R} \setminus \mathscr{C}$ est $\mathscr{F}_2^2$-universel, donc $\mathscr{R} \setminus \mathscr{C}$ est fortement $\mathscr{F}_2^2$-universel d'après la proposition 2.2 de [2].

Le lemme suivant achève de vérifier les conditions définissant un couple ou un espace absorbant, donc la démonstration de nos trois théorèmes.

3.8. **Lemme.** *$\mathscr{R}$, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{R} \setminus \mathscr{C}$ sont réunions dénombrables de Z-ensembles.*

Démonstration. Pour tout entier $n \geqslant 1$, soit Z_n l'ensemble des éléments f de $\mathscr{L}^1$ tels que $|f(t)| \leqslant n$ pour presque tout t dans $[0, 1]$. Alors Z_n est fermé dans $\mathscr{L}^1$ et $\mathscr{R} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$. D'après les remarques faites à la section 2, il suffit donc de montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, Z_n est un Z-ensemble dans $\mathscr{L}^1$ et, pour cela, de remarquer que la fonction $\Theta\colon \mathscr{L}^1 \times [0, 1] \to \mathscr{L}^1$ définie par

$$\Theta(f, s)(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } s \leqslant t \leqslant 1, \\ 2n & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant s, \end{cases}$$

est une déformation instantanée de $\mathscr{L}^1$ en $\mathscr{L}^1 \setminus Z_n$.

Bibliographie

[1] C. Bessaga and A. Pełczyński, *Selected Topics in Infinite-dimensional Topology*, PWN, Warszawa 1975.

[2] M. Bestvina and J. Mogilski, *Characterizing certain incomplete infinite dimensional absolute retracts*, Michigan Math. J. 33 (1986), 291–313.

[3] R. Cauty, *Caractérisation topologique de l'espace des fonctions dérivables*, Fund. Math., à paraître.

[4] C. Kuratowski, *Topologie I*, 4e éd., PWN, Warszawa 1958.
[5] J. C. Oxtoby, *The category and Borel class of certain subsets of $\mathscr{L}_p$*, Bull. Amer. Math. Soc. 43 (1937), 245–248.
[6] —, *Measure and Category*, 2e éd., Springer, New York 1980.
[7] H. Toruńczyk, *Concerning locally homotopy negligible sets and characterization of l_2-manifolds*, Fund. Math. 101 (1978), 93–110.

UNIVERSITÉ PARIS VI
U.F.R. DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES
4, Pl. Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France

Received 10 April 1990

A converse to a theorem of K. Kuratowski on parametrizations of compacta on the Cantor set

by

Roman Pol* (Warszawa)

Abstract. A classical result of K. Kuratowski asserts that if a perfect compactum X is a countable union of finite-dimensional compacta then almost every continuous map of the Cantor set onto X (in the sense of the Baire category in the function space) is finite-to-one. We prove the converse to this theorem and some of its refinements.

1. Introduction. Our terminology is explained in Sec. 2. Given a compactum X, we shall consider the space of all parametrizations of X on the Cantor set $\mathbf{2}^\infty$, i.e., continuous mappings of $\mathbf{2}^\infty$ onto X, equipped with the topology of uniform convergence, and the phrase "almost every parametrization" will refer to the Baire category in the function space.

This note is related to the following results in dimension theory (cf. [Ku2; §45, II], [Na; VI.4], see also Sec. 5.1):

1.1. THEOREM (Kuratowski [Ku1]). *If a compactum X without isolated points is a countable union of finite-dimensional compacta then almost every parametrization of X on the Cantor set is finite-to-one.*

1.2. THEOREM (Hurewicz [Hu]). *A compactum X without isolated points is a countable union of finite-dimensional subsets if, and only if, X has a finite-to-one parametrization on the Cantor set.*

In fact, one easily checks that the existence of a finite-to-one parametrization of a compactum X on $\mathbf{2}^\infty$ implies that finite-to-one mappings are dense in the space of all parametrizations of X on $\mathbf{2}^\infty$. The main result of this note is the following theorem:

1.3. THEOREM. *Let X be a compactum which can not be covered by countably many finite-dimensional compacta. Then almost every parametrization of X on the Cantor set has a perfect fibre.*

It follows that a perfect compactum X is a countable union of finite-dimensional compacta if, and only if, a typical, in the sense of Baire category, parametrization of

* Supported by Polish Scientific Grant R.P.I.10.