[Lu] J. Luukkainen, *Extension of spaces, maps and metrics in Lipschitz topology*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math. Dissertationes 17 (1978).

[LV] J. Luukkainen and J. Väisälä, *Elements of Lipschitz topology*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math. 3 (1977), 85–122.

[Sa$_1$] K. Sakai, *A Q-manifold local-compactification of a metric combinatorial ∞-manifold*, Proc. Amer. Math. Soc. 100 (1987), 775–780.

[Sa$_2$] — *The space of cross-sections of a bundle*, ibid. 103 (1988), 956–960.

[Sa$_3$] — *A function space triple of a compact polyhedron into an open set in Euclidean space*, ibid. 108 (1990), 547–555.

[SW$_1$] K. Sakai and R. Y. Wong, *The space of Lipschitz maps from a compactum to a locally convex set*, Topology Appl. 32 (1989), 223–235.

[SW$_2$] — — *On infinite-dimensional manifold triples*, Trans. Amer. Math. Soc. 318 (1990), 545–555.

[SS] L. Siebenmann and D. Sullivan, *On complexes that are Lipschitz manifolds*, in: J. C. Cantrell, ed., *Geometric Topology*, Academic Press, New York 1979, 503–525.

[Su] D. Sullivan, *Hyperbolic geometry and homeomorphisms*, ibid., 543–555.

[To] H. Toruńczyk, *Concerning locally homotopy negligible sets and characterization of l_2-manifolds*, Fund. Math. 101 (1978), 93–110.

INSTITUTE OF MATHEMATICS
UNIVERSITY OF TSUKUBA
Tsukuba-city, 305 Japan

Received 7 November 1989;
in revised form 19 March 1990

Caractérisation topologique de l'espace des fonctions dérivables

par

Robert Cauty (Paris)

Abstract. Let $\mathscr{C}$ be the space of continuous functions from $[0, 1]$ into the reals, with the topology of uniform convergence. We give a topological characterization of the subspace $\mathscr{D}$ of $\mathscr{C}$ consisting of everywhere differentiable functions. We show that $\mathscr{D}$ is homeomorphic to the subspace of the countable product $\mathscr{C}^\infty$ consisting of convergent sequences, as well as to the subspace of the hyperspace 2^I consisting of countable sets.

1. Introduction et notations. Tous les espaces considérés dans cet article sont supposés métrisables et séparables. Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des fonctions continues de $I = [0, 1]$ dans $\boldsymbol{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme, et soit $\mathscr{D}$ (resp. $\mathscr{D}^*$) le sous-espace de $\mathscr{C}$ formé des fonctions ayant une dérivée finie en tout point de I (resp. en au moins un point de I). Nous nous proposons ici de caractériser topologiquement les espaces $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}^*$ et de donner quelques applications de ces caractérisations.

Pour formuler les caractérisations de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}^*$ (théorèmes 1.1 et 1.2), il nous faut rappeler quelques définitions. Si f et g sont deux fonctions de Y dans X et si $\mathscr{U}$ est un recouvrement ouvert de X, nous dirons que f est *$\mathscr{U}$-proche* de g si, pour tout y dans Y, il y a un élément de $\mathscr{U}$ contenant à la fois $f(y)$ et $g(y)$. Un sous-ensemble F d'un rétracte absolu de voisinage X est appelé un *Z-ensemble* dans X s'il est fermé et si, pour tout recouvrement ouvert $\mathscr{U}$ de X, il existe une fonction continue f de X dans X, $\mathscr{U}$-proche de l'identité et telle que $f(X) \subset X \backslash F$; si, de plus, il est toujours possible de choisir la fonction f de façon que $\overline{f(X)} \cap F = \emptyset$, alors F est appelé un *Z-ensemble au sens fort* dans X. Une fonction $f\colon Y \to X$ est appelée un *Z-plongement* si c'est un plongement et si $f(Y)$ est un Z-ensemble dans X.

Soit $\mathscr{K}$ une classe d'espaces. Un rétracte absolu de voisinage X est dit *$\mathscr{K}$-universel* si, pour tout espace K appartenant à $\mathscr{K}$, toute fonction continue $f\colon K \to X$ et tout recouvrement ouvert $\mathscr{U}$ de X, il y a un Z-plongement $g\colon K \to X$ qui est $\mathscr{U}$-proche de f; X est dit *fortement $\mathscr{K}$-universel* si, pour tout espace K appartenant à $\mathscr{K}$, tout fermé L de K, toute fonction continue $f\colon K \to X$ dont la restriction à L est un Z-plongement, et tout recouvrement ouvert $\mathscr{U}$ de X, il existe un Z-plongement $g\colon K \to X$ qui est $\mathscr{U}$-proche de f et vérifie $g|L = f|L$.

Nous noterons $\mathscr{L}_1$ (resp. $\mathscr{L}_2$) la classe des espaces analytiques (resp. coanalytiques).

1.1. THÉORÈME. *Un espace métrique séparable X est homéomorphe à $\mathscr{D}$ si, et seulement si, il vérifie les conditions suivantes*:

(C.0) *X est un rétracte absolu appartenant à $\mathscr{L}_2$,*

(C.1) *X est fortement $\mathscr{L}_2$-universel,*

(C.2) *X est réunion dénombrable de Z-ensembles au sens fort.*

1.2. THÉORÈME. *Un espace métrique séparable X est homéomorphe à $\mathscr{D}^*$ si, et seulement si, il vérifie les conditions suivantes*:

(C.0) *X est un rétracte absolu appartenant à $\mathscr{L}_1$,*

(C.1) *X est fortement $\mathscr{L}_1$-universel,*

(C.2) *X est réunion dénombrable de Z-ensembles au sens fort.*

La démonstration de ces deux théorèmes repose sur des résultats de M. Bestvina et J. Mogilski [2] que nous rappellerons plus loin. Nous donnerons deux applications du théorème 1.1.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, soit $\mathscr{C}_n$ une copie de $\mathscr{C}$; posons $\mathscr{C}^\infty = \prod_{n=1}^{\infty} \mathscr{C}_n$. Soit $\mathscr{P}$ le sous-ensemble de $\mathscr{C}^\infty$ formé des suites qui convergent simplement sur I (vers une limite finie).

1.3. THÉORÈME. *$\mathscr{P}$ est homéomorphe à $\mathscr{D}$.*

Soit 2^I l'ensemble des fermés non vides de I, avec la topologie définie par la distance de Hausdorff; soit $\mathscr{H}$ le sous-ensemble de 2^I formé des fermés dénombrables.

1.4. THÉORÈME. *$\mathscr{H}$ est homéomorphe à $\mathscr{D}$.*

La distance sur un espace métrique X sera toujours notée d. Si x est un point de X et A un sous-ensemble de X, nous poserons $d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$, et nous noterons $\delta(A)$ le diamètre de A. L'intérieur de A sera noté $\operatorname{Int} A$. Pour f dans $\mathscr{C}$, nous noterons $\|f\|$ la norme de f. Nous noterons id_X, ou simplement id, l'identité de X. Si $\varphi\colon X \times I \to Y$ est une homotopie, nous noterons φ_t la fonction définie par $\varphi_t(x) = \varphi(x, t)$. Si $\mathscr{U}$ est un recouvrement de X et A un sous-ensemble de X, nous noterons $\mathrm{St}(A, \mathscr{U})$ la réunion des éléments de $\mathscr{U}$ qui rencontrent A, et nous poserons $\mathrm{St}(\mathscr{U}) = \{\mathrm{St}(U, \mathscr{U}) |\ U \in \mathscr{U}\}$.

Nous regarderons le cube de Hilbert Q comme le produit $Q = \prod_{n=1}^{\infty} I_n$, où $I_n = [0, 1]$ pour tout n; nous noterons $q = (q_n)$ le point générique de Q.

Tous les résultats que nous utiliserons concernant les espaces (co)analytiques se trouvent dans le livre de Kuratowski [5].

Nous noterons N l'ensemble des entiers > 0, N^* l'ensemble des suites finies d'entiers > 0 et J l'ensemble des suites infinies d'entiers > 0. Pour σ dans N^*, nous noterons $|\sigma|$ la longueur de la suite σ. Si $\sigma = \langle s_1, \ldots, s_k \rangle$ est une suite de longueur k dans N^* et p un entier > 0, nous noterons $\langle \sigma, p \rangle$ la suite $\langle s_1, \ldots, s_k, p \rangle$, de longueur $k+1$. Si σ appartient à J et n est un entier > 0 ou si σ appartient à N^* et n est un entier $\leqslant |\sigma|$, nous noterons $\sigma|n$ la suite des n premiers termes de σ. Soit τ un élément de N^*; si σ appartient à J ou si σ appartient à N^* et vérifie $|\sigma| > |\tau|$, nous écrirons $\tau < \sigma$ s'il existe un entier n tel que $\tau = \sigma|n$.

Pour tout espace X, nous noterons $\mathscr{F}(X)$ l'ensemble des fermés de X et $\mathscr{A}(X)$ l'ensemble des sous-ensembles F de X qui peuvent s'obtenir comme résultat de l'opération de Souslin sur une famille d'ensembles fermés, i.e. pour lesquels il existe une fonction $A\colon N^* \to \mathscr{F}(X)$ telle que $F = \bigcup_{\sigma \in J} \bigcap_{n=1}^{\infty} A(\sigma|n)$. Il est connu que, si X est complet, $\mathscr{A}(X)$ est l'ensemble des sous-espaces analytiques de X (voir [5], § 35 II).

1.5. LEMME. *Pour tout F dans $\mathscr{A}(X)$, il y a une fonction $A\colon N^* \to \mathscr{F}(X)$ vérifiant*

(i) *$A(\tau) \subset \operatorname{Int} A(\tau')$ si $\tau' < \tau$,*

(ii) *$F = \bigcup_{\sigma \in J} \bigcap_{n=1}^{\infty} A(\sigma|n)$.*

Démonstration. Par hypothèse, il y a une fonction $S\colon N^* \to \mathscr{F}(X)$ telle que $F = \bigcup_{\sigma \in J} \bigcap_{n=1}^{\infty} S(\sigma|n)$. Nous pouvons supposer que $S(\tau') \supset S(\tau)$ si $\tau' < \tau$. Posons, pour τ dans N^*,

$$A(\tau) = \{x \in X |\ d(x, S(\tau)) \leqslant 2^{-|\tau|}\},$$

en convenant que $A(\tau) = \emptyset$ si $S(\tau) = \emptyset$. Si $\tau' < \tau$, l'inclusion $S(\tau) \subset S(\tau')$ implique l'inclusion (i).

Soit $F' = \bigcup_{\sigma \in J} \bigcap_{n=1}^{\infty} A(\sigma|n)$. Puisque $A(\sigma|n)$ contient $S(\sigma|n)$ quels que soient σ et n, F' contient F. Inversement, soit x un point de F'; soit $\sigma \in J$ tel que $x \in \bigcap_n A(\sigma|n)$. Fixons un n. Pour tout $m \geqslant n$, x appartient à $A(\sigma|m)$, d'où, puisque $S(\sigma|n) \supset S(\sigma|m)$,

$$d(x, S(\sigma|n)) \leqslant d(x, S(\sigma|m)) \leqslant 2^{-m}.$$

Puisque m est quelconque, $d(x, S(\sigma|n)) = 0$, donc x appartient à $S(\sigma|n)$ pour tout n; par suite, x appartient à F.

2. Rappels. Un sous-ensemble A d'un espace X est dit *localement homotopiquement négligeable* dans X si, pour tout ouvert U de X, l'inclusion de $U \setminus A$ dans U est une équivalence homotopique faible.

Soit $\mathscr{K}$ une classe d'espaces vérifiant (i) si K et K' sont homéomorphes et si K appartient à $\mathscr{K}$, alors K' appartient à $\mathscr{K}$, (ii) tout espace qui est réunion de deux fermés appartenant à $\mathscr{K}$ appartient à $\mathscr{K}$, et (iii) tout fermé d'un espace appartenant à $\mathscr{K}$ appartient à $\mathscr{K}$. Un sous-ensemble Ω de l^2 est dit *$\mathscr{K}$-absorbant* dans l^2 s'il vérifie les trois conditions suivantes:

(1) $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ où chaque Ω_n est un Z-ensemble dans Ω et appartient à $\mathscr{K}$,

(2) Ω est fortement $\mathscr{K}$-universel,

(3) $l^2 \setminus \Omega$ est localement homotopiquement négligeable dans l^2.

Les deux résultats suivants sont dus à M. Bestvina et J. Mogilski [2].

2.1. THÉORÈME ([2], théorème 3.1). *Deux sous-ensembles $\mathscr{K}$-absorbants de l^2 sont homéomorphes.*

2.2. THÉORÈME ([2], théorème 5.3). *Si l^2 contient un sous-ensemble $\mathscr{K}$-absorbant Ω, alors un espace X est homéomorphe à Ω si, et seulement si, il vérifie les conditions suivantes*:

(C.0) *X est un rétracte absolu qui est réunion dénombrable de fermés appartenant à $\mathscr{K}$,*

(C.1) *X est fortement $\mathscr{K}$-universel,*

(C.2) *X est réunion dénombrable de Z-ensembles au sens fort.*

Nous prouverons les théorèmes 1.1 et 1.2 en montrant que $\mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{D}^*$) est $\mathcal{L}_2$-absorbant (resp. $\mathcal{L}_1$-absorbant) dans $\mathcal{C}$ (qui est homéomorphe à l^2). Notons que, puisqu'une réunion dénombrable d'ensembles (co)analytiques est (co)analytique, la condition (C.0) des théorèmes 1.1 et 1.2 équivaut à la condition (C.0) du théorème 2.2 pour $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$.

Il est commode de reformuler la négligeabilité homotopique locale en termes de déformations. Si A est un sous-espace de X, une *déformation instantanée* de X en A est une homotopie h de $X \times I$ dans X vérifiant (i) $h_0 = \mathrm{id}$ et (ii) $h_t(X) \subset A$ pour tout $t > 0$.

2.3. LEMME. *Soient X un rétracte absolu de voisinage et A un sous-espace de X. Alors il existe une déformation instantanée de X en A si, et seulement si, $X \backslash A$ est localement homotopiquement négligeable dans X.*

Ce résultat est connu; l'implication non évidente est un cas particulier du théorème 2.4 de [11].

2.4. LEMME. *Si F est un sous-espace vectoriel partout dense d'un espace vectoriel localement convexe E, alors il existe une déformation instantanée de E en F.*

Ce lemme est connu (voir, par exemple, le théorème 2.3 de [11], qui entraîne la négligeabilité homotopique locale de $E \backslash F$).

2.5. LEMME. *Soient X un rétracte absolu et A un sous-espace de X. S'il existe une déformation instantanée de X en A, alors A est un rétracte absolu.*

En effet, il résulte immédiatement du théorème 6.3, p. 139–140, de [4] que A est un rétracte absolu de voisinage; puisqu'il a évidemment le type d'homotopie de X, c'est un rétracte absolu.

Le lemme suivant est connu; nous en donnerons cependant la démonstration, n'ayant pu la trouver dans la littérature.

2.6. LEMME. *Soient X un rétracte absolu de voisinage et Y un sous-ensemble de X pour lequel il existe une déformation instantanée de X en Y. Alors*

(a) *si C est un Z-ensemble dans Y, $\bar{C}$ est un Z-ensemble dans X,*

(b) *si D est un Z-ensemble au sens fort dans X, $D \cap Y$ est un Z-ensemble au sens fort dans Y.*

Démonstration. Soit $h\colon X \times I \to X$ une déformation instantanée de X en Y.

(a) Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de X. Prenons un recouvrement ouvert $\mathcal{V}$ de X tel que $\mathrm{St}(\mathcal{V})$ soit plus fin que $\mathcal{U}$. Il est facile de construire une fonction continue α: $X \to]0, 1]$ telle que, définissant $f\colon X \to Y$ par $f(x) = h(x, \alpha(x))$, la fonction f soit $\mathcal{V}$-proche de id_X. Soit $g\colon Y \to Y \backslash C$ une fonction continue $\mathcal{V}$-proche de id_Y. Alors, la fonction $k = g \circ f$ est $\mathrm{St}(\mathcal{V})$-proche, donc $\mathcal{U}$-proche, de id_X et prend ses valeurs dans $Y \backslash C$; puisque C est fermé dans Y, $C = \bar{C} \cap Y$, donc $Y \backslash C \subset X \backslash \bar{C}$, d'où (a).

(b) Soit $\mathcal{U} = \{U_\alpha |\ \alpha \in A\}$ un recouvrement ouvert de Y. Pour tout α dans A, soit U'_α un ouvert de X tel que $U'_\alpha \cap Y = U_\alpha$. Soit $U' = \bigcup_\alpha U'_\alpha$; c'est un ouvert de X contenant Y. Soit $\mathcal{U}' = \{U'_\alpha |\ \alpha \in A\}$, et soit $\mathcal{V}$ un recouvrement ouvert de U' tel que $\mathrm{St}(\mathcal{V})$ soit plus fin que $\mathcal{U}'$. Puisque D est un Z-ensemble au sens fort dans X, $D \cap U'$ est un Z-ensemble au sens fort dans U' ([2], lemme 1.3). Soit $f\colon U' \to U'$ une fonction continue $\mathcal{V}$-proche de $\mathrm{id}_{U'}$ telle que la fermeture F de $f(U')$ dans U' soit disjointe de $D \cap U'$. Soit $\mathcal{W}$ un recouvrement ouvert de U' plus fin que $\mathcal{V}$ tel qu'aucun élément de $\mathrm{St}(\mathcal{W})$ ne rencontre à la fois F et $D \cap U'$. Construisons une fonction continue $\beta\colon U' \to]0, 1]$ telle que, posant $g(x) = h(x, \beta(x))$, $g(U')$ soit contenu dans $U' \cap Y = Y$ et que g soit $\mathcal{W}$-proche de $\mathrm{id}_{U'}$. D'après le choix de $\mathcal{W}$, $g(F)$ est disjoint de $\mathrm{St}(D \cap U', \mathcal{W})$, donc la fermeture G de $g(F)$ dans U' est disjointe de $D \cap U'$. Alors, $g \circ f$ est $\mathrm{St}(\mathcal{V})$-proche, donc $\mathcal{U}'$-proche, de $\mathrm{id}_{U'}$ et envoie U' dans Y. Par définition de $\mathcal{U}'$, la fonction $k = g \circ (f|Y)\colon Y \to Y$ est donc $\mathcal{U}$-proche de id_Y. De plus, $k(Y) \subset g(F)$, donc la fermeture de $k(Y)$ dans Y est contenue dans G, donc disjointe de $D \cap Y = (D \cap U') \cap Y$, d'où (b).

Il résulte du lemme précédent que si X est un rétracte absolu de voisinage dans lequel tout Z-ensemble est un Z-ensemble au sens fort (par exemple une l^2-variété ou une Q-variété) et s'il existe une déformation instantanée de X en Y, alors tout Z-ensemble dans Y est un Z-ensemble au sens fort.

2.7. LEMME. *Soit $\mathcal{K}$ une classe d'espaces telle que tout ouvert d'un espace appartenant à $\mathcal{K}$ appartienne à $\mathcal{K}$ (et vérifiant aussi les conditions* (i) *à* (iii) *imposées plus haut), et soit X un rétracte absolu de voisinage. Si tout ouvert de X est $\mathcal{K}$-universel et si tout Z-ensemble dans X est un Z-ensemble au sens fort, alors X est fortement $\mathcal{K}$-universel.*

Ceci est la proposition 2.2 de [2].

3. Démonstration des théorèmes 1.1 et 1.2. Comme nous l'avons indiqué plus haut, il suffit, pour démontrer les théorèmes 1.1 et 1.2, de vérifier que $\mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{D}^*$) est $\mathcal{L}_2$-absorbant (resp. $\mathcal{L}_1$-absorbant) dans $\mathcal{C}$. Il est connu que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}^*$ sont respectivement coanalytique et analytique (voir [9] et [8]). Le lemme 3.1 ci-dessous entraîne que $\mathcal{C} \backslash \mathcal{D}$ et $\mathcal{C} \backslash \mathcal{D}^*$ sont localement homotopiquement négligeables dans $\mathcal{C}$. L'universalité forte sera prouvée au lemme 3.5, et le lemme 3.6 achèvera la démonstration en montrant que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}^*$ sont des réunions dénombrables de Z-ensembles.

3.1. LEMME. *Il existe des déformations instantanées de $\mathcal{C}$ en chacun des sous-espaces $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}^*$, $\mathcal{C} \backslash \mathcal{D}$ et $\mathcal{C} \backslash \mathcal{D}^*$.*

Démonstration. Le lemme 2.4 entraîne l'existence d'une déformation instantanée de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}^*$. Si $\varphi\colon \mathcal{C} \times I \to \mathcal{C}$ est une déformation instantanée de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$ et f_0 un élément de $\mathcal{C} \backslash \mathcal{D}^*$, la fonction $\psi\colon \mathcal{C} \times I \to \mathcal{C}$ définie par $\psi(f, t) = \varphi(f, t) + t f_0$ est une déformation instantanée de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C} \backslash \mathcal{D}^* \subset \mathcal{C} \backslash \mathcal{D}$.

3.2. LEMME. *Etant donnés un espace métrique X et un sous-ensemble F de X appartenant à $\mathcal{A}(X)$, il existe une fonction continue ξ de X dans $\mathcal{C}$ vérifiant*

(i) $\xi^{-1}(\mathcal{D}) = X \backslash F$,

(ii) $\xi(x)(t) \geqslant 0$ *quels que soient x dans X et t dans I,*

(iii) $\xi(x)(0) = \xi(x)(1) = 0$ *quel que soit x,*

(iv) *pour tout x dans X, $\xi(x)$ est dérivable en 0 et 1 et* $\xi(x)'(0) = \xi(x)'(1) = 0$.

Démonstration. La démonstration qui suit est une adaptation d'un argument de Mazurkiewicz [9]. D'après le lemme 1.5, il y a une fonction $A\colon N^* \to \mathcal{F}(X)$ vérifiant

$$A(\tau) \subset \operatorname{Int} A(\tau') \quad \text{si } \tau' < \tau, \tag{1}$$

$$F = \bigcup_{\sigma \in J} \bigcap_{n=1}^{\infty} A(\sigma|n). \tag{2}$$

D'après (1), nous pouvons trouver, pour tout σ dans N^*, une fonction continue λ_σ de X dans $[0, 1]$ vérifiant

$$\lambda_\sigma(x) = 1 \quad \text{si } x \in A(\sigma), \tag{3}$$

$$\lambda_\sigma(x) = 0 \quad \text{si } x \notin \operatorname{Int} A(\sigma|n-1) \text{ pour } |\sigma| = n \geqslant 2. \tag{4}$$

Pour $\sigma = \langle s_1, \ldots, s_n \rangle$ dans N^*, posons $q(\sigma) = 2^{s_1 - 1} + 2^{s_1 + s_2 - 1} + \ldots + 2^{s_1 + \ldots + s_n - 1}$. Ceci définit une bijection de N^* sur N.

Prenons dans $]0, 1[$ des intervalles fermés I_σ, K_σ, K_σ^1 et K_σ^2 de façon que les conditions suivantes soient vérifiées:

(5) si $\sigma = \langle s_1, \ldots, s_n \rangle$, $\sigma' = \langle s_1', \ldots, s_n' \rangle$ avec $s_n \neq s_n'$, alors $I_\sigma \cap I_{\sigma'} = \emptyset$,

(6) K_σ et I_σ sont concentriques et $\delta(K_\sigma) = 2^{-q(\sigma)} \delta(I_\sigma)$,

(7) K_σ^1 est la moitié gauche de K_σ, K_σ^2 sa moitié droite,

(8) si $|\sigma| = n+1$, $n \geqslant 1$, $I_\sigma \subset \operatorname{Int} K_{\sigma|n}^1$.

Les conditions (5) à (8) entraînent que

$$K_\sigma^2 \cap K_{\sigma'}^2 = \emptyset \quad \text{si } \sigma \neq \sigma'. \tag{9}$$

Posant $K_\sigma^2 = [a(\sigma), b(\sigma)]$, définissons la fonction φ_σ de I dans $\boldsymbol{R}$ par

$$\varphi_\sigma(t) = \begin{cases} \dfrac{16(t - a(\sigma))^2 (b(\sigma) - t)^2}{(b(\sigma) - a(\sigma))^3} & \text{si } t \in K_\sigma^2, \\ 0 & \text{si } t \notin K_\sigma^2. \end{cases}$$

Alors, φ_σ est continûment dérivable sur I et vérifie

(10) pour t dans I, $0 \leqslant \varphi_\sigma(t) \leqslant \varphi_\sigma\big(\tfrac{1}{2}(a(\sigma) + b(\sigma))\big) = b(\sigma) - a(\sigma) = \delta(K_\sigma^2)$.

Définissons $\xi\colon X \to \mathscr{C}$ par

$$\xi(x)(t) = \sum_\sigma \lambda_\sigma(x) \varphi_\sigma(t).$$

Pour σ fixé, la fonction $\xi_\sigma(x)(t) = \lambda_\sigma(x)\varphi_\sigma(t)$, de X dans $\mathscr{C}$, est évidemment continue; de plus, d'après (10) et (6)

$$0 \leqslant \xi_\sigma(x)(t) \leqslant \varphi_\sigma(t) \leqslant \delta(K_\sigma^2) \leqslant 2^{-q(\sigma)}.$$

Puisque q est une bijection de N^* sur N, ξ est donc somme d'une série normalement convergente de fonctions continues de X dans $\mathscr{C}$, donc est une fonction continue de X dans $\mathscr{C}$.

Soit t_0 un point de I. D'après les conditions (5) à (8), pour tout entier n fixé, il y a au plus un élément de N^* de longueur n tel que I_σ contienne t_0. Par suite, deux cas sont possibles:

(A) Il existe un n tel que $t_0 \notin I_\sigma$ pour tout σ de longueur n; alors $t_0 \notin I_{\sigma'}$ si $|\sigma'| \geqslant n$.

(B) Il existe un unique élément σ_0 de J tel que $t_0 \in I_{\sigma_0|n}$ pour tout $n \geqslant 1$.

AFFIRMATION 1. *Si t_0 vérifie* (A), *$\xi(x)$ est dérivable en t_0 quel que soit x dans X.*

AFFIRMATION 2. *Si t_0 vérifie* (B), *$\xi(x)$ est dérivable en t_0 si, et seulement si, $x \notin \bigcap_n A(\sigma_0|n)$.*

AFFIRMATION 3. *Quand $\xi(x)$ est dérivable en t_0, $\xi(x)'(t_0) = \sum_{q(\sigma)=1}^{\infty} \lambda_\sigma(x) \varphi_\sigma'(t_0)$.*

Pour prouver ces affirmations , supposons d'abord que t_0 vérifie (A) ou que t_0 vérifie (B) et que $x \notin \bigcap_n A(\sigma_0|n)$. Alors, il existe un entier n_0 tel que, pour tout σ dans N^* vérifiant $|\sigma| \geqslant n_0$, on ait soit $\lambda_\sigma(x) = 0$, soit $t_0 \notin I_\sigma$ (c'est clair si t_0 vérifie (A). Sinon, soit m tel que $x \notin A(\sigma_0|m)$, et soit $n_0 = m+1$; pour σ tel que $|\sigma| \geqslant n_0$, il résulte de (5) à (8) que $t_0 \notin I_\sigma$ si $\sigma|n_0 \neq \sigma_0|n_0$, tandis que (1) et (4) entraînent que $\lambda_\sigma(x) = 0$ si $\sigma|n_0 = \sigma_0|n_0$). Puisque, pour tout n, t_0 appartient à au plus un I_σ avec $|\sigma| = n$, il y a donc un entier q_0 tel que $q(\sigma) \geqslant q_0$ entraîne que l'une au moins des relations $t_0 \notin I_\sigma$ et $\lambda_\sigma(x) = 0$ est vérifiée. Pour $p \geqslant q_0$, posons

$$\xi_p(x)(t) = \sum_{q(\sigma)=1}^{p} \lambda_\sigma(x) \varphi_\sigma(t).$$

Soit σ tel que $q(\sigma) \geqslant q_0$, et soit h tel que $t_0 + h \in I$. Supposons $\lambda_\sigma(x) \neq 0$; alors $t_0 \notin I_\sigma$. Si $t_0 + h$ appartient à K_σ^2, nous avons, d'après (6), (7) et (10),

$$|h| \geqslant \tfrac{1}{2}\delta(I_\sigma) - \delta(K_\sigma^2) = (2^{q(\sigma)} - 1)\delta(K_\sigma^2) \geqslant 2^{q(\sigma)-1} \varphi_\sigma(t_0 + h),$$

d'où

$$\left| \frac{\varphi_\sigma(t_0 + h) - \varphi_\sigma(t_0)}{h} \right| \leqslant 2^{-(q(\sigma)-1)}. \tag{11}$$

Si $t_0 + h \notin K_\sigma^2$, alors $\varphi_\sigma(t_0 + h) = 0$, donc (11) est encore vérifiée. Nous avons donc, pour $q(\sigma) \geqslant q_0$ et $t_0 \notin I_\sigma$,

$$\left| \frac{\lambda_\sigma(x)\varphi_\sigma(t_0 + h) - \lambda_\sigma(x)\varphi_\sigma(t_0)}{h} \right| = \lambda_\sigma(x) \left| \frac{\varphi_\sigma(t_0 + h) - \varphi_\sigma(t_0)}{h} \right| \leqslant 2^{-(q(\sigma)-1)}. \tag{12}$$

L'inégalité (12) étant encore vérifiée si $\lambda_\sigma(x) = 0$, nous avons donc, pour $p \geqslant q_0$,

$$\left| \frac{\xi(x)(t_0 + h) - \xi(x)(t_0)}{h} - \frac{\xi_p(x)(t_0 + h) - \xi_p(x)(t_0)}{h} \right|$$
$$\leqslant \sum_{q(\sigma)=p+1}^{\infty} \left| \frac{\lambda_\sigma(x)\varphi_\sigma(t_0 + h) - \lambda_\sigma(x)\varphi_\sigma(t_0)}{h} \right| \leqslant \sum_{q=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^{q-1}} = \frac{1}{2^{p-1}}.$$

Il en résulte que

$$\xi_p(x)'(t_0) - \frac{1}{2^{p-1}} \leqslant \varliminf_{h \to 0} \left| \frac{\xi(x)(t_0 + h) - \xi(x)(t_0)}{h} \right|$$
$$\leqslant \varlimsup_{h \to 0} \left| \frac{\xi(x)(t_0 + h) - \xi(x)(t_0)}{h} \right| \leqslant \xi_p(x)'(t_0) + \frac{1}{2^{p-1}}.$$

Ceci étant vrai pour tout $p \geq q_0$, il en résulte que $\xi(x)$ est dérivable en t_0, que $\{\xi_p(x)'(t_0)\}$ a une limite quand p tend vers l'infini et que $\xi(x)'(t_0) = \lim_{p\to\infty} \xi_p(x)'(t_0)$. Ceci prouve les affirmations 1 et 3 et une moitié de l'affirmation 2.

Supposons maintenant que t_0 vérifie (B) et que x appartienne à $\bigcap_n A(\sigma_0|n)$. Pour $n \geq 1$, posons $\sigma_n = \sigma_0|n$; alors $\lambda_{\sigma_n}(x) = 1$ pour tout n. Il résulte de (8) et (7) que, pour tout n, t_0 n'appartient pas à $K^2_{\sigma_n}$; de plus, il résulte de (5) à (8) que, si $|\sigma| = n$ et $\sigma \neq \sigma_n$, alors $t_0 \notin K^2_\sigma$. D'après la définition de φ_σ, nous avons donc $\varphi_\sigma(t_0) = 0$ pour tout σ dans N^*, d'où $\xi(x)(t_0) = 0$.

Soit $b_n = b(\sigma_n)$, et soit c_n le milieu de $K^2_{\sigma_n}$. D'après (7) et (8), nous avons

$$(13)\qquad 0 < c_n - t_0 \leq \tfrac{3}{2}\delta(K^2_{\sigma_n}).$$

Il résulte de (9) que, pour $\sigma \neq \sigma_n$ dans N^*, $\varphi_\sigma(b_n) = \varphi_\sigma(c_n) = 0$, d'où, d'après la définition de ξ et (10),

$$(14)\qquad \xi(x)(b_n) = \lambda_{\sigma_n}(x)\varphi_{\sigma_n}(b_n) = 0,$$

$$(15)\qquad \xi(x)(c_n) = \lambda_{\sigma_n}(x)\varphi_{\sigma_n}(c_n) = \delta(K^2_{\sigma_n}).$$

D'après (13), (14) et (15), nous avons donc

$$\frac{\xi(x)(b_n) - \xi(x)(t_0)}{b_n - t_0} = 0,$$

$$\frac{\xi(x)(c_n) - \xi(x)(t_0)}{c_n - t_0} \geq \frac{2}{3\delta(K^2_{\sigma_n})}\cdot\delta(K^2_{\sigma_n}) = \frac{2}{3}.$$

Puisque b_n et c_n tendent vers t_0 quand n tend vers l'infini, ceci montre que $\xi(x)$ n'est pas dérivable en t_0.

La condition (i) résulte de (2) et des affirmations 1 et 2, les conditions (ii) et (iii) sont évidentes, et la condition (iv) résulte de l'affirmation 3 et du fait que $\varphi'_\sigma(0) = \varphi'_\sigma(1) = 0$ pour tout σ.

3.3. Lemme. *Etant donnés un espace métrique X et un sous-ensemble F de X appartenant à $\mathscr{A}(X)$, il existe une fonction continue $\xi\colon X \to \mathscr{C}$ vérifiant*

(i) *$\xi^{-1}(\mathscr{D}^*) = F$ et si x appartient à F, il y a un $t \neq 0, 1$ tel que $\xi(x)$ soit dérivable en t,*

(ii) *$\xi(x)(t) \geq 0$ quels que soient x dans X et t dans I,*

(iii) *$\xi(x)(0) = \xi(x)(1) = 0$ pour tout x.*

Démonstration. Soit $A\colon N^* \to \mathscr{F}(X)$ une fonction vérifiant

$$(1)\qquad A(\tau) \subset \operatorname{Int} A(\tau') \quad \text{si } \tau' < \tau,$$

$$(2)\qquad F = \bigcup_{\sigma\in J} \bigcap_n A(\sigma|n).$$

Pour σ dans N^*, soit $\mu_\sigma\colon X \to I$ une fonction continue vérifiant

$$(3)\qquad \mu_\sigma(x) = 0 \quad \text{si } x \in A(\sigma),$$

$$(4)\qquad \mu_\sigma(x) = 1 \quad \text{si } x \notin \operatorname{Int} A(\sigma|n-1) \text{ pour } |\sigma| = n \geq 2.$$

Par récurrence sur $|\sigma|$, prenons des intervalles non dégénérés $I(\sigma) = [a(\sigma), b(\sigma)]$ de façon que, notant $\mathring{I}(\sigma) =]a(\sigma), b(\sigma)[$, les conditions suivantes soient vérifiées

$$(5)\qquad]0, 1[= \bigcup_{p=1}^{\infty} I(\langle p\rangle),$$

$$(6)\qquad \mathring{I}(\sigma) = \bigcup_{p=1}^{\infty} I(\langle\sigma, p\rangle),$$

(7) si σ et τ sont deux éléments distincts de N^* de même longueur, $\mathring{I}(\sigma) \cap \mathring{I}(\tau) = \emptyset$,

$$(8)\qquad \delta(I(\sigma)) < 2^{-|\sigma|}.$$

Soit D l'ensemble (dénombrable) des points 0,1 et $a(\sigma)$, $b(\sigma)$, $\sigma \in N^*$. Les affirmations suivantes se vérifient facilement:

(9) pour tout σ dans J, $\bigcap_n \mathring{I}(\sigma|n)$ contient exactement un point, qui n'appartient pas à D,

(10) pour tout t n'appartenant pas à D, il existe un unique σ dans J tel que $\{t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathring{I}(\sigma|n)$.

Puisque D est dénombrable, nous pouvons trouver une fonction continue $g\colon I \to \boldsymbol{R}$ vérifiant

(11) $g(0) = g(1) = 0$,

(12) $g(t) \geq 0$ pour tout t,

(13) g est dérivable au point t si, et seulement si, $t \notin D$,

(14) pour tout t dans I, $\overline{\lim}_{h\to 0} |(g(t+h) - g(t))/h| < \infty$.

(Pour construire g, on peut procéder comme suit. Soit $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ une énumération de D. Il est facile de construire une fonction continue $g_n\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ dérivable en tout point différent de d_n, mais pas en d_n, et vérifiant $g_n(0) = g_n(1) = 0$, $0 \leq g_n(t) \leq 1$ quelque soit t et $|(g_n(t+h) - g_n(t))/h| \leq 1$ quels que soient t dans $\boldsymbol{R}$ et $h \neq 0$. Il suffit alors de poser $g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} g_n(t)$.)

Soit q la bijection de N^* sur N définie dans la démonstration du lemme précédent. Pour σ dans N^*, prenons une fonction continûment dérivable $\varphi_\sigma\colon I \to \boldsymbol{R}$ vérifiant

$$(15)\qquad \varphi_\sigma(t) = 0 \quad \text{si } t \notin \mathring{I}(\sigma),$$

$$(16)\qquad \varphi_\sigma(t) > 0 \quad \text{si } t \in \mathring{I}(\sigma),$$

(17) si $t \notin I(\sigma)$, alors $\varphi_\sigma(t+h) \leq 2^{-q(\sigma)}|h|^2$ pour tout h tel que $t+h \in I$,

$$(18)\qquad |\varphi'_\sigma(t)| \leq 2^{-q(\sigma)} \quad \text{pour tout } t.$$

La fonction φ_σ peut, par exemple, être définie par

$$\varphi_\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin I(\sigma), \\ 2^{-q(\sigma)}(t - a(\sigma))^2(b(\sigma) - t)^2 & \text{si } t \in I(\sigma). \end{cases}$$

Fixons une fonction $f\colon I \to \boldsymbol{R}$ n'admettant de dérivée en aucun point et vérifiant

$$(19)\qquad 0 < f(t) < 1 \quad \text{pour tout } t,$$

$$(20)\qquad \overline{\lim_{h\to 0}}\left|\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\right| = \infty \quad \text{pour tout } t.$$

(Il est connu que l'ensemble des fonctions f vérifiant (20) est dense dans $\mathscr{C}$; voir [5], p. 327.)

Définissons $\xi\colon X\to\mathscr{C}$ par

$$\xi(x)(t) = g(t)+f(t)\sum_{\sigma\in N^*}\mu_\sigma(x)\varphi_\sigma(t).$$

D'après (15), (16) et (17), nous avons, quels que soient x et t,

$$(21)\qquad 0\leqslant \mu_\sigma(x)\varphi_\sigma(t)\leqslant \varphi_\sigma(t)\leqslant 2^{-q(\sigma)}.$$

Puisque q est une bijection de N^* sur N et que, quel que soit σ, la fonction $\psi_\sigma\colon X\to\mathscr{C}$ définie par

$$\psi_\sigma(x)(t) = \mu_\sigma(x)\varphi_\sigma(t)$$

est évidemment continue, (21) entraîne que la fonction ψ définie par

$$\psi(x)(t) = \sum_{\sigma\in N^*}\mu_\sigma(x)\varphi_\sigma(t)$$

est somme d'une série normalement convergente de fonctions continues de X dans $\mathscr{C}$, donc est continue. La continuité de ξ en résulte.

Il résulte de (18) que, pour tout x fixé dans X, la série des dérivées $\sum_\sigma\psi_\sigma(x)'$ des fonctions $\psi_\sigma(x)$ est normalement convergente. Par suite, la fonction $\psi(x) = \sum_\sigma\psi_\sigma(x)$ est dérivable, de dérivée $\psi(x)'(t) = \sum_\sigma\psi_\sigma(x)'(t)$.

AFFIRMATION. *Si $\psi(x)(t_0) = 0$, la fonction $t\to\chi(x)(t) = f(t)(\psi(x)(t))$ a une dérivée nulle en t_0.*

Puisque $\psi(x)(t) = \sum_{\sigma\in N^*}\psi_\sigma(x)(t)$ et que $\psi_\sigma(x)(t)\geqslant 0$ pour tout σ, nous avons alors $\psi_\sigma(x)(t_0) = 0$ pour tout σ dans N^*. Montrons que $\psi_\sigma(x)(t_0+h)\leqslant 2^{-q(\sigma)}|h|^2$ pour tout h tel que t_0+h appartienne à I. C'est clair si $\varphi_\sigma(t_0+h) = 0$. Supposons donc $\varphi_\sigma(t_0+h)\neq 0$. Si $\varphi_\sigma(t_0)\neq 0$, alors $\mu_\sigma(x) = 0$ puisque $\psi_\sigma(x)(t_0) = 0$, d'où $\psi_\sigma(x)(t_0+h) = 0$. Si $\varphi_\sigma(t_0) = 0$, alors, d'après (17),

$$\psi_\sigma(x)(t_0+h) = \mu_\sigma(x)\varphi_\sigma(t_0+h)\leqslant\varphi_\sigma(t_0+h)\leqslant 2^{-q(\sigma)}|h|^2.$$

Compte tenu de (19), nous avons donc

$$0\leqslant\chi(x)(t_0+h) = f(t_0+h)(\psi(x)(t_0+h))\leqslant\psi(x)(t_0+h)$$

$$= \sum_\sigma\psi_\sigma(t_0+h)\leqslant\sum_{q(\sigma)=1}^{\infty}2^{-q(\sigma)}|h|^2 = |h|^2,$$

d'où

$$|\chi(x)(t_0+h)-\chi(x)(t_0)| = |\chi(x)(t_0+h)|\leqslant|h|^2,$$

ce qui entraîne l'affirmation.

Nous pouvons maintenant vérifier la condition (i). Soit x un point de F; il y a un σ dans J tel que $x\in\bigcap_n A(\sigma|n)$. Soit t_0 l'unique point de $\bigcap_n \mathring{I}(\sigma|n)$; alors $t_0\neq 0,1$. D'après (9) et (13), g est dérivable en t_0. Soit τ dans N^* et $n = |\tau|$; si $\tau = \sigma|n$, alors $\mu_\tau(x) = 0$ d'après (3); si $\tau\neq\sigma|n$, alors t_0 n'appartient pas à $\mathring{I}(\tau)$ d'après (7), donc $\varphi_\tau(t_0) = 0$ d'après (15). Nous avons donc $\mu_\tau(x)\varphi_\tau(t_0) = 0$ quel que soit τ dans N^*, d'où $\psi(x)(t_0) = 0$. L'affirmation entraîne que $\chi(x)$ est dérivable en t_0, donc $\xi(x) = g+\chi(x)$ est dérivable en t_0 et $\xi(x)$ appartient à $\mathscr{D}^*$.

Soit $x\in X\backslash F$. Pour montrer que $\xi(x)$ n'est dérivable en aucun point t, distinguons trois cas.

1er cas: $t\notin D$. Soit σ l'unique élément de J tel que $\{t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\mathring{I}(\sigma|n)$. Puisque $x\notin F$, il y a un n tel que $x\notin A(\sigma|n)$; alors, si $\tau = \sigma|n+1$, $\mu_\tau(x) = 1$ d'après (4). D'après (16), $\varphi_\tau(t) > 0$, donc $\psi(x)(t)\geqslant\mu_\tau(x)\varphi_\tau(t) > 0$. Puisque $\psi(x)$ est dérivable en t mais pas f, l'inégalité $\psi(x)(t) > 0$ entraîne que $\chi(x)$ n'est pas dérivable en t. Puisque g est dérivable en t d'après (13), $\xi(x) = g+\chi(x)$ n'est pas dérivable en t.

2ème cas: $t\in D$ et $\psi(x)(t) = 0$. Alors $\chi(x)$ a une dérivée nulle en t tandis que g n'est pas dérivable en t, donc $\xi(x) = g+\chi(x)$ n'est pas dérivable en t.

3ème cas: $t\in D$ et $\psi(x)(t) > 0$. Puisque $\psi(x)$ est dérivable en t et que $\psi(x)(t)\neq 0$, il résulte de (20) que la fonction $\chi(x) = f\psi(x)$ vérifie

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\left|\frac{\chi(x)(t+h)-\chi(x)(t)}{h}\right| = \infty.$$

Compte tenu de (14), ceci entraîne que la fonction $\xi(x) = g+\chi(x)$ vérifie

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\left|\frac{\xi(x)(t+h)-\xi(x)(t)}{h}\right| = \infty,$$

donc n'est pas dérivable en t.

Ceci achève de vérifier la condition (i). La condition (ii) résulte de (12), (15), (16) et (19), et (iii) résulte de (11) et (15).

Dans l'énoncé du lemme suivant, E_1 désigne l'un des deux espaces $\mathscr{D}^*$ et $\mathscr{C}\backslash\mathscr{D}$ et E_2 l'un des deux espaces $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}\backslash\mathscr{D}^*$.

3.4. LEMME. *Pour tout espace X appartenant à $\mathscr{L}_1$ (resp. $\mathscr{L}_2$), il existe un plongement fermé φ de X dans E_1 (resp. E_2) vérifiant*

(i) $\varphi(x)(0) = \varphi(x)(1) = 0$ *pour tout* x,

(ii) $0\leqslant\varphi(x)(t)\leqslant 1$ *quels que soient* x *et* t.

De plus, si $E_2 = \mathscr{D}$, φ peut être construit de façon à vérifier

(iii) $\varphi(x)'(0) = \varphi(x)'(1) = 0$ *pour tout* x.

Démonstration. Sans perdre de généralité, nous pouvons supposer X plongé dans le cube de Hilbert Q. Alors X appartient à $\mathscr{L}_2$ si, et seulement si, $Q\backslash X$ appartient à $\mathscr{L}_1$. Nous pouvons donc traiter simultanément les cas de $E_1 = \mathscr{C}\backslash\mathscr{D}$ et $E_2 = \mathscr{D}$ en prouvant que, pour tout sous-ensemble X de Q appartenant à $\mathscr{L}_2$, il existe un plongement φ de Q dans $\mathscr{C}$ vérifiant

(a) $\varphi(x)(0) = \varphi(x)(1) = 0$ pour tout x dans Q,

(b) $0 \leqslant \varphi(x)(t) \leqslant 1$ quels que soient x et t,
(c) pour tout x dans Q, $\varphi(x)$ est dérivable en 0 et en 1 et $\varphi(x)'(0) = \varphi(x)'(1) = 0$.
(d) $\varphi^{-1}(\mathscr{D}) = X$.

D'après le lemme 3.2, il y a une fonction continue $\xi\colon Q \to \mathscr{C}$ vérifiant

(1) $\xi^{-1}(\mathscr{D}) = X$,
(2) $\xi(x)(t) \geqslant 0$ quels que soient x et t,
(3) $\xi(x)(0) = \xi(x)(1) = 0$ quel que soit x,
(4) pour tout x dans Q, $\xi(x)$ est dérivable en 0 et en 1 et $\xi(x)'(0) = \xi(x)'(1) = 0$.

Quitte à remplacer $\xi(x)$ par $\big(\max(1, \|\xi(x)\|)\big)^{-1}\xi(x)$, nous pouvons supposer que

$$0 \leqslant \xi(x)(t) \leqslant 1 \text{ quels que soient } x \text{ et } t. \tag{5}$$

Nous allons construire un plongement $\psi\colon Q \to \mathscr{C}$ vérifiant

(6) $\psi(x)$ est dérivable quel que soit x,
(7) $0 \leqslant \psi(x)(t) \leqslant 1$ quels que soient x et t,
(8) $\psi(x)(0) = \psi(x)(1) = 0$ quel que soit x,
(9) $\psi(x)'(0) = \psi(x)'(1) = 0$ quel que soit x.

Pour construire ψ, on peut procéder comme suit. Soient $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ et $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ deux suites de réels tendant vers zéro vérifiant

$$0 < a_{n+1} < b_{n+1} < a_n < b_n < 1 \quad \text{pour tout } n.$$

Soit $\alpha_n\colon [a_n, b_n] \to \mathbf{R}$ une fonction continûment dérivable vérifiant

$$0 \leqslant \alpha_n(t) \leqslant a_n^2 \quad \text{pour tout } t \in [a_n, b_n], \tag{10}$$

$$\alpha_n(t) > 0 \quad \text{si } a_n < t < b_n, \tag{11}$$

$$\alpha_n(a_n) = \alpha_n(b_n) = 0, \tag{12}$$

$$\alpha_n'(a_n) = \alpha_n'(b_n) = 0. \tag{13}$$

Définissons alors $\psi(x)$, pour $x = (x_n)$ dans Q par

$$\psi(x)(t) = x_n \alpha_n(t) \quad \text{pour } a_n \leqslant t \leqslant b_n, \tag{14}$$

$$\psi(x)(t) = 0 \quad \text{si } t \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]. \tag{15}$$

Il est facile de vérifier que $\psi(x)$ est dérivable en tout point $t \neq 0$. D'après (15), $\psi(x)(0) = 0$. Si $t \in [a_n, b_n]$, nous avons d'après (14) et (10),

$$0 \leqslant \psi(x)(t) \leqslant x_n \alpha_n(t) \leqslant \alpha_n(t) \leqslant a_n^2 \leqslant t^2.$$

Il en résulte que $\psi(x)$ est dérivable en 0, de dérivée nulle. Il est évident que $\psi(x)(1) = \psi(x)'(1) = 0$. Les conditions (6) à (9) sont donc vérifiées. Enfin, si $x = (x_n)$ et $x' = (x_n')$ sont deux points distincts de Q, il y a un n tel que $x_n \neq x_n'$, d'où, d'après (11), $x_n \alpha_n(t) \neq x_n' \alpha_n(t)$ pour $a_n < t < b_n$, ce qui montre que $\psi(x) \neq \psi(x')$, donc que ψ est un plongement de Q dans $\mathscr{C}$.

Définissons alors $\varphi\colon Q \to \mathscr{C}$ par

$$\varphi(x)(t) = \begin{cases} \xi(x)(2t), & 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ \psi(x)(2t-1), & 1/2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases} \tag{16}$$

Puisque $\xi(x)(1) = \psi(x)(0) = 0$, cette définition a un sens et détermine une fonction continue de Q dans $\mathscr{C}$. Si $x \neq x'$, $\varphi(x) \neq \varphi(x')$ puisque $\psi(x) \neq \psi(x')$, donc φ est un plongement. La condition (a) résulte de (3) et (8), (b) résulte de (5) et (7), et (c) résulte de (4) et (9). Si $x \in X$, la dérivabilité de $\varphi(x)$ résulte de (1), (4), (9) et (6); si $x \in Q \setminus X$, il y a, d'après (1), un point t dans $[0, 1/2]$ en lequel $\varphi(x)$ n'est pas dérivable. Ceci vérifie (d).

Pour prouver le résultat simultanément pour $E_1 = \mathscr{D}^*$ et $E_2 = \mathscr{C} \setminus \mathscr{D}^*$, il suffit de construire le plongement φ de façon à vérifier (a), (b) et

$$\varphi^{-1}(\mathscr{C} \setminus \mathscr{D}^*) = X. \tag{d'}$$

Les seules modifications à faire sont les suivantes: Nous utilisons le lemme 3.3 pour trouver une fonction continue ξ vérifiant

(1') $\xi^{-1}(\mathscr{C} \setminus \mathscr{D}^*) = X$ et si $x \in Q \setminus X$, il y a un $t \neq 0{,}1$ tel que $\xi(x)$ soit dérivable en t,

ainsi que (2) et (3). Il nous faut un plongement ψ_1 vérifiant

$$\psi_1(Q) \subset \mathscr{C} \setminus \mathscr{D}^*, \tag{6'}$$

ainsi que (7) et (8). Pour le construire, soit ψ le plongement du lemme précédent, et soit $f\colon I \to \mathbf{R}$ un élément de $\mathscr{C} \setminus \mathscr{D}^*$ vérifiant $f(0) = f(1) = 0$ et $0 \leqslant f(t) \leqslant 1$ pour tout t. Il suffit de poser

$$\psi_1(x)(t) = \tfrac{1}{2}\big(f(t) + \psi(x)(t)\big).$$

Le plongement φ cherché se définit alors comme précédemment, en remplaçant ψ par ψ_1 dans (16).

Pour vérifier (d'), il faut remarquer que $\varphi(x)$ appartient à $\mathscr{D}^*$ si, et seulement si, $\xi(x)$ est dérivable en un point $t \neq 1$ et appliquer (1').

3.5. Lemme. (a) *$\mathscr{D}$ et $\mathscr{C} \setminus \mathscr{D}^*$ sont fortement $\mathscr{L}_2$-universels.*
(b) *$\mathscr{D}^*$ et $\mathscr{C} \setminus \mathscr{D}$ sont fortement $\mathscr{L}_1$-universels.*

Démonstration. Nous prouverons en détails ce résultat dans le cas de $\mathscr{D}$, puis nous indiquerons les modifications nécessaires pour traiter les trois autres espaces. Puisque, d'après les lemmes 3.1 et 2.6, tout Z-ensemble dans $\mathscr{D}$ est un Z-ensemble au sens fort, il suffit, d'après le lemme 2.7, de vérifier que tout ouvert U de $\mathscr{D}$ est $\mathscr{L}_2$-universel. Soient X un espace appartenant à $\mathscr{L}_2$, F une fonction continue de X dans U et $\mathscr{U}$ un recouvrement ouvert de U. Soit $\delta\colon U \to \,]0, 1]$ une fonction continue vérifiant

(1) Pour f dans U et g dans $\mathscr{D}$, $\|g - f\| < \delta(f)$ entraîne que f et g appartiennent à un même élément de $\mathscr{U}$.

Pour $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, notons $u(a, b)$ l'homéomorphisme linéaire de $[a, b]$ sur $[0, 1]$ envoyant a sur 0 et b sur 1. Soit $\varphi\colon X \to \mathscr{D}$ le plongement du lemme 3.4. Soit $h\colon I \to \mathbf{R}$ une fonction continûment dérivable vérifiant

$$h(0) = h(1) = 0, \tag{2}$$

(3) $$-1 \leqslant h(t) < 0 \quad \text{pour } 0 < t < 1,$$

(4) $$h'(0) = h'(1) = 0.$$

Soit $\lambda\colon \boldsymbol{R} \to I$ une fonction croissante continûment dérivable vérifiant

(5) $$\lambda(t) = 0 \quad \text{si } t \leqslant 0, \qquad 0 < \lambda(t) < 1 \quad \text{pour } 0 < t < 1, \qquad \lambda(t) = 1 \quad \text{si } t \geqslant 1.$$

Pour $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1/3$, définissons $\mu_\varepsilon\colon I \to I$ par $\mu_0 = \mathrm{id}$ et

(6) $$\mu_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t \leqslant 2\varepsilon, \\ (\lambda \circ u(2\varepsilon, 3\varepsilon)(t))t, & 2\varepsilon \leqslant t \leqslant 3\varepsilon, \\ t, & 3\varepsilon \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} \qquad \varepsilon > 0.$$

Utilisant le fait que, nécessairement, $\lambda'(0) = \lambda'(1) = 0$, il est facile de vérifier que μ_ε est dérivable. La fonction $\varepsilon \to \mu_\varepsilon$, de $[0, 1/3]$ dans $\mathscr{D}$ est évidemment continue, donc, si nous définissons $\Phi\colon \mathscr{D} \times [0, 1/3] \to \mathscr{D}$ par

(7) $$\Phi(f, \varepsilon) = f \circ \mu_\varepsilon,$$

la fonction Φ est continue. D'après (5) et (6), $\mu_\varepsilon|[2\varepsilon, 1]$ est une bijection croissante de $[2\varepsilon, 1]$ sur $[0, 1]$; il est facile de vérifier que

(8) $$f = \Phi(f, \varepsilon) \circ (\mu_\varepsilon|[2\varepsilon, 1])^{-1},$$

(9) $\Phi(f, \varepsilon)$ a une dérivée nulle au point 2ε.

D'autre part, $\Phi(f, 0) = f$ quelle que soit f. Puisque Φ est continue, nous pouvons trouver une fonction continue $\eta\colon U \to]0, 1/3]$ vérifiant, pour toute f dans U,

(10) $$\eta(f) < \tfrac{1}{2}\delta(f),$$

(11) $$\|\Phi(f, \eta(f)) - f\| < \tfrac{1}{2}\delta(f).$$

Définissons enfin une fonction $G\colon X \to \mathscr{C}$ comme suit. Ecrivant η pour $\eta(F(x))$, posons

(12) $$G(x)(t) = \Phi(F(x), \eta)(t), \qquad 2\eta \leqslant t \leqslant 1,$$

(13) $$G(x)(t) = F(x)(0) + \eta(\varphi(x) \circ u(\eta, 2\eta)(t)), \qquad \eta \leqslant t \leqslant 2\eta,$$

(14) $$G(x)(t) = F(x)(0) + \eta(h \circ u(0, \eta)(t)), \qquad 0 \leqslant t \leqslant \eta.$$

Il résulte de (6), (7), (2) et de la propriété (i) de φ que cette définition a un sens. Il est clair que $G(x)$ est dérivable en t si $t \neq \eta, 2\eta$. Aux points η et 2η, $G(x)$ a une dérivée nulle d'après (4), (9) et la propriété (iii) de φ, donc $G(x)$ appartient à $\mathscr{D}$. De plus, puisque $\Phi(f, \varepsilon)(t) = f \circ \mu_\varepsilon(t) = f(0)$ pour $0 \leqslant t \leqslant 2\varepsilon$, il résulte de (12), (13), (14), (3) et de la propriété (ii) de φ que

(15) $$\|G(x) - \Phi(F(x), \eta)\| < \eta,$$

d'où, d'après (11) et (10),

(16) $$\|F(x) - G(x)\| < \delta(F(x)).$$

D'après (1), G est $\mathscr{U}$-proche de F; en particulier, G est à valeurs dans U. Nous allons montrer que G est un Z-plongement de X dans U. Soient x et x' deux points de X tels que $G(x) = G(x')$. D'après (13), (14), (2) et (3), nous avons

$$G(x)(t) < G(x)(0) \quad \text{pour } 0 < t < \eta(F(x)),$$
$$G(x)(t) \geqslant G(x)(0) \quad \text{pour } \eta(F(x)) \leqslant t \leqslant 2\eta(F(x)),$$

et de même pour $G(x')$. Puisque $G(x) = G(x')$, nous avons nécessairement $\eta(x) = \eta(x')$ et $F(x)(0) = G(x)(0) = G(x')(0) = F(x')(0)$. Mais alors, (13) entraîne que $\varphi(x) \circ u(\eta, 2\eta) = \varphi(x') \circ u(\eta, 2\eta)$, donc que $\varphi(x) = \varphi(x')$. Puisque φ est un plongement, nous avons donc $x = x'$, donc G est injective.

Puisque G est injective, pour prouver que c'est un plongement fermé dans U, il suffit de montrer que, si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite de points de X telle que la suite $\{G(x_n)\}$ converge vers un élément g de U, alors $\{x_n\}$ a une sous-suite qui converge vers un point x_0 de X. Posant $\eta_n = \eta(F(x_n))$, nous pouvons supposer que $\{\eta_n\}$ tend vers $\eta_0 \in [0, 1/3]$. Alors $\eta_0 > 0$. En effet, dans le cas contraire, $\{\Phi(F(x_n), \eta_n)\}$ tendrait aussi vers g d'après (15), et $(\mu_{\eta_n}|[2\eta_n, 1])^{-1}$ convergerait uniformément vers l'identité de I; d'après (8), $\{F(x_n)\}$ tendrait donc aussi vers g et, η étant continue, η_n tendrait vers $\eta(g) > 0$, ce qui est contradictoire.

Puisque $\{\eta_n\}$ tend vers $\eta_0 > 0$ et $\{G(x_n)\}$ vers g, $G(x_n) \circ [u(\eta_n, 2\eta_n)]^{-1}$ converge uniformément vers $g \circ [u(\eta_0, 2\eta_0)]^{-1}$. D'après (13), ceci entraîne que la suite $\{\varphi(x_n)\}$ a une limite dans $\mathscr{D}$ (car $F(x_n)(0) = G(x_n)(0)$ a une limite). Puisque φ est un plongement fermé, la suite $\{x_n\}$ converge donc dans X, ce qui prouve que G est un plongement fermé.

Pour voir que $G(X)$ est un Z-ensemble dans U, remarquons que id_U peut être approximée arbitrairement par des fonctions H de la forme $H(f) = \Phi(f, \alpha(f))$, où α est une fonction continue de U dans $]0, 1]$. D'après (6) et (7), $H(f)(t) = H(f)(0)$ pour $0 \leqslant t \leqslant 2\alpha(f)$, tandis que, pour $g = G(x)$ dans $G(X)$, $g(t) < g(0)$ pour $0 < t < \eta(F(x))$ d'après (3) et (14). Ceci entraîne que $H(U) \subset U \backslash G(X)$.

La démonstration précédente s'applique sans changement à $\mathscr{D}^*$.

Dans le cas de $\mathscr{C} \backslash \mathscr{D}$, la construction de G est identique (car $G(x)$ est dans $\mathscr{C} \backslash \mathscr{D}$ si $\varphi(x)$ est dans $\mathscr{C} \backslash \mathscr{D}$), mais il faut, pour montrer que $G(X)$ est un Z-ensemble, légèrement modifier la construction de H car, si f est un élément de $\mathscr{C} \backslash \mathscr{D}$ dérivable en tout point $t \neq 0$, il se peut que $\Phi(f, \varepsilon)$ soit partout dérivable. Il suffit, pour éliminer ce problème, de redéfinir la fonction μ_ε pour $\varepsilon > 0$ par

(6') $$\mu_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t \leqslant 2\varepsilon, \\ 3(t - 2\varepsilon), & 2\varepsilon \leqslant t \leqslant 3\varepsilon, \\ t, & 3\varepsilon \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Dans le cas de $\mathscr{C} \backslash \mathscr{D}^*$, il faut encore définir μ_ε par (6') et, en plus, prendre pour fonction h vérifiant (2) et (3) un élément de $\mathscr{C} \backslash \mathscr{D}^*$.

3.6. LEMME. *$\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}^*$ sont réunions dénombrables de Z-ensembles.*

Démonstration. Pour $n \geqslant 1$, soit Z_n l'ensemble des fonctions f dans $\mathscr{C}$ pour lesquelles il existe un point t dans I tel que $|(f(t+h)-f(t))/h| \leqslant n$ pour tout h tel que $0<|h| \leqslant 1/n$ et que $t+h$ appartienne à I. Il est facile de vérifier que Z_n est fermé dans $\mathscr{C}$ et que $\mathscr{D}^*$ est contenu dans la réunion des Z_n. Nous allons montrer que Z_n est un Z-ensemble dans $\mathscr{C}$. Puisque tout Z-ensemble dans $\mathscr{C}$ est un Z-ensemble au sens fort, il résultera alors des lemmes 3.1 et 2.6 que $\mathscr{D}^*$ (resp. $\mathscr{D}$) est réunion des Z-ensembles $\mathscr{D}^* \cap Z_n$ (resp. $\mathscr{D} \cap Z_n$).

Soit $\varphi\colon \mathscr{C} \times I \to \mathscr{C}$ une déformation instantanée de $\mathscr{C}$ en $\mathscr{D}$. Soit f_0 un élément de $\mathscr{C}$ vérifiant

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\left|\frac{f_0(t+h)-f_0(t)}{h}\right| = \infty \quad \text{pour tout } t.$$

Alors, la fonction $\psi\colon \mathscr{C} \times I \to \mathscr{C}$ définie par $\psi(f, t) = \varphi(f, t)+tf_0$ est une déformation instantanée de $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}\setminus Z_n$. Cela entraîne que Z_n est un Z-ensemble.

REMARQUES ET PROBLÈMES. (1) $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}\setminus\mathscr{D}^*$ sont deux rétractes absolus fortement $\mathscr{L}_2$-universels, mais ne sont pas homéomorphes car $\mathscr{D}$ est de première catégorie, tandis que $\mathscr{C}\setminus\mathscr{D}^*$ est un espace de Baire. Une même remarque s'applique à $\mathscr{D}^*$ et $\mathscr{C}\setminus\mathscr{D}$. Il serait intéressant d'avoir des caractérisations topologiques de $\mathscr{C}\setminus\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}\setminus\mathscr{D}^*$.

(2) Appelons *fonction de Besicovitch* toute fonction continue f de I dans $\boldsymbol{R}$ qui n'a en aucun point de dérivée à gauche ou à droite (finie ou infinie). Soit $\mathscr{B}$ le sous-espace de $\mathscr{C}$ formé des fonctions de Besicovitch; il est connu que $\mathscr{B}$ est coanalytique (voir [10]). Les démonstrations des lemmes 3.1, 3.3, 3.4 et 3.5 données ci-dessus dans le cas de $\mathscr{C}\setminus\mathscr{D}^*$ peuvent être adaptées pour montrer que $\mathscr{B}$ est un rétracte absolu fortement $\mathscr{L}_2$-universel. Par exemple, dans la démonstration du lemme 3.3, il faut compléter (10) en demandant que g n'ait pas de dérivée à gauche ou à droite en un point de D, et il faut fixer une fonction f dans $\mathscr{B}$ vérifiant (16) et

$$(17')\qquad \begin{aligned} &\overline{\lim_{h\to 0^+}}\left|\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\right| = \infty \quad \text{pour } t\in[0, 1[,\\ &\overline{\lim_{h\to 0^-}}\left|\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\right| = \infty \quad \text{pour } t\in]0, 1] \end{aligned}$$

(l'existence d'une telle fonction est prouvée dans [7], p. 173). Les modifications nécessaires dans les autres lemmes sont évidentes. $\mathscr{B}$ est-il homéomorphe à $\mathscr{D}$?

4. Démonstration du théorème 1.3. Puisque $\mathscr{C}^\infty$ est homéomorphe à l^2, il suffit de prouver que $\mathscr{P}$ est $\mathscr{L}_2$-absorbant dans $\mathscr{C}^\infty$. Il est connu que $\mathscr{P}$ est coanalytique (voir [1]). Puisque $\mathscr{P}$ est un sous-espace vectoriel partout dense de $\mathscr{C}^\infty$, $\mathscr{C}^\infty\setminus\mathscr{P}$ est localement homotopiquement négligeable dans $\mathscr{C}^\infty$ d'après le lemme 2.4, donc tout Z-ensemble dans $\mathscr{P}$ est un Z-ensemble au sens fort. Le lemme 4.3 prouvera l'universalité forte de $\mathscr{P}$, et le lemme 4.4 achèvera la démonstration en montrant que $\mathscr{P}$ est réunion dénombrable de Z-ensembles.

Si Φ est une fonction d'un espace X dans un sous-ensemble de $\mathscr{C}^\infty$, nous noterons Φ_n la projection de Φ sur $\mathscr{C}_n$, $n \geqslant 1$, et nous écrirons $\Phi = (\Phi_n)$.

4.1. LEMME. *Etant donnés un espace métrisable X et un sous-ensemble F de X appartenant à $\mathscr{A}(X)$, il existe une fonction continue $\Phi = (\Phi_n)$ de X dans $\mathscr{C}^\infty$ vérifiant*

(i) $F = \Phi^{-1}(\mathscr{C}^\infty\setminus\mathscr{P})$,

(ii) $\Phi_n(x)(t) \geqslant 0$ *quels que soient n, x et t,*

(iii) $\Phi_n(x)(0) = \Phi_n(x)(1) = 0$ *quels que soient n et x.*

Démonstration. La démonstration qui suit est une adaptation d'un argument de H. Becker [1]. D'après le lemme 1.5, il y a une fonction A de N^* dans $\mathscr{F}(X)$ vérifiant

$$(1)\qquad A(\tau) \subset \operatorname{Int} A(\tau') \quad \text{si } \tau' < \tau,$$

$$(2)\qquad F = \bigcup_{\sigma\in J}\bigcap_n A(\sigma|n).$$

Pour σ dans N^*, soit λ_σ une fonction continue de X dans I vérifiant

$$(3)\qquad \lambda_\sigma(x) = 1 \quad \text{si } x\in A(\sigma),$$

$$(4)\qquad \lambda_\sigma(x) = 0 \quad \text{si } x\notin \operatorname{Int} A(\sigma|n-1) \quad \text{pour} \quad |\sigma| = n \geqslant 2.$$

Prenons, pour tout σ dans N^*, des intervalles fermés I_σ et J_σ dans $]0, 1[$ de façon que les conditions suivantes soient vérifiées:

$$(5)\qquad \text{si } |\sigma| = |\sigma'| \text{ et si } \sigma \neq \sigma', \text{ alors } I_\sigma \cap I_{\sigma'} = \emptyset,$$

$$(6)\qquad J_\sigma \subset \operatorname{Int} I_\sigma,$$

$$(7)\qquad \text{si } \sigma < \tau, \text{ alors } I_\tau \subset \operatorname{Int} J_\sigma.$$

Pour σ dans N^*, définissons une fonction $\varphi_\sigma\colon X \to \mathscr{C}$ comme suit

$$(8)\qquad \varphi_\sigma(x)(t) = 0 \quad \text{si } t\notin \operatorname{Int} I_\sigma,$$

$$(9)\qquad \varphi_\sigma(x)(t) = \lambda_\sigma(x) \quad \text{si } t\in J_\sigma,$$

(10) $\varphi_\sigma(x)$ est linéaire sur chacun des deux intervalles de $I_\sigma\setminus\operatorname{Int} J_\sigma$.

Il est clair que φ_σ est continue. Pour $n \geqslant 1$, soit T_n l'ensemble (fini) des éléments $\sigma = \langle s_1, \ldots, s_k\rangle$ de N^* tels que $k \leqslant n$ et $s_i \leqslant n$ pour tout $i \leqslant k$. Soit $U_n = T_n\setminus T_{n-1}$ $(T_0 = \emptyset)$. Pour $n \geqslant 1$, posons

$$(11)\qquad \Psi_n(x) = \sum_{\sigma\in U_n} \varphi_\sigma(x).$$

Il est clair que Ψ_n est une fonction continue de X dans $\mathscr{C}$ vérifiant

$$\Psi_n(x)(t) \geqslant 0 \quad \text{pour tout } t, \qquad \Psi_n(x)(0) = \Psi_n(x)(1) = 0.$$

Définissons alors la fonction Φ_n, $n \geqslant 1$, par

$$(12)\qquad \Phi_n = \Psi_1 + \ldots + \Psi_n.$$

Il est clair que $\Phi = (\Phi_n)$ est une fonction continue de X dans $\mathscr{C}^\infty$ vérifiant (ii) et (iii).

Soit x dans F, et soit $\sigma\in J$ tel que $x\in\bigcap_n A(\sigma|n)$. D'après (5), (6) et (7), $\bigcap_n I_{\sigma|n}=\bigcap_n J_{\sigma|n}$; soit t_0 un point de cette intersection. Pour $n\geqslant 1$, soit m_n le plus petit entier tel que T_{m_n} contienne $\sigma|n$; alors, $\sigma|n\in U_{m_n}$. D'après (11), (9) et (3), nous avons

$$\Psi_{m_n}(x)(t_0)\geqslant \varphi_{\sigma|n}(x)(t_0)=\lambda_{\sigma|n}(x)=1.$$

Puisque m_n tend vers l'infini avec n, il résulte de (12) que $\Phi_n(x)(t_0)$ tend vers l'infini, donc $\Phi(x)\notin\mathscr{P}$.

Soit $x\in X\setminus F$. D'après (5), (6) et (7), il y a, pour un t_0 fixé de I, deux possibilités:

(A) Il existe un n tel que $t_0\notin I_\sigma$ pour tout σ de longueur n; alors $t_0\notin I_{\sigma'}$, si $|\sigma'|\geqslant n$.

(B) Il existe un unique élément σ_0 de J tel que $t_0\in J_{\sigma_0|n}$ pour tout n.

Si t_0 vérifie (A), il n'appartient, d'après (5), qu'à un nombre fini d'ensembles I_σ, donc, d'après (8), $\varphi_\sigma(x)(t_0)\neq 0$ pour un nombre fini de σ seulement. Si t_0 vérifie (B) et si $\varphi_\sigma(x)(t_0)\neq 0$, alors, d'après (5) et (8), il y a un n tel que $\sigma=\sigma_0|n$; puisque x n'appartient pas à F, il y a un n_0 tel que $x\notin A(\sigma_0|n_0)$, d'où $\varphi_{\sigma_0|n}(x)(t)=\lambda_{\sigma_0|n}(x)=0$ pour $n\geqslant n_0+1$ d'après (9) et (4), donc, ici encore, $\varphi_\sigma(x)(t_0)\neq 0$ pour un ensemble fini d'indices. D'après (11), les ensembles U_n étant deux à deux disjoints, $\Psi_n(x)(t_0)=0$ pour n assez grand, donc la suite $\{\Phi_n(x)(t_0)\}$ est stationnaire, ce qui montre que $\Phi(x)$ appartient à $\mathscr{P}$ et achève de vérifier (i).

4.2. LEMME. *Pour tout espace X appartenant à $\mathscr{L}_2$, il existe une fonction continue $\Theta=(\Theta_n)$ de X dans $\mathscr{P}$ vérifiant*

(i) *$\Theta_n(x)(t)\geqslant 0$ quels que soient n, x et t,*

(ii) *pour tout entier $k\geqslant 0$, la fonction $\Theta^k=(\Theta_n^k)$ définie par $\Theta_n^k=\Theta_{n+k}$ est un plongement fermé de X dans $\mathscr{P}$.*

Démonstration. Nous pouvons supposer X plongé dans le cube de Hilbert Q. Alors, $Q\setminus X$ est analytique, donc, d'après le lemme précédent, il y a une fonction continue $\Phi=(\Phi_n)$ de X dans $\mathscr{C}^\infty$ vérifiant

(1) $$X=\Phi^{-1}(\mathscr{P}),$$

(2) $$\Phi_n(x)(t)\geqslant 0 \text{ quels que soient } n,\ x \text{ et } t,$$

(3) $$\Phi_n(x)(0)=\Phi_n(x)(1)=0 \text{ quels que soient } n \text{ et } x.$$

Soit ψ un plongement de Q dans $\mathscr{C}$ vérifiant

(4) $$\psi(x)(t)\geqslant 0 \text{ quels que soient } x \text{ et } t,$$

(5) $$\psi(x)(0)=\psi(x)(1)=0 \text{ quel que soit } x.$$

(Un tel plongement a été construit dans la démonstration du lemme 3.4.) Définissons alors $\bar\Theta=(\bar\Theta_n)\colon Q\to\mathscr{C}^\infty$ par

(6) $$\bar\Theta_n(x)(t)=\Phi_n(x)(2t),\qquad 0\leqslant t\leqslant 1/2,$$

(7) $$\bar\Theta_n(x)(t)=\psi(x)(2t-1),\qquad 1/2\leqslant t\leqslant 1.$$

Cette définition a un sens d'après (3) et (5), et il résulte de (1), (6) et (7) que $\bar\Theta^{-1}(\mathscr{P})=X$.

Alors, $\Theta=\bar\Theta|X$ a les propriétés souhaitées (la condition (ii) résulte du fait que, pour tout n, $\bar\Theta_n$ est un plongement de Q dans $\mathscr{C}$).

4.3. LEMME. *$\mathscr{P}$ est fortement $\mathscr{L}_2$-universel.*

Démonstration. D'après le lemme 2.7, il suffit de montrer que tout ouvert U de $\mathscr{P}$ est $\mathscr{L}_2$-universel. Soient X un espace appartenant à $\mathscr{L}_2$, $F=(F_n)$ une fonction continue de X dans U et $\mathscr{U}$ un recouvrement ouvert de U. Soit $\Theta=(\Theta_n)$ la fonction du lemme 4.2.

Pour $n\geqslant 1$, soit α_n une fonction continue de I dans I vérifiant

(1) $$\alpha_n(s)=1\quad \text{pour } 0\leqslant s\leqslant 1/n+1,$$

(2) $$\alpha_n(s)=0\quad \text{pour } 1/n\leqslant s\leqslant 1.$$

Définissons une fonction continue $\Phi=(\Phi_n)$ de $X\times]0,1]$ dans $\mathscr{P}$ par

(3) $$\Phi_n(x,s)=\alpha_n(s)F_n(x)+\big(1-\alpha_n(s)\big)\Theta_n(x).$$

Il est facile de construire une fonction continue $\varepsilon\colon U\to[1,\infty[$ de façon que

(4) pour tout $f=(f_n)$ dans U, si $g=(g_n)$ est un élément de $\mathscr{P}$ tel que $g_n=f_n$ pour $n+1\leqslant\varepsilon(f)$, alors f et g appartiennent à un même élément de $\mathscr{U}$ (en particulier, g est dans U).

Définissons alors $G=(G_n)$ de X dans $\mathscr{P}$ par

$$G(x)=\Phi\big(x,(\varepsilon\circ F(x))^{-1}\big).$$

Les relations (1), (2) et (3) entraînent

(5) $$G_n(x)=F_n(x)\quad \text{si } n+1\leqslant\varepsilon(F(x)),$$

(6) $$G_n(x)=\Theta_n(x)\quad \text{si } \varepsilon(F(x))\leqslant n.$$

D'après (4) et (5), G est $\mathscr{U}$-proche de F; en particulier, G prend ses valeurs dans U. Si $G(x)=G(x')$ et si $n\geqslant\max\big(\varepsilon(F(x)),\varepsilon(F(x'))\big)$, alors, d'après (6), $\Theta_n(x)=G_n(x)=G_n(x')=\Theta_n(x')$, ce qui montre que $\Theta^k(x)=\Theta^k(x')$ pour k assez grand; d'après (ii) du lemme 4.2, $x=x'$, donc G est injective. Pour prouver que G est un plongement fermé dans U, il suffit donc de montrer que, si $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ est une suite de points de X telle que la suite $\{G(x_i)\}$ converge vers un point $g=(g_n)$ de U, alors $\{x_i\}$ a une sous-suite qui converge dans X. Posant $\varepsilon_i=\varepsilon\circ F(x_i)$, nous pouvons supposer que $\{\varepsilon_i\}$ converge vers $\varepsilon_0\in[1,\infty]$.

Alors $\varepsilon_0<\infty$ car, dans le cas contraire, il résulterait de (5) que, quel que soit n, $G_n(x_i)=F_n(x_i)$ pour i assez grand, donc la suite $\{F(x_i)\}$ convergerait vers la même limite g que $\{G(x_i)\}$ et, ε étant continue, $\{\varepsilon_i\}$ tendrait vers $\varepsilon(g)<\infty$, ce qui est contradictoire.

Puisque $\varepsilon_0<\infty$, la suite $\{\varepsilon_i\}$ est bornée. Soit k un entier tel que $\varepsilon_i<k$ pour tout i. D'après (6), pour tout i, $G_n(x_i)=\Theta_n(x_i)$ si $n\geqslant k$, donc $\{\Theta_n(x_i)\}$ tend vers g_n pour tout $n\geqslant k$. Ceci montre que $\{\Theta^k(x_i)\}_{i=1}^\infty$ converge vers $g^k=(g_{n+k})$ (qui appartient à $\mathscr{P}$). D'après (ii) du lemme 4.2, la suite $\{x_i\}$ converge donc dans X et G est bien un plongement fermé dans U.

Pour voir que $G(X)$ est un Z-ensemble dans U, il suffit de remarquer que la déformation $\Psi = (\Psi_n)$: $\mathscr{P}\times I \to \mathscr{P}$ définie, pour $f = (f_n)$, par

$$\Psi_n(f, s)(t) = \alpha_n(s) f_n(t) - (1-\alpha_n(s))$$

vérifie $\Psi(f, 0) = f$ et $\Psi(\mathscr{P}\times]0, 1]) \subset \mathscr{P}\setminus G(X)$, cette inclusion résultant du fait que, pour $s > 0$, $\Psi_n(f, s)(t) = -1$ pour $n \geqslant 1/s$ tandis que, pour x dans X et n assez grand, $G_n(x)(t) = \Theta_n(x)(t) \geqslant 0$.

4.4. Lemme. *$\mathscr{P}$ est réunion dénombrable de Z-ensembles.*

Démonstration. Pour tout entier $m \geqslant 1$, soit Z_m l'ensemble des $f = (f_n)$ dans $\mathscr{P}$ tels que $|f_n(0)| \leqslant m$ pour tout $n \geqslant 1$. Il est clair que Z_m est fermé dans $\mathscr{P}$ et que $\mathscr{P} = \bigcup_{m=1}^{\infty} Z_m$. Il suffit donc de montrer que Z_m est un Z-ensemble et, pour ce, de remarquer que la déformation $\Psi = (\Psi_n)$ de $\mathscr{P}$ définie par

$$\Psi_n(f, s)(t) = \alpha_n(s) f_n(t) + 2m(1-\alpha_n(s)),$$

où α_n est comme dans le lemme précédent, vérifie $\Psi(\mathscr{P}\times]0, 1]) \subset \mathscr{P}\setminus Z_m$ (car, si $s > 0$, $\Psi_n(f, s)(0) = 2m$ pour $n \geqslant 1/s$).

5. Démonstration du théorème 1.4. Nous allons montrer que $\mathscr{H}$ vérifie les conditions (C.0) à (C.2) du théorème 1.1. Il est connu que $\mathscr{H}$ est coanalytique (voir [6], § 38, IV, 5).

5.1. Lemme. *Il existe une déformation instantanée de 2^I en $\mathscr{H}$.*

Démonstration. Soit Q_f le sous-ensemble du cube de Hilbert Q formé des points $q = (q_n)$ tels que $q_n = 0$ pour presque tout n. Soit $\mathscr{F}$ le sous-espace de 2^I formé des sous-ensembles finis. Il est connu que les couples $(2^I, \mathscr{F})$ et (Q, Q_f) sont homéomorphes ([3], corollaire 5.2). Il est élémentaire de construire une déformation instantanée de Q en Q_f. Il existe donc une déformation instantanée de 2^I en $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}$, d'où le lemme.

Le corollaire suivant qui, en particulier, achève de vérifier la condition (C.0), résulte des lemmes 2.5 et 2.6.

5.2. Corollaire. *$\mathscr{H}$ est un rétracte absolu dans lequel tout Z-ensemble est un Z-ensemble au sens fort.*

5.3. Lemme. *Etant donnés un espace métrique X et un sous-ensemble F de X appartenant à $\mathscr{A}(X)$, il existe une fonction continue ξ: $X \to 2^I$ telle que $\xi^{-1}(\mathscr{H}) = X\setminus F$.*

Démonstration. Soit A une fonction de N^* dans $\mathscr{F}(X)$ vérifiant

(1) $$A(\tau) \subset \operatorname{Int}(A(\tau')) \quad \text{si } \tau' < \tau,$$

(2) $$F = \bigcup_{\sigma\in J} \bigcap_n A(\sigma|n).$$

Prenons, pour σ dans N^*, une fonction continue λ_σ de X dans I vérifiant

(3) $$\lambda_\sigma(x) = 1 \quad \text{si } x \in A(\sigma),$$

(4) $$\lambda_\sigma(x) = 0 \quad \text{si } x \notin \operatorname{Int} A(\sigma|n-1) \text{ pour } |\sigma| = n \geqslant 2.$$

Soit Z^* l'ensemble des suites finies d'entiers non nuls (positifs ou négatifs), et soit S l'ensemble des suites infinies d'entiers non nuls. Pour α, β dans Z^* ou S, n dans N et p entier $\neq 0$, les notations $\alpha < \beta$, $\alpha|n$ et $\langle\alpha, p\rangle$ sont définies comme dans la section 1 pour les éléments de N^* ou J. Pour α dans S (resp. Z^*), nous noterons $\bar{\alpha}$ l'élément de J (resp. N^*) qui est la suite des valeurs absolues des termes de α.

Nous allons définir, par récurrence sur la longueur $|\alpha|$ de l'élément α de Z^*, des fonctions continues I_α: $X \to 2^I$, associant à chaque point x de X un intervalle fermé, éventuellement dégénéré, d'extrémités $a_\alpha(x)$ et $b_\alpha(x)$. Prenons des nombres a_n, b_n, a_{-n}, b_{-n} $(n \geqslant 1)$ de façon que

$$0 < \ldots < b_{-(n+1)} < a_{-n} < b_{-n} < \ldots < b_{-1} < a_1 < \ldots < a_n < b_n < a_{n+1} < \ldots < 1,$$

et que les suites $\{a_n\}$ et $\{a_{-n}\}$ convergent vers 1 et 0 resp. Pour $m \neq 0$, soit $I_m = [a_m, b_m]$. Pour $\alpha = \langle m\rangle$ de longueur 1, posons $I_\alpha(x) = I_m$ pour tout x dans X. Supposons $I_\alpha(x)$ défini quand $|\alpha| \leqslant k$. Soit $l_\alpha(x)$ la longueur de $I_\alpha(x)$; c'est, pour $|\alpha| \leqslant k$, une fonction continue de X dans I puisque I_α est continue. Nous avons en outre

(5) $$a_\alpha(x) \leqslant a_\alpha(x) + \lambda_{\bar{\alpha}}(x) l_\alpha(x) \leqslant a_\alpha(x) + l_\alpha(x) = b_\alpha(x).$$

Soit $u_\alpha(x)$ l'application linéaire de I dans I telle que $u_\alpha(x)(0) = a_\alpha(x)$ et $u_\alpha(x)(1) = a_\alpha(x) + \lambda_{\bar{\alpha}}(x) l_\alpha(x)$. Pour $\beta = \langle\alpha, m\rangle$ de longueur $k+1$, posons

(6) $$I_\beta(x) = u_\alpha(x)(I_m).$$

Il est facile de vérifier que I_β est une fonction continue; d'après (5), on a

(7) $$I_\beta(x) \subset I_\alpha(x) \quad \text{pour } \beta = \langle\alpha, m\rangle.$$

Il est clair que

(8) Pour $\beta = \langle\alpha, m\rangle$, $I_\beta(x)$ est dégénéré si, et seulement si, $\lambda_{\bar{\alpha}}(x) l_\alpha(x) = 0$.

Par récurrence sur les longueurs de α et α', on peut vérifier que

(9) Si α et α' sont deux éléments distincts de Z^* tels que $I_\alpha(x)$ contienne plus d'un point et que $I_\alpha(x) \cap I_{\alpha'}(x) \neq \emptyset$, alors $\alpha < \alpha'$ ou $\alpha' < \alpha$.

Posons alors, pour n entier $\geqslant 1$ et x dans X,

$$\xi_n(x) = \{0, 1\} \cup \{a_\alpha(x), u_\alpha(x)(1) |\ \alpha \in Z^* \text{ et } |\alpha| < n\} \cup \left(\bigcup \{I_\alpha(x) |\ \alpha\in Z^* \text{ et } |\alpha| = n\}\right).$$

Il est facile de vérifier que $\xi_n(x)$ est fermé et dépend continûment de x. De plus, d'après (7), $\xi_{n+1}(x) \subset \xi_n(x)$ pour tout n. Définissons ξ: $X \to 2^I$ par

$$\xi(x) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \xi_n(x).$$

On peut vérifier que la distance de Hausdorff entre $\xi(x)$ et $\xi_n(x)$ est inférieure ou égale au plus grand des nombres $l_\alpha(x)$, pour α dans Z^* de longueur n, donc tend uniformément vers zéro. La fonction ξ est donc la limite uniforme des fonctions continues ξ_n, donc est continue.

Soit x un point de F. Il existe σ dans J tel que $x \in \bigcap_n A(\sigma|n)$. L'ensemble S_σ des éléments α de S tels que $\bar{\alpha} = \sigma$ est indénombrable. Pour α dans S_σ, soit $I_\alpha(x) = \bigcap_n I_{\alpha|n}(x)$; alors $I_\alpha(x)$ est contenu dans $\xi(x)$, donc, pour prouver que $\xi(x)$ est indénombrable, il suffit de montrer que

(10) $I_\alpha(x)\cap I_{\alpha'}(x)=\emptyset$ si α et α' sont deux éléments distincts de S_σ.

D'après (3), $\lambda_{\sigma|n}(x)=1$ pour tout n. Par récurrence sur n, il résulte de (8) que, pour tout α dans S_σ et tout $n\geqslant 1$, $I_{\alpha|n}(x)$ n'est pas dégénéré. Mais alors, (10) résulte de (9).

Soit x un point de $X\setminus F$. Pour vérifier que $\xi(x)$ appartient à $\mathscr{H}$, il suffit de montrer que $\xi(x)$ est contenu dans l'ensemble dénombrable $D=\{0,1\}\cup\{a_\alpha(x),\ u_\alpha(x)(1)|\ \alpha\in \boldsymbol{Z}^*\}$. Supposons que $\xi(x)$ contienne un point t n'appartenant pas à D. Pour $n\geqslant 1$, t appartient à $\xi_n(x)$, donc il existe un α_n de longueur n dans $\boldsymbol{Z}^*$ tel que $I_{\alpha_n}(x)$ contienne t. Puisque $t\neq a_{\alpha_n}(x)$, $I_{\alpha_n}(x)$ contient plus d'un point.

D'après (9), $\alpha_n<\alpha_{n+1}$ pour tout n. Il y a donc un α dans S tel que $\alpha|n=\alpha_n$ pour tout n. Puisque $I_{\alpha_{n+1}}(x)$ contient plus d'un point, $\lambda_{\bar\alpha_n}(x)\neq 0$ pour tout n; d'après (4), x appartient à $A(\bar\alpha_{n-1})$ quel que soit n, donc, si $\sigma=\bar\alpha$, $x\in\bigcap_n A(\sigma|n)\subset F$, ce qui est absurde.

5.4. Lemme. *Pour tout espace X appartenant à $\mathscr{L}_2$, il existe un plongement fermé de X dans $\mathscr{H}$.*

Démonstration. Supposons X plongé dans le cube de Hilbert Q. Alors $Q\setminus X$ est analytique et, d'après le lemme précédent, il y a une fonction continue $\xi\colon Q\to 2^I$ vérifiant

(1) $$\xi^{-1}(\mathscr{H})=X,$$

(2) $$\xi(q)\subset[2/3,1]\quad \text{pour tout } q \text{ dans } Q.$$

La fonction $\psi\colon Q\to 2^I$ définie par

$$\psi(q)=\{0\}\cup\{\tfrac{1}{3}(2^{-n}+q_n\cdot 2^{-(n+1)})|\ n\geqslant 1\}$$

est continue et est un plongement car, si $q\neq q'$, il y a un entier n tel que $q_n\neq q_n'$, et le point $\frac{1}{3}(2^{-n}+q_n2^{-(n+1)})$ appartient à $\psi(q)\setminus\psi(q')$. De plus, nous avons

(3) $$\psi(q)\subset[0,\tfrac{1}{3}]\quad \text{pour tout } q.$$

Définissons $\varphi\colon Q\to 2^I$ par $\varphi(q)=\xi(q)\cup\psi(q)$; puisque ξ et ψ sont continues, φ aussi. Puisque ψ est injective, il résulte de (2) et (3) que φ l'est aussi. Puisque $\psi(q)$ est dénombrable pour tout q, il résulte de (1) que $\varphi^{-1}(\mathscr{H})=X$. Par suite, la restriction de φ à X est le plongement cherché.

5.5. Lemme. *$\mathscr{H}$ est fortement $\mathscr{L}_2$-universel.*

Démonstration. D'après 5.2 et 2.7, il suffit de montrer que tout ouvert U de $\mathscr{H}$ est $\mathscr{L}_2$-universel.

Soient X un espace appartenant à $\mathscr{L}_2$, f une fonction continue de X dans U et $\mathscr{U}$ un recouvrement ouvert de U. Notant ϱ la distance de Hausdorff sur 2^I associée à la distance usuelle sur I, prenons une fonction continue $\varepsilon\colon U\to]0,\frac{1}{2}]$ vérifiant

(1) Quels que soient K dans U et K' dans $\mathscr{H}$, $\varrho(K,K')<4\varepsilon(K)$ entraîne que K et K' appartiennent à un même élément de $\mathscr{U}$.

Pour $a<b$, soit $l(a,b)$ l'application linéaire telle que $l(0)=a$ et $l(1)=b$. Définissons une fonction $g\colon X\to\mathscr{H}$ par

$$g(x)=l(2\varepsilon(f(x)),1)(f(x)).$$

Alors, g est continue et vérifie

(2) $$\varrho(f(x),g(x))\leqslant 2\varepsilon(f(x)).$$

Soit $q(x)$ la borne inférieure de l'ensemble $g(x)$. La fonction q est continue et, d'après la définition de g,

(3) $$q(x)\geqslant 2\varepsilon(f(x)).$$

Le lemme 5.4 nous permet de trouver un plongement fermé φ de X dans $\mathscr{H}$ vérifiant

(4) $$\varphi(x)\subset[1/2,3/4]\quad \text{pour tout } x.$$

Posons

$$\psi(x)=\{0,1/4\}\cup\varphi(x).$$

Définissons enfin la fonction $h\colon X\to\mathscr{H}$ par

$$h(x)=g(x)\cup\big[l\big(q(x)-\varepsilon(f(x)),\,q(x)\big)(\psi(x))\big].$$

Cette définition a un sens d'après (3) et, puisque $h(x)\setminus g(x)$ est contenu dans $[q(x)-\varepsilon(f(x)),\,q(x)]$, nous avons

(5) $$\varrho(g(x),h(x))\leqslant\varepsilon(f(x)),$$

d'où, d'après (2),

(6) $$\varrho(f(x),h(x))\leqslant 3\varepsilon(f(x)).$$

Il résulte alors de (1) que h est $\mathscr{U}$-proche de f; en particulier, h est à valeurs dans U.

Soient x, x' deux points de X tels que $h(x)=h(x')$. D'après la définition de h, la borne inférieure de $h(x)$ est le point $q(x)-\varepsilon(f(x))$, et le point de $h(x)$ qui suit immédiatement cette borne inférieure est $q(x)-\frac{3}{4}\varepsilon(f(x))$; comme il en est de même pour $h(x')$, nous avons $q(x)=q(x')$ et $\varepsilon(f(x))=\varepsilon(f(x'))$. De plus, d'après la définition de h, nous avons

$$\varphi(x)=\big[l\big(q(x)-\varepsilon(f(x)),\,q(x)\big)\big]^{-1}\big(h(x)\cap\big[q(x)-\tfrac{1}{2}\varepsilon(f(x)),\,q(x)-\tfrac{1}{4}\varepsilon(f(x))\big]\big).$$

Il en résulte que $\varphi(x)=\varphi(x')$, d'où $x=x'$ puisque φ est un plongement.

Pour prouver que h est un plongement fermé dans U, il suffit, puisqu'elle est injective, de montrer que si $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ est une suite de points de X telle que la suite $\{h(x_n)\}$ converge vers un élément K_0 de U, alors $\{x_n\}$ a une sous-suite qui converge dans X. Posons $\varepsilon_n=\varepsilon(f(x_n))$, $q_n=q(x_n)$ et $l_n=l(q_n-\varepsilon_n,q_n)$. Nous pouvons supposer que $\{q_n\}$ tend vers un point q_0 de I et $\{\varepsilon_n\}$ vers un point ε_0 de $[0,1/2]$. Alors $\varepsilon_0>0$ car sinon, d'après (6), $\{f(x_n)\}$ tendrait aussi vers K_0, donc, ε étant continue, ε_n tendrait vers $\varepsilon(K_0)>0$, ce qui est absurde.

Puisque $\{q_n\}$ tend vers q_0 et $\{\varepsilon_n\}$ vers $\varepsilon_0>0$, $\{l_n^{-1}\}$ converge, uniformément sur tout compact de $\boldsymbol{R}$, vers $l(q_0-\varepsilon_0,q_0)^{-1}$. D'après la définition de h, $l_n(\varphi(x_n))$ est un sous-ensemble de $h(x_n)$. Nous pouvons supposer que $\{l_n(\varphi(x_n))\}$ converge vers un ensemble K_1; alors K_1 est contenu dans K_0, donc est dénombrable, et $\{\varphi(x_n)\}$ converge vers l'élément $l(q_0-\varepsilon_0,q_0)^{-1}(K_0)$ de $\mathscr{H}$. Puisque φ est un plongement fermé de X dans $\mathscr{H}$, la suite $\{x_n\}$ converge alors dans X.

Pour voir que $h(X)$ est un Z-ensemble dans U, il suffit de remarquer que, pour tout x dans X, la borne inférieure de $h(x)$ est un point isolé de $h(x)$ et que id_U peut être approximée arbitrairement par des fonctions k telles que, pour tout K dans U, la borne inférieure de $k(K)$ ne soit pas un point isolé de $k(K)$. La construction d'une telle fonction k peut se faire en deux temps, comme celle de h. On approxime d'abord id_U par une fonction k_1 telle que, pour tout K, la borne inférieure $q_1(K)$ de $k_1(K)$ soit > 0. Notant $L = \{0\} \cup \{1/n|\ n \geqslant 1\}$, on pose alors

$$k(K) = k_1(K) \cup [l(q_1(K) - \alpha(K),\ q_1(K))(L)],$$

où α: $U \to]0, 1]$ est une fonction continue suffisamment petite.

Compte tenu du corollaire 5.2, le lemme suivant achève de vérifier les conditions du théorème 1.1.

5.6. Lemme. *$\mathscr{H}$ est réunion dénombrable de Z-ensembles.*

Démonstration. Soit Z_0 l'ensemble des éléments de 2^I ne contenant qu'un seul point. Pour $n \geqslant 1$, soit Z_n le sous-ensemble de 2^I formé des K pour lesquels il existe un x appartenant à K tel que $K \setminus \{x\}$ soit non vide et que $d(x, K \setminus \{x\}) \geqslant 1/n$. Il est facile de vérifier que Z_n est fermé dans 2^I. La fonction φ: $2^I \times I \to 2^I$ définie par

$$\varphi(K, t) = \{x \in I|\ d(x, K) \leqslant t\}$$

est une déformation instantanée de 2^I en $2^I \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} Z_n$. Ceci entraîne que les Z_n sont des Z-ensembles dans 2^I. Puisque tout compact dénombrable a un point isolé, $\mathscr{H}$ est contenu dans la réunion des Z_n. Les lemmes 2.6 et 5.1 montrent alors que $\mathscr{H}$ est la réunion des Z-ensembles $\mathscr{H} \cap Z_n$ $(n \geqslant 0)$.

Bibliographie

[1] H. Becker, *Some examples of Borel-inseparable pairs of coanalytic sets*, Mathematika 33 (1986), 72–79.

[2] M. Bestvina and J. Mogilski, *Characterizing certain incomplete infinite-dimensional absolute retracts*, Michigan Math. J. 33 (1986), 291–313.

[3] D. Curtis and Nguyen To Nhu, *Hyperspaces of finite subsets which are homeomorphic to $\aleph_0$-dimensional linear metric spaces*, Topology Appl. 19 (1985), 251–260.

[4] S. T. Hu, *Theory of Retracts*, Wayne State University Press, Detroit 1965.

[5] C. Kuratowski, *Topologie* I, 4ème édition, PWN, Warszawa 1958.

[6] — *Topologie* II, 3ème édition, PWN, Warszawa 1961.

[7] J. Malý, *Where the continuous fonctions without unilateral derivatives are typical*, Trans. Amer. Math. Soc. 283 (1984), 169–175.

[8] R. D. Mauldin, *The set of continuous nowhere differentiable functions*, Pacific J. Math. 83 (1979), 199–205.

[9] S. Mazurkiewicz, *Über die Menge der differenzierbaren Funktionen*, Fund. Math. 27 (1936), 244–249.

[10] S. Saks, *On the functions of Besicovitch in the space of continuous functions*, ibid. 19 (1932), 211–219.

[11] H. Toruńczyk, *Concerning locally homotopy negligible sets and characterization of l^2-manifolds*, ibid. 101 (1978), 93–110.

22 rue Jouvenet, 75016 Paris, France

Received 8 January 1990;
in revised form 17 April 1990

Collectionwise Hausdorffness at limit cardinals

by

Nobuyuki Kemoto (Oita)

Abstract. F. D. Tall conjectured:

If $\varkappa$ is a singular strong limit cardinal and X is a $<\varkappa$-CWH (CollectionWise Hausdorff) normal or countably paracompact space of character $<\varkappa$, then X is $\varkappa$-CWH.

In this paper, we shall show that the conjecture is true if the singular cardinals hypothesis is assumed. Furthermore, we shall study weak $\varkappa$-CWH-ness, when $\varkappa$ is a certain limit cardinal.

1. Introduction. F. D. Tall conjectured in [T3]:

Tall's Conjecture. *If $\varkappa$ is a singular strong limit cardinal and X is a $<\varkappa$-CWH (CollectionWise Hausdorff) normal or countably paracompact space of character $<\varkappa$, then X is $\varkappa$-CWH.*

W. G. Fleissner proved in [F1] that this conjecture is true if the GCH (Generalized Continuum Hypothesis) is assumed. More generally, as in [T2], this conjecture is true if there is a $\mu < \varkappa$ such that $2^\lambda = \lambda^+$ for *every* $\mu \leqslant \lambda < \varkappa$. Whenever $\mathrm{cf}\,\varkappa = \omega$ holds, this conjecture is true without other set-theoretical additional axioms or normality or countable paracompactness by the argument of the proof of [F2, Theorem 1 (b)]. Thus we focus on the case $\mathrm{cf}\,\varkappa \geqslant \omega_1$.

In Section 2, we shall characterize "$<\varkappa$-CWH $\to \varkappa$-CWH" using the sparse-like argument in [F4], and also show that the conjecture is true if the SCH (Singular Cardinals Hypothesis) is assumed. In Section 3, we shall study weak $\varkappa$-CWH-ness (in the sense of [T1]) for various spaces where $\varkappa$ is a certain limit cardinal.

A closed discrete subspace Y of a space X is said to be *separated* if there is a neighborhood U_y of y for each $y \in Y$ such that $\{U_y\colon y \in Y\}$ is disjoint. Y is *$<\varkappa$-separated* if every subset of Y of size $<\varkappa$ is separated. A space X is $\varkappa$-CWH ($<\varkappa$-CWH) if every closed discrete subspace of size $\varkappa$ ($<\varkappa$, respectively) is separated. "Closed UnBounded" is abbreviated as *cub*. In this paper, no separation axioms are assumed.

1980 *Mathematics Subject Classification* (1985 *Revision*): 54D15, 03E50.

Key words and phrases: collectionwise Hausdorff, strong limit cardinal, singular cardinals hypothesis.