$b'_p \subsetneq c'_p \subseteq e_{4p+2}$ such that $f_p[b'_p] = f_p[c'_p]$. This shows that there are feasible sequences $\bar{b}$, $\bar{c}$ such that $f_{X_0} = f_{X_1}$ for all $\langle \bar{k}, \bar{b}, \bar{c} \rangle$-amenable sets X_0, X_1, which concludes the proof of (8).

(7) is an easy consequence of (8) and Claim 14, because $E \cap [m(0), m(1))$ is a $*$-witness and $F^*(X_0) \cap m(1)^n = F^*(X_1) \cap m(1)^n$ for all amenable X_0 and X_1.

This concludes the proof of Sublemma 15, Lemma 6 and Theorem 1. ■ ■ ■

References

[vD] E. K. van Douwen, *Prime mappings, number of factors, and binary operations*, Dissert. Math. 199 (1982), 38 pp.

[J] W. Just, Ph. D. Thesis (in Polish), University of Warsaw, 1986.

[J1] — *A modification of Shelah's oracle-c.c. with applications*, preprint, University of Toronto, 1989.

[P] I. I. Parovičenko, *A universal bicompact of weight* $\aleph_1$, Sov. Math. Dokl. 4, 592–595.

INSTITUTE OF MATHEMATICS
WARSAW UNIVERSITY
PKiN
00-901 Warszawa

Present address:

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
UNIVERSITY OF TORONTO
Toronto, Canada
M5S 1A1

Received 12 December 1986

Sur le nombre de côtés d'une sous-variété

by

Robert Cauty (Paris)

Abstract. Let A be a connected, locally connected and locally closed subset of a metric space X which is locally two-sided in X in the sense that every point x of A has arbitrary small connected neighbourhoods $\mathfrak{U}$ such that $\mathfrak{U} \setminus A$ has exactly two components whose closure contains x. We use elementary methods from sheaf theory to study when A is globally two-sided in X (i.e., A has a connected neighbourhood V such that $V \setminus A$ is not connected). We give some applications to concrete examples.

1. Introduction et notations. Soient X une variété de dimension $n+1$, et A une variété connexe de dimension n (pas nécessairement fermée) contenue dans X. On dit que A a deux côtés dans X si elle a un voisinage ouvert connexe W dans X tel que $W \setminus A$ ait exactement deux composantes; sinon, on dit que A n'a qu'un côté dans X. Le problème de reconnaître quand A a deux côtés se pose naturellement, et divers résultats partiels sont connus, l'un des plus généraux étant celui de Rushing [7] selon lequel une n-variété simplement connexe localement plate dans X a deux côtés (et a même un double collier dans X). Rushing remarque aussi que les techniques de la topologie algébrique ne semblent pas suffire à montrer qu'une n-variété orientable non fermée dans S^{n+1} a deux côtés. Nous montrerons dans cet article que l'utilisation des premiers éléments de la théorie des faisceaux permet de caractériser les sous-variétés ayant deux côtés (voir le corollaire 2.2). L'avantage de notre approche abstraite est qu'elle s'applique à des espaces beaucoup plus généraux que les variétés; il suffit que A soit un sous-espace localement fermé et localement connexe d'un espace métrique X "séparant localement X en deux morceaux". A titre d'exemple d'applications de ce raisonnement général, nous prouverons les résultast suivants:

(1) Soit A un sous-ensemble connexe et localement connexe d'un espace métrique X qui a en tout point un double collier local dans X (voir section 2 pour la définition). Alors

(a) Si A n'admet pas de revêtement non trivial à deux feuillets, A a un double collier dans X.

(b) Pour toute distance admissible d sur X, A a un double collier dans X si, et seulement si, il existe une suite de fonctions continues $f_n\colon A \to X \setminus A$ qui converge localement uniformément vers l'inclusion $i\colon A \to X$.

(2) Soit Q une variété ouverte connexe de dimension n. Si le compactifié de Freudenthal Q^* de Q peut être plongé dans une variété de dimension $n+1$, alors Q contient un compact K tel que $Q \setminus K$ soit orientable.

(3) Si M est une surface non orientable, la S-courbe A_M de Borsuk [1] n'admet aucune immersion dans une surface orientable.

L'idée de départ de notre construction est celle que Rushing appelle dans [7] la "démonstration évidente" et qu'il discute en détails pour conclure qu'elle est impraticable. Si P est un ouvert de X tel que $P \setminus A$ ait exactement deux composantes, le choix d'une composante de $P \setminus A$ détermine une orientation "cohérente" de tout "vecteur" transverse à A en un point de $P \cap A$. Inversement, s'il est possible de choisir de façon "cohérente" une orientation de tout "vecteur" transverse à A en chaque point de A, on suppose que A a deux côtés dans X. La construction du faisceau $\tilde{N}$ à la section 2 donne un sens à cette approche informelle, et montre que cette supposition est juste.

Tous les espaces considérés dans cet article sont supposés métrisables. Sauf mention du contraire, une variété est supposée sans bord. Une surface est une variété de dimension deux. Un disque D est un espace homéomorphe au disque unité fermé du plan R^2; son bord est noté $\dot{D}$, son intérieur $\mathring{D}$; un espace homéomorphe à $\mathring{D}$ est appelé un disque ouvert.

Notre référence générale pour la théorie des faisceaux est [4]. La restriction d'un faisceau $\mathscr{F}$ à un sous-espace A sera noté $\mathscr{F}|A$, et son image réciproque par une application f par $f^*\mathscr{F}$.

Notre référence générale pour l'homologie est [5]. Nous noterons $H^p(X, A)$ le groupe de cohomologie d'Alexander–Spanier de dimension p du couple (X, A) à coefficients entiers (cochaînes arbitraires), et $\tilde{H}^0(X)$ le groupe de cohomologie réduite en dimension zéro de l'espace X. Si U est un sous-ensemble de X et t un élément de $\tilde{H}^0(X)$, nous noterons $t|U$ l'image de t dans $\tilde{H}^0(U)$ par l'homomorphisme induit par l'inclusion de U dans X.

Si X est un espace localement compact et G un groupe abélien, nous noterons $H_p^\infty(X, G)$ le groupe d'homologie de dimension p introduit au chapitre 4 de [5]. Quand G est le groupe Z des entiers, nous écrirons simplement $H_p^\infty(X)$. Rappelons que, si U est un ouvert de X, il y a un homomorphisme naturel $\varrho\colon H_p^\infty(X; G) \to H_p^\infty(U, G)$.

Si A est une variété de dimension n, le faisceau d'orientation $\mathcal{O}_A$ de A est le faisceau associé au préfaisceau $U \rightsquigarrow H_n^\infty(U)$ (avec les homomorphismes de restriction ϱ mentionnés ci-dessus).

2. Un faisceau. Dans cette section, X désigne un espace métrique, et A un sous-ensemble localement fermé de X vérifiant en outre les deux conditions suivantes

(H1) A est connexe et localement connexe et a dans X un voisinage localement connexe

(H2) Tout point x de A a dans X des voisinages ouverts connexes arbitrairement petits P tels que $P \setminus A$ ait exactement deux composantes, la fermeture de chacune d'elles contenant $P \cap A$.

Un voisinage ouvert P d'un point x de A satisfaisant l'hypothèse (H2) sera appelé un voisinage distingué de x, et les deux composantes de $P \setminus A$ seront alors notées P^+ et P^-.

Les deux exemples les plus classiques de couples (X, A) vérifiant ces deux conditions sont les suivants:

EXEMPLE 1. X est une variété de dimension $n+1$ et A une variété de dimension n (pas nécessairement fermée dans X ni localement plate).

EXEMPLE 2. A est connexe et localement connexe et a en tout point un double collier local dans X, i.e., pour tout a dans A, il existe un voisinage ouvert U de a dans A et un homéomorphisme h de $U \times [-1, 1]$ sur un voisinage de a dans X tel que $h(x, 0) = x$ pour tout x dans U. (Si $U = A$, nous dirons que A a un double collier dans X.)

LEMME 1. *Si U est un sous-ensemble connexe de A ouvert dans A, et W un ouvert de X contenant U, il existe un ouvert connexe M de X vérifiant*

(i) $M \cap A = U$,
(ii) $M \subset W$,
(iii) *$M \setminus A$ a au plus deux composantes.*

Démonstration. Pour tout x dans U, (H2) permet de trouver un voisinage distingué $P(x)$ de x contenu dans W et tel que $P(x) \cap A \subset U$; soient $P^+(x)$ et $P^-(x)$ les composantes de $P(x) \setminus A$. L'ensemble $M = \bigcup_{x \in U} P(x)$ vérifie évidemment (i) et (ii). Soient x, x' deux points de U tels que $P(x) \cap P(x') \cap A \neq \emptyset$, soit y un point de $P(x) \cap P(x') \cap A$, et soit Q un voisinage distingué de y contenu dans $P(x) \cap P(x')$. Puisque $y \in \overline{P^+(x)}$, $Q \cap P^+(x) \neq \emptyset$, et l'une des composantes Q^+, Q^- de $Q \setminus A$, soit Q^+, rencontre $P^+(x)$, donc est contenue dedans. De même, $P^-(x)$ contient un des deux ensembles Q^+ et Q^-; puisque $P^-(x) \cap P^+(x) = \emptyset$, $P^-(x)$ contient Q^-. Par le même raisonnement, Q^+ est contenu dans une composante $P^\pm(x')$ de $P(x') \setminus A$, et Q^- dans l'autre $P^\mp(x')$. Alors, $\big(P(x) \cup P(x')\big) \setminus A$ est réunion des deux ouverts connexes $P^+(x) \cup P^\pm(x')$ et $P^-(x) \cup P^\mp(x')$. Par récurrence, si $x_1, \ldots, x_n$ sont des points de U tels que $P(x_i) \cap P(x_{i+1}) \cap A \neq \emptyset$ pour $1 \leqslant i < n$, alors $\big(P(x_1) \cup \ldots \cup P(x_n)\big) \setminus A$ a au plus deux composantes connexes. La connexité de U entraîne alors que M vérifie (iii).

Nous dirons que A a deux côtés dans X s'il possède un voisinage connexe P dans X tel que $P \setminus A$ ait deux composantes. Dans le cas contraire, nous dirons que A

n'a qu'un côté dans X; alors, pour tout voisinage connexe P de A dans X, $P\setminus A$ est connexe.

Si U est un sous-ensemble de A ouvert dans A, nous noterons $\mathcal{M}(U)$ l'ensemble des ouverts M de X vérifiant

(1) $M\cap A = U$,
(2) $M\cap A$ est fermé dans M.

Puisque A est localement fermé dans X, $\mathcal{M}(U)\neq\emptyset$. Ordonné par inclusion, $\mathcal{M}(U)$ est filtrant. Par suite, les groupes $\tilde{H}^0(M\setminus A)$, $M\in\mathcal{M}(U)$, avec les applications de restriction $\tilde{H}^0(M\setminus A)\to\tilde{H}^0(M'\setminus A)$ $(M, M'\in\mathcal{M}(U), M\supset M')$ forment un système inductif, dont nous noterons $N(U)$ la limite inductive. Pour M dans $\mathcal{M}(U)$, nous noterons j_U^M l'application naturelle de $\tilde{H}^0(M\setminus A)$ dans $N(U)$.

Soient $V\subset U$ des ouverts de A. Pour $M\in\mathcal{M}(U)$, soit $M' = M\setminus(U\setminus V)$. Puisque $U\setminus V$ est, d'après (1) et (2), fermé dans M, M' est ouvert dans X; $M'\cap A = M\cap A\setminus(U\setminus V) = V$ et $M'\cap A = M'\cap(M\cap A)$ est fermé dans M'. L'ensemble M' appartient donc à $\mathcal{M}(V)$. Les applications de restriction de $\tilde{H}^0(M\setminus A)$ dans $\tilde{H}^0(M'\setminus A)$ déterminent alors un morphisme du système inductif définissant $N(U)$ dans celui définissant $N(V)$. Nous noterons sa limite inductive $r_V^U\colon N(U)\to N(V)$.

Nous obtenons ainsi un préfaisceau N sur A. Nous noterons $\tilde{N}$ le faisceau associé. Pour tout ouvert U de A, nous noterons $\tilde{N}(U)$ l'ensemble des sections continues de $\tilde{N}$ au-dessus de U, et θ_U, ou simplement θ, l'application naturelle de $N(U)$ dans $\tilde{N}(U)$. La fibre de $\tilde{N}$ en un point x de A sera notée $\tilde{N}_x$, et la valeur d'une section $s\in\tilde{N}(U)$ en un point x sera notée s_x.

Lemme 2. *$\tilde{N}$ est un faisceau localement constant de fibre* $\mathbf{Z}$.

Démonstration. Il suffit de montrer que, pour tout point x de A, il existe un voisinage ouvert connexe U de x dans A vérifiant

(i) $N(U)\cong\mathbf{Z}$,
(ii) Pour tout y dans U, l'application $s\rightsquigarrow(\theta_U(s))_y$ de $N(U)$ dans $\tilde{N}_y$ est un isomorphisme.

Soit P un voisinage distingué de x dans X. Soit U un voisinage ouvert connexe de x dans A contenu dans $P\cap A$. Soit $\mathcal{M}'(U)$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}(U)$ formé des ouverts M contenus dans P et tels que $M\setminus A$ ait au plus deux composantes. D'après le lemme 1, $\mathcal{M}'(U)$ est cofinal dans $\mathcal{M}(U)$. Pour M dans $\mathcal{M}'(U)$, $M\setminus A$ est réunion des ensembles disjoint $M\cap P^+$ et $M\cap P^-$. Puisque x est adhérent à P^+ et à P^-, ces deux ensembles sont non vides; ce sont donc les composantes de $M\setminus A$. Par suite, $\tilde{H}^0(M\setminus A)\cong\mathbf{Z}$ et, si $M_1\subset M_2$ sont deux ensembles de $\mathcal{M}'(U)$, l'application de restriction de $\tilde{H}^0(M_2\setminus A)$ dans $\tilde{H}^0(M_1\setminus A)$ est un isomorphisme. Il en résulte que $N(U)\cong\mathbf{Z}$ et que, pour tout M dans $\mathcal{M}'(U)$, $j_U^M\colon\tilde{H}^0(M\setminus A)\to N(U)$ est un isomorphisme.

De même, si V est un ouvert connexe non vide de A contenu dans U, et si $\mathcal{M}'(V)$ est l'ensemble des éléments M' de $\mathcal{M}(V)$ contenus dans P et tels que $M'\setminus A$ ait au plus deux composantes, alors $N(V)\cong\mathbf{Z}$ et $j_V^{M'}\colon\tilde{H}^0(M'\setminus A)\to N(V)$ est isomorphisme. Mais, si $M\in\mathcal{M}'(U)$, alors $M' = M\setminus(U\setminus V)$ vérifie $M'\setminus A = M\setminus A$, d'où il résulte que M' appartient à $\mathcal{M}'(V)$ et que l'application $\tilde{H}^0(M\setminus A)\to\tilde{H}^0(M'\setminus A)$ est l'identité. Ceci entraîne que $r_V^U\colon N(U)\to N(V)$ est un isomorphisme pour tout ouvert connexe V de A contenu dans U. La connexité locale de A entraîne alors que U vérifie (ii), d'où le lemme.

Rappelons quelques faits connus. Un faisceau $\tilde{N}$ localement trivial de fibre $\mathbf{Z}$, regardé comme espace étalé dans A est un revêtement. Si $\tilde{N}_1$ est le sous-ensemble de $\tilde{N}$ qui est la réunion des générateurs des fibres $\tilde{N}_x$, $x\in A$, alors $\tilde{N}_1$ est un revêtement à deux feuillets de A. Si U est un ouvert connexe de A, alors $\tilde{N}(U)\neq 0$ si, et seulement si, la restriction de $\tilde{N}_1$ à U est le revêtement trivial de U; dans ce cas, $\tilde{N}(U)\cong\mathbf{Z}$ et, si s est un générateur de $\tilde{N}(U)$, alors s_x est un générateur de $\tilde{N}_x$ pour tout x dans A.

Théorème 1. *Pour tout ouvert U de A, l'application $\theta_u\colon N(U)\to\tilde{N}(U)$ est surjective.*

Démonstration. Nous allons montrer que, pour tout $s\in\tilde{N}(U)$, il existe $M\in\mathcal{M}(U)$ et $t\in\tilde{H}^0(M\setminus A)$ tels que $\theta_u\circ j_u^M(t) = s$. Il suffit de le faire quand U est connexe. En effet, soient $(U_i)_{i\in I}$ les composantes connexes de U, et soit $s_i = s|U_i$, $i\in I$. Puisque X est métrisable et les U_i ouverts dans A, nous pouvons trouver des ouverts deux à deux disjoints de X, $(V_i)_{i\in I}$, tels que $V_i\cap A = U_i$ pour tout $i\in I$. Supposons que, pour tout i dans I, il existe $L_i\in\mathcal{M}(U_i)$ et $t_i\in\tilde{H}^0(L_i\setminus A)$ tels que $\theta_{u_i}\circ j_{u_i}^{L_i}(t_i) = s_i$. Soit M un élément de $\mathcal{M}(U)$ contenu dans $\bigcup_{i\in I}(L_i\cap V_i)$. Alors M est la réunion disjointe des ouverts $M_i = M\cap(L_i\cap V_i)$, donc l'application naturelle $\tilde{H}^0(M\setminus A)\to\prod_{i\in I}\tilde{H}^0(M_i\setminus A)$ est surjective; si $t\in\tilde{H}^0(M\setminus A)$ est tel que $t|M_i\setminus A = t_i|M_i\setminus A$ pour tout i, alors

$$\theta_u\circ j_u^M(t)|U_i = \theta_{u_i}\circ r_{u_i}^u\circ j_u^M(t) = \theta_{u_i}\circ j_{u_i}^{M_i}(t_i|M_i\setminus A) = s_i \quad \text{pour tout } i\in I,$$

d'où $\theta_u\circ j_u^M(t) = s$.

Supposons donc U connexe. Si $s = 0$, l'existence de M et t est évidente; sinon, d'après les remarques précédant le théorème, $\tilde{N}(U)\cong\mathbf{Z}$, et nous pouvons supposer que s est un générateur de $\tilde{N}(U)$. La démonstration du lemme 2 montre que, pour tout x dans U, il existe un voisinage connexe U_x de x dans A et un élément M_x de $\mathcal{M}(U_x)$ tels que $M_x\setminus A$ ait deux composantes M_x^+ et M_x^-, et que $j_{u_x}^{M_x}\colon\tilde{H}^0(M_x\setminus A)\to N(U_x)$ et $\theta_{u_x}\colon N(U_x)\to\tilde{N}(U_x)$ soient des isomorphismes. Soit

$$t_x = (j_{u_x}^{M_x})^{-1}\circ\theta_{u_x}^{-1}(s|U_x)\,;$$

c'est un générateur de $\tilde{H}^0(M_x\setminus A)\cong\mathbf{Z}$. Nous pouvons identifier $\tilde{H}^0(M_x\setminus A)$ au groupe des fonctions localement constantes de $M_x\setminus A$ dans $\mathbf{Z}$ modulo le sous-groupe des fonctions constantes. L'élément de $\tilde{H}^0(M_x\setminus A)$ représenté par la fonction φ_x qui vaut 1 sur M_x^+ et 0 sur M_x^- est un générateur de $\tilde{H}^0(M_x \setminus A)$; nous supposerons les notations choisies de façon que ce générateur soit t_x.

Alors, si W est un ouvert connexe de A contenu dans U_x et L un élément de $\mathscr{M}(W)$ contenu dans M_x tel que $L \setminus A$ ait deux composantes, la démonstration du lemme 2 montre que ces deux composantes sont $L^+ = L \cap M_x^+$ et $L^- = L \cap M_x^-$. La fonction ψ de $L \setminus A$ dans $\mathbf{Z}$ qui vaut 1 sur L^+ et 0 sur L^- est la restriction de φ_x, donc l'élément u de $\tilde{H}^0(L \setminus A)$ qu'elle représente est $t_x|L \setminus A$. Par suite, $\theta_w \circ j_w^L(u) = \theta_{u_x} \circ j_{u_x}^{M_x}(t_x)|W$. Si $U_{x'}$ contient aussi L, nous avons encore $L \setminus A = (L \cap U_{x'}^+) \cup \cup (L \cap U_{x'}^-)$ et nous pouvons définir une fonction ψ' analogue à ψ représentant u' tel que $\theta_w \circ j_w^L(u') = \theta_{u_{x'}} \circ j_{u_{x'}}^{M_{x'}}(t_{x'})|W = \theta_{u_x} \circ j_{u_x}^{M_x}(t_x)|W$. Puisque $\theta_w \circ j_w^L$ est un isomorphisme d'après la démonstration du lemme 2, ψ et ψ' représentent le même élément, d'où $L^+ = L \cap U_{x'}^+$ et $L^- = L \cap U_{x'}^-$.

Puisque X est métrisable, nous pouvons trouver une famille $\mathscr{V}$ d'ouverts de X recouvrant $\bigcup_{x \in A} M_x$ et telle que, si V et V' sont deux élements de $\mathscr{V}$ qui se rencontrent, il existe $x \in A$ tel que M_x contienne $V \cup V'$. Soit $\{W_\beta / \beta \in B\}$ une famille de sous-ensembles ouverts connexes de A recouvrant U telle que, pour tout β dans B, il existe un élément V_β de $\mathscr{V}$ contenant W_β. Le raisonnement du lemme 2 permet de trouver un $L_\beta \in \mathscr{M}(W_\beta)$, contenu dans V_β, donc aussi dans un élément de $\{M_x / x \in A\}$, et tel que $L_\beta \setminus A$ ait deux composantes connexes L_β^+ et L_β^-. D'après ce qui précède, nous pouvons supposer les notations choisies de façon que, pour tout x dans A tel que M_x contienne L_β, $L_\beta^+ = L_\beta \cap U_x^+$ et $L_\beta^- = L_\beta \cap U_x^-$.

Soit $M = \bigcup_\beta L_\beta$; c'est un ouvert de X contenu dans $\bigcup_{x \in A} M_x$ et tel que $M \cap A = U$; si U est fermé dans $\bigcup_{x \in A} M_x$ (ce que l'on peut obtenir en prenant les M_x contenus dans un élément fixé de $\mathscr{M}(U)$), alors M appartient à $\mathscr{M}(U)$. En outre, $M \setminus A = M^+ \cup M^-$ où $M^+ = \bigcup_\beta L_\beta^+$ et $M^- = \bigcup_\beta L_\beta^-$. Les ensembles M^+ et M^- sont disjoints car sinon il existerait β_1 et β_2 tels que $\emptyset \neq L_{\beta_1}^+ \cap L_{\beta_2}^- \subset V_{\beta_1} \cap V_{\beta_2}$; il y aurait donc un x dans A tel que M_x contienne $V_{\beta_1} \cup V_{\beta_2}$, d'où $L_{\beta_1}^+ = L_{\beta_1} \cap M_x^+$ et $L_{\beta_2}^- = L_{\beta_2} \cap M_x^-$, contrairement au fait que les ensembles M_x^+ et M_x^- sont disjoints. Par suite, la fonction φ égale à 1 sur M^+ et à 0 sur M^- représente un élément t de $\tilde{H}^0(M \setminus A)$. Pour tout β dans B et tout x tel que M_x contienne L_β, il résulte de ce qui précède que $\varphi|(L_\beta \setminus A) = \varphi_x|(L_\beta \setminus A)$, donc que $\varphi|(L_\beta \setminus A)$ représente $t_x|L_\beta \setminus A$, d'où

$$\theta_u \circ j_u^M(t)|W_\beta = \theta_{W_\beta} \circ j_{u_\beta}^{L_\beta}(t_x|L_\beta \setminus A) = s_x|W_\beta .$$

Ceci étant vrai pour tout β dans B, $\theta_u \circ j_u^M(t) = s$.

COROLLAIRE 1.1. *A a deux cotés si, et seulement si, $\tilde{N}(A) \neq 0$.*

Démonstration. Que A ait deux côtés quand $\tilde{N}(A) \neq 0$ est implicite dans la démonstration précédente. La réciproque découle de la démonstration du lemme 2.

D'après les remarques précédant le théorème, si $\tilde{N}(A) = 0$, alors $\tilde{N}_1$ est un revêtement non trivial à deux feuillets de A, d'où le

COROLLAIRE 1.2. *Si A n'a pas de revêtement non trivial à deux feuillets, il a deux côtés dans X.*

Notons le cas particulier suivant du corollaire 1.2, qui généralise le résultat de Rushing cité dans l'introduction.

COROLLAIRE 1.3. *Soit A un sous-ensemble connexe et localement connexe d'un espace métrique X ayant en tout point un double collier local dans X. Si A n'admet pas de revêtement non trivial à deux feuillets, alors A a un double collier dans X.*

Démonstration. D'après le corollaire 1.2, il existe un ouvert P contenant A tel que $P \setminus A$ ait exactement deux composantes P^+ et P^-. Alors, A a en tout point un collier local dans $P^+ \cup A$ (resp. $P^- \cup A$) donc, d'après un théorème de M. Brown [2], a un collier dans $P^+ \cup A$ (resp. $P^- \cup A$). Le corollaire en résulte immédiatement.

3. Le cas des variétés. Dans cette section, nous supposerons que X est une variété de dimension $n+1$ et A une variété connexe de dimension n, pas nécessairement fermée ni localement plate dans X. Nous commencerons par étudier les relations entre le faisceau $\tilde{N}$ et les faisceaux d'orientation $\mathcal{O}_A$ et $\mathcal{O}_X$ de A et de X respectivement.

Nour aurons besoin de la forme suivante de la dualité de Poincaré (voir [5], pages 361–363): Soient M une n-variété orientable, et U un ouvert de M. Toute classe fondamentale $\mu \in H_n^\infty(M)$ définit un isomorphisme

$$D_\mu \colon H^q(M, U) \to H_{n-q}^\infty(M \setminus U) .$$

Le remplacement de μ par $-\mu$ change D_μ en $-D_\mu$. De plus, si M_1 est un ouvert de M, $U_1 = M_1 \cap U$ et μ_1 la restriction de μ à M_1, le diagramme suivant, où les applications horizontales sont induites par des inclusions, commute,

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} H^q(M, U) & \longrightarrow & H^q(M_1, U_1) \\ \downarrow{\scriptstyle D_\mu} & & \downarrow{\scriptstyle D_{\mu_1}} \\ H_{n-q}^\infty(M \setminus U) & \longrightarrow & H_{n-q}^\infty(M_1 \setminus U_1) . \end{array}$$

(Cette propriété n'est pas énoncée explicitement dans [5], mais sa vérification est immédiate.)

THÉORÈME 2. *Les faisceaux $\tilde{N} \otimes (\mathcal{O}_X|A)$ et $\mathcal{O}_A$ sont isomorphes.*

Démonstration. Soit $\mathscr{U}$ l'ensemble des ouverts U de A vérifiant les conditions suivantes

(i) U est connexe et orientable,
(ii) $\tilde{N}(U) \neq 0$,
(iii) U est contenu dans un ouvert orientable de X.

Il est immédiat que $\mathscr{U}$ est une base de la topologie de A. Par suite, pour construire un isomorphisme de $\tilde{N} \otimes (\mathcal{O}_X|A)$ sur $\mathcal{O}_A$, il suffit de construire, pour tout U dans $\mathscr{U}$, un isomorphisme $\alpha_u\colon \tilde{N}(U)\otimes(\mathcal{O}_X|A)(U)\to\mathcal{O}_A(U)$ de façon que, si $U'\subset U$ sont deux éléments de $\mathcal{U}$, le diagramme suivant commute

$$(**)\qquad \begin{array}{ccc} \tilde{N}(U)\otimes(\mathcal{O}_X|A)(U) & \xrightarrow{\alpha_u} & \mathcal{O}_A(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{N}(U')\otimes(\mathcal{O}_X|A)(U') & \xrightarrow{\alpha_{u'}} & \mathcal{O}_A(U'). \end{array}$$

Pour U dans $\mathcal{U}$, soit $\mathcal{M}_0(U)$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}(U)$ formé des ouverts M connexes vérifiant

(iv) $M\setminus A$ a exactement deux composantes,

(v) M est orientable.

Compte tenu de (ii) et (iii), il résulte de la démonstration du théorème 1 que $\mathcal{M}_0(U)$ est cofinal dans $\mathcal{M}(U)$. Soit $M\in\mathcal{M}_0(U)$. Il résulte de la démonstration du lemme 2 que $\theta_u\circ j_u^M$ est un isomorphisme de $\tilde{H}_0(M\setminus A)$ sur $\tilde{N}(U)$. Puisque U est connexe et orientable, $H_n^\infty(U)$ est isomorphe à $\mathcal{O}_A(U)$. Puisque M est orientable, $\mathcal{O}_X|M$ est trivial, donc, $U=M\cap A$ étant connexe, $(\mathcal{O}_X|A)(U)\cong H_{n+1}^\infty(M)\cong \mathbf{Z}$; si μ est un générateur de $H_{n+1}^\infty(M)$, le générateur de $(\mathcal{O}_X|A)(U)$ qui lui correspond est la restriction à U de la section de $\mathcal{O}_X$ au-dessus de M correspondant à μ. Soit $\mu\in H_{n+1}^\infty(M)\cong\mathbf{Z}$ un générateur. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0\to \tilde{H}^0(M\setminus A) & \xrightarrow{\delta} & H^1(M, M\setminus A) & \to & H^1(M) \\ & & \downarrow{\scriptstyle D_\mu} & & \\ & & H_n^\infty(U) & & \end{array}$$

dans lequel la suite du haut est une portion de la suite exacte de cohomologie du couple $(M, M\setminus A)$, et D_μ est l'isomorphisme de dualité de Poincaré. Puisque $H^1(M, M\setminus A)\cong H_n^\infty(U)\cong\mathbf{Z}\cong\tilde{H}^0(M\setminus A)$, et que $H^1(M)$ est sans torsion (ce groupe est isomorphe au groupe de cohomologie singulière de dimension un de M, qui est sans torsion d'après le théorème des coefficients universels), δ est un isomorphisme. Par conséquent, $\beta_\mu=D_\mu\circ\delta$ est un isomorphisme. Le remplacement de μ par l'autre générateur $-\mu$ de $H_{n+1}^\infty(M)$ change le signe de D_μ, donc celui de β_μ. Nous obtenons ainsi un isomorphisme

$$\beta_u\colon \tilde{H}_0(M\setminus A)\otimes H_{n+1}^\infty(M)\to H_n^\infty(U)..$$

Si nous identifions, comme indiqué plus haut, les groupes $\tilde{H}^0(M\setminus A)$, $H_{n+1}^\infty(M)$ et $H_n^\infty(U)$ à $\tilde{N}(U)$, $(\mathcal{O}_X|A)(U)$ et $\mathcal{O}_A(U)$ respectivement, il lui correspond un isomorphisme

$$\alpha_u\colon \tilde{N}(U)\otimes(\mathcal{O}_X|A)(U)\to\mathcal{O}_A(U).$$

Si $U'\subset U$ sont deux éléments de $\mathcal{U}$, si M' est un élément de $\mathcal{M}_0(U')$ contenu dans M, et si $\mu'\in H_{n+1}^\infty(M')$ est la restriction de $\mu\in H_{n+1}^\infty(M)$, la commutativité

du diagramme $(*)$ entraîne celle du diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{H}^0(M\setminus A) & \xrightarrow{\delta} & H^1(M, M\setminus A) & \xrightarrow{D_\mu} & H_n^\infty(U) \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ \tilde{H}^0(M'\setminus A) & \xrightarrow{\delta} & H^1(M', M'\setminus A) & \xrightarrow{D_\mu} & H_n^\infty(U'). \end{array}$$

Il en résulte immédiatement que α_u ne dépend pas du choix de M et que le diagramme $(**)$ commute, d'où le théorème.

Pour exploiter le théorème précédent, nous avons besoin d'une observation élémentaire.

Lemme 3. *Soient X espace connexe, P et Q deux faisceaux localement triviaux de fibre $\mathbf{Z}$ sur X, et R le faisceau produit tensoriel $P\otimes Q$. Si deux des faisceaux P, Q, R admettent une section non triviale sur X, il en est de même du troisième.*

Démonstration. Soient P_x, Q_x, R_x les fibres des faisceaux P, Q, R en un point x de X. Alors $R_x\cong P_x\otimes Q_x\cong\mathbf{Z}$. Si une section d'un des faisceaux P, Q, R sur X n'est pas triviale, elle ne s'annule en aucun point, donc il est clair que si P et Q ont des sections non triviales sur X, alors R aussi. Si P et R ont des sections non triviales s et t, ils en admettent telles que, pour tout x, s_x et t_x engendrent P_x et R_x respectivement. Il est facile de vérifier que l'on définit une section continue u de Q en prenant pour tout x le générateur u_x de Q_x tel que $s_x\otimes u_x=t_x$.

A étant connexe, le faisceau $\mathcal{O}_A$ a une section non triviale si, et seulement si, A est orientable; $\tilde{N}$ en a une si, et seulement si, A a deux côtés dans X. Enfin, l'existence d'une section non triviale de $\mathcal{O}_X|A$ équivaut à celle d'une section non triviale de $\mathcal{O}_X$ au-dessus de A; celle-ci peut s'étendre à un voisinage de A dans X (voir [4], II. 3.3.1), donc ceci équivaut à l'existence d'un voisinage orientable de A dans X. Le théorème 2 et le lemme 3 entraînent donc le

Corollaire 2.1. *Supposons A orientable. Alors, A a deux côtés dans X si, et seulement si, elle admet un voisinage orientable dans X.*

Si x_0 est un point d'une variété M, nous noterons $\omega(M, x_0)$ le sous-groupe de $\pi_1(M, x_0)$ formé des éléments conservant l'orientation. Rappelons qu'un élément de $\pi_1(M, x_0)$ représenté par un lacet $\omega\colon I\to M$ basé en x_0 conserve l'orientation si, et seulement si, ω se relève en un chemin fermé non trivial (i.e. ne s'annulant pas) dans $\mathcal{O}_M$.

Fixons un point x_0 de A et notons i l'inclusion de A dans X et $i_*\colon \pi_1(A, x_0)\to\to\pi_1(X, x_0)$ l'homomorphisme induit. Remarquons que, A étant un rétracte absolu de voisinage, il existe un voisinage ouvert N de A dans X et une déformation $h\colon N\times I\to X$ telle que (i) $h(x, 0)=x$ pour tout x dans N, (ii) $h(x, 1)\in A$ pour tout x dans N, et (iii) $h(a, t)=a$ pour tout $t\in I$ si $a\in A$. Alors, $\pi_1(N, x_0)$ et $\pi_1(A, x_0)$ ont la même image dans $\pi_1(X, x_0)$, et il en résulte que A a un voisinage orientable si, et seulement si, $i_*\pi_1(A, x_0)\subset\omega(M, x_0)$.

COROLLAIRE 2.2. *A a deux côtés dans X si, et seulement si,* $\omega(A, x_0) = i_*^{-1}(\omega(X, x_0))$.

Démonstration. Le corollaire 2.1 et les remarques qui précèdent traitent le cas où A est orientable.

Supposons A non orientable. Le théorème 2 et l'argument utilisé dans la démonstration du lemme 3 montrent que si un lacet ω dans A a des relèvements fermés non triviaux dans deux des faisceaux $\mathcal{O}_A$, $\mathcal{O}_X|A$ et $\tilde{N}$, il en a également un dans le troisième.

Supposons que A ait deux côtés. D'après la section 2, tout lacet ω dans A a un relèvement fermé non trivial dans $\tilde{N}$. Par suite, il admet un relèvement fermé non trivial dans $\mathcal{O}_A$, i.e. conserve l'orientation dans A si, et seulement si, il en a un dans $\mathcal{O}_X$, i.e. conserve l''orientation dans X, d'où l'égalité $\omega(A, x_0) = i_*^{-1}(\omega(X, x_0))$.

Inversement, supposons que $\omega(A, x_0) = i_*^{-1}(\omega(X, x_0))$. D'après la section 2, A a deux côtés si, et seulement si, le revêtement $\tilde{N}$ est trivial, ce qui, par un argument élémentaire de théorie des revêtements, équivaut à prouver que tout lacet ω dans A a un relèvement fermé non trivial dans $\tilde{N}$. Si ω conserve l'orientation de A, donc aussi celle de X, il a des relèvements fermés non triviaux dans $\mathcal{O}_A$ et dans $\mathcal{O}_X$, donc aussi dans $\tilde{N}$. Si ω renverse l'orientation de A, donc aussi celle de X, soient ω_1 et ω_2 des relèvements continus de ω dans $\mathcal{O}_A$ et $\mathcal{O}_X$ respectivement tels que, pour tout $t \in I$, $\omega_1(t)$ (resp. $\omega_2(t)$) soit un générateur de la fibre de $\mathcal{O}_A$ (resp. $\mathcal{O}_X$) au-dessus de $\omega(t)$. Soit $\omega_3(t)$ le générateur de $\tilde{N}_{\omega(t)}$ tel que $\omega_3(t) \otimes \omega_2(t) = \omega_1(t)$. Il est facile de vérifier que ω_3 est un relèvement continu de ω dans $\tilde{N}$. Puisque ω renverse l'orientation de A et de X, $\omega_2(1) = -\omega_2(0)$ et $\omega_1(1) = -\omega_1(0)$, d'où $\omega_3(1) = \omega_3(0)$, donc ω_3 est un relèvement fermé non trivial de ω.

PROPOSITION 1. *Soient X une $(n+1)$-variété, A une n-variété connexe, f et g deux plongements homotopes de A dans X. Si $f(A)$ a deux côtés dans X, $g(A)$ aussi.*

Démonstration. Soit $h\colon A\times I \to X$ une homotopie entre f et g. Soient x_0 un point de A, $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = g(x_0)$ et $f_*\colon \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, y_0)$, $g_*\colon \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, y_1)$ les homomorphismes induits. Soit $\alpha\colon I \to X$ le chemin défini par $\alpha(t) = h(x_0, t)$; on définit alors un isomorphisme $\alpha_\#\colon \pi_1(X, y_0) \to \pi_1(X, y_1)$ par $\alpha_\#([\omega]) = [\alpha^{-1}\omega\,\alpha]$. Il est connu que $\alpha_\#(\omega(X, y_0)) = \omega(X, y_1)$ et que $\alpha_\# \circ f_* = g_*$. Par suite, $\omega(A, x_0) = f_*^{-1}(\omega(X, y_0))$ entraîne $\omega(A, x_0) = g_*^{-1}(\omega(X, y_1))$, d'où le résultat d'après le corollaire 2.2.

4. Application au compactifié de Freudenthal. Par une compactification d'un espace Y, nous entendons un espace compact $\hat{Y}$ contenant Y comme sous-ensemble partout dense. Si Y est un espace localement compact, connexe et localement connexe, il admet une compactification Y^* vérifiant (i) Y^* est localement connexe, (ii) $Y^*\setminus Y$ est totalement discontinu, et (iii) pour tout ouvert connexe U de Y^*, $U\cap Y$ est connexe. L'espace Y^*, qui est caractérisé à un homéomorphisme près par les propriétés (i)–(iii) est appelé le compactifié de Freudenthal de Y (voir, par exemple, [6]).

PROPOSITION 2. *Soit Q une variété ouverte connexe de dimension n. Si le compactifié de Freudenthal Q^* de Q peut être plongé dans une variété de dimension $n+1$, alors Q contient un compact K tel que $Q\setminus K$ soit orientable.*

Démonstration. Supposons que Q^* soit plongé dans la variété X de dimension $n+1$. Montrons que le couple (X, Q^*) vérifie les hypothèses (H.1) et (H.2) de la section 2. C'est clair pour (H.1). Pour vérifier (H.2), remarquons d'abord que tout ouvert connexe U de Q^* vérifie les deux conditions suivantes

(1) $H_n^\infty(U; Z_2) \cong Z_2$

(2) Si F est un sous-ensemble propre de U fermé dans U, alors $H_n^\infty(F; Z_2) = 0$.

En effet, puisque $Q^*\setminus Q$ est un compact de dimension zéro, la propriété (1) résulte de l'exactitude de la suite

$$0 = H_n^\infty(U\setminus Q; Z_2) \to H_n^\infty(U; Z_2) \to H_n^\infty(U\cap Q; Z_2) \to H_{n-1}^\infty(U\setminus Q; Z_2) = 0$$

et du fait que $H_n^\infty(U\cap Q; Z_2) \cong Z_2$ puisque $U\cap Q$ est un ouvert connexe de la n-variété Q.

La propriété (2) résulte de même de l'exactitude de la suite

$$0 = H_n^\infty(F\setminus Q; Z_2) \to H_n^\infty(F; Z_2) \to H_n^\infty(F\cap Q; Z_2) \to H_{n-1}^\infty(F\setminus Q; Z_2) = 0$$

et du fait que $H_n^\infty(F\cap Q; Z_2) = 0$ puisque $F\cap Q$ est un sous-ensemble fermé propre de la n-variété connexe $U\cap Q$.

Soit alors B un ouvert de X homéomorphe à R^{n+1}. La dualité d'Alexander ([5], corol. 11.17, p. 364) et les propriétés (1) et (2) entraînent que, si U est une composante connexe de $B\cap Q^*$, alors $B\setminus U$ a deux composantes dont U est la frontière commune. La condition (H.2) en résulte facilement.

Nous pouvons donc définir le faisceau $\tilde{N}$ pour le couple (X, Q^*). Chaque point x de Q^* est contenu dans un ouvert O_x qui est orientable et tel que la restriction de $\tilde{N}$ à O_x soit triviale. Puisque $Q^*\setminus Q$ est un compact de dimension zéro, nous pouvons donc trouver un nombre fini d'ouverts deux à deux disjoints $O_1, \ldots, O_m$ de X recouvrant $Q^*\setminus Q$ et vérifiant

(3) O_i est orientable, $i = 1, \ldots, m$,

(4) La restriction de $\tilde{N}$ à $U_i = O_i\cap Q^*$ est triviale, $i = 1, \ldots, m$.

L'ensemble $U = U_1\cup\ldots\cup U_m$ est un ouvert de Q^* contenant $Q^*\setminus Q$, contenu dans l'ouvert orientable $O = O_1\cup\ldots\cup O_m$ et tel que la restriction de $\tilde{N}$ à U soit triviale. Soit $K = Q^*\setminus U$; c'est un compact de Q. Appliquons le théorème 2 à chaque composante connexe V de $Q\setminus K$. Puisque $\tilde{N}|V$ est trivial et que V est contenue dans l'ouvert orientable O de X, il entraîne que chaque telle composante V est orientable, d'où le théorème.

5. Approximations dans $X\setminus A$. Revenons au cas général de la section 2 où X est un espace métrisable et A un sous-espace localement fermé vérifiant les conditions

(H.1) et (H.2). Soit d une distance admissible sur X. Nous dirons qu'une suite de fonctions (f_p) d'un espace topologique Y dans X converge localement uniformément vers une fonction f si tout point de Y a un voisinage V tel que la suite (f_p) converge uniformément vers f sur V (pour la distance d). Si Y est localement compact, cette condition équivaut à la convergence uniforme sur tout compact.

THÉORÈME 3. *Supposons qu'il existe une suite de fonctions continues f_p $A \to X \setminus A$ qui converge localement uniformément vers l'inclusion $i\colon A \to X$. Alors A a deux côtés dans X.*

Démonstration. La convergence uniforme locale de la suite (f_p) vers i entraîne que si P est un voisinage d'un point x de A dans X, il existe entier q et un voisinage V de x dans A tels que $f_p(V) \subset P$ pour tout $p \geqslant q$. Prenons pour P un voisinage distingué (voir section 2) de x. Puisque A est localement connexe, nous pouvons prendre V connexe; alors, pour tout $p \geqslant q, f_p(V)$ est contenu dans l'une des deux composantes P^+ et P^- de $P \setminus A$. Soit B l'ensemble des points x de A vérifiant la condition suivante:

(∗) Il existe un voisinage distingué P_0 de x dans X, un voisinage V_0 de x dans A et un entier q_0 tels que $\bigcup_{p=q_0}^{\infty} f_p(V_0)$ soit contenu dans l'une des deux composantes de $P_0 \setminus A$.

Il résulte de ce qui précède que, quitte à remplacer la suite (f_p) par une sous-suite, nous pouvons supposer l'ensemble B non vide. Montrons qu'alors $B = A$. D'après sa définition, B est évidemment ouvert dans A, et il suffit de montrer qu'il est aussi fermé.

Soit y un point de A adhérent à B. Prenons un voisinage distingué P de y dans X, un voisinage connexe V de y dans A et un entier q tels que $f_p(V) \subset P$ pour $p \geqslant q$. Soit x un point de $V \cap B$, et soient P_0, V_0 et q_0 vérifiant la condition (∗) pour x. Soit P_1 un voisinage distingué de X contenu dans $P \cap P_0$, et soient q_1 un entier $\geqslant q, q_0$ et V_1 un voisinage connexe de x dans A contenu dans V tels que $f_p(V_1) \subset P_1$ pour $p \geqslant q_1$. Le raisonnement du lemme 1 montre que chaque composante de $P \setminus A$ (resp. $P_0 \setminus A$) contient l'une des deux composantes de $P_1 \setminus A$. Appelons P_0^+ la composante de $P_0 \setminus A$ qui contient $\bigcup_{p \geqslant q_0} f_p(V_0)$, P_1^+ la composante de $P_1 \setminus A$ contenue dans P_0^+, et P^+ la composante de $P \setminus A$ contenant P_1^+. Alors, si $p \geqslant q_1$, $f_p(V_1) \subset f_p(V_0) \subset P_0^+$ et, puisque $f_p(V_1)$ est connexe et contenu dans P, nous avons donc $f_p(V_1) \subset P_1^+$. Pour $p \geqslant q_1 \geqslant q$, l'ensemble $f_p(V)$, qui est connexe, contenu dans $P \setminus A$, et qui contient $f_p(V_1) \subset P_1^+ \subset P^+$, est donc nécessairement contenu dans P^+, ce qui montre que x vérifie la condition (∗), donc que B est fermé.

Etant donné un x dans A, soient P_0, V_0 et q_0 vérifiant la condition (∗) pour x, soit P_0^+ la composante de $P_0 \setminus A$ contenant $\bigcup_{p=q_0}^{\infty} f_p(V_0)$, P_0^- l'autre composante de $P_0 \setminus A$, et soit $U_0 = P_0 \cap A$. Soit t l'élément de $\tilde{H}_0(P \setminus A)$ représenté par la fonction qui vaut 1 sur P_0^+ et 0 sur P_0^-. Le raisonnement fait pour prouver que B est fermé montre que la valeur en x de la section $\theta_{u_0}(j_{u_0}^{P_0}(t))$ ne dépend pas des choix de P_0, V_0 et q_0. Puisque $B = A$, nous définissons ainsi une section globale continue non nulle de $\tilde{N}$. D'après le corollaire 1.1, A a donc deux côtés dans X.

Lorsque A a un double collier dans X, il est facile de construire, pour toute distance admissible d sur X, des fonctions continues $f_n\colon A \to X \setminus A$ telles que $d(x, f_n(x)) < \frac{1}{n}$ pour tout x dans A. Nous obtenons donc le

COROLLAIRE 3.1. *Soit A un sous-ensemble connexe et localement connexe d'un espace métrique X ayant en tout point un double collier local dans X. Soit d'une distance admissible sur X. Alors, A a un double collier dans X si, et seulement si, il existe une suite de fonctions continues $f_n\colon A \to X \setminus A$ convergeant (localement) uniformément vers l'inclusion $i\colon A \to X$.*

COROLLAIRE 3.2. *Soit Q une variété non orientable de dimension n. Aucune variété orientable de dimension $n+1$ ne contient une famille indénombrable de copies deux à deux disjointes de Q.*

Démonstration. Supposons au contraire que la variété orientable X de dimension $n+1$ contienne une famille indénombrable $\{Q_i\}_{i \in I}$ de copies deux à deux disjointes de Q. Nous pouvons supposer Q connexe. Pour tout i, fixons un homéomorphisme h_i de Q sur Q_i. L'espace des fonctions continues de Q dans X, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, est métrisable et séparable, donc, I étant indénombrable, nous pouvons trouver des éléments distincts j et i_n, $n \in N$, de I tels que h_{i_n} converge uniformément sur tout compact vers h_j. Alors, $h_{i_n} \circ h_j^{-1}\colon Q_j \to X \setminus Q_j$ converge uniformément sur tout compact vers l'inclusion $i\colon Q_j \to X$. D'après le théorème 3, Q_j a deux côtés dans X, ce qui contredit le corollaire 2.2, puisque X est orientable et pas Q_j.

COROLLAIRE 3.3. *Soit X une variété orientable de dimension $n+1$. Alors X ne contient aucune famille indénombrable $\{Q_i\}_{i \in I}$ de sous-ensembles deux à deux disjoints qui sont des variétés compactes à bord (éventuellement vide) non orientables de dimension n.*

Démonstration. D'après Cheeger et Kister [3], il n'y a, à homéomorphisme près, qu'un ensemble dénombrable de variétés compactes à bord de dimension n. Nous pouvons donc supposer que les Q_i sont toutes homéomorphes à une même variété Q. Si le bord de Q est vide, le corollaire précédent s'applique; s'il n'est pas vide, nous pouvons l'appliquer à la famille $\{\mathring{Q}_i\}$ des intérieurs des variétés Q_i.

6. Généralisation aux immersions. Une fonction $f\colon A \to X$ est appelée une immersion si tout point a de A admet un voisinage V tel que la restriction de f à V soit un homéomorphisme de V sur $f(V)$. Dans le cas particulier où A est une variété de dimension n et X une variété de dimension $n+1$, nous allons associer à f un faisceau $\tilde{N}_f$ généralisant celui construit à la section 2.

Soit alors $\mathscr{U}$ la famille des ouverts U de A tels que la restriction de f à U soit un homéomorphisme de U sur $f(U)$; $\mathscr{U}$ est une base de la topologie de A. Pour U

dans $\mathcal{U}$, soit $\mathcal{M}(U)$ l'ensemble des ouverts M de X tels que $f(U)$ soit fermé dans M. Puisque A est localement compact, $f(U)$ est localement fermé dans X, donc tout ouvert de X contenant $f(U)$ contient un élément de $\mathcal{M}(U)$. Il est clair que $\mathcal{M}(U)$, ordonné par inclusion, est filtrant. Nous noterons $N_f(U)$ la limite inductive des groupes $\check{H}^0(M\setminus f(U))$, où M parcourt $\mathcal{M}(U)$. Si V est un ouvert de A contenu dans un élément U de $\mathcal{U}$, alors V appartient à $\mathcal{U}$, et, pour M dans $\mathcal{M}(U)$,

$$M' = M\setminus(f(U)\setminus f(V))$$

appartient à $\mathcal{M}(V)$. Ceci permet de définir, comme dans la section 2, un homomorphisme de $N_f(U)$ dans $N_f(V)$. Les ensembles $N_f(U)$, $U\in\mathcal{U}$, et les homomorphismes de retriction ainsi définis forment presque un préfaisceau sur A; la seule différence étant que les $N_f(U)$ sont seulement définis pour les ouverts $U\in\mathcal{U}$. Puisque $\mathcal{U}$ est une base de la topologie de A, la construction habituelle du faisceau associé à un préfaisceau peut néanmoins être appliquée pour obtenir un faisceau $\tilde{N}_f$ sur A. Comme à la section 2, il est facile de voir que $\tilde{N}_f$ est localement constant de fibre $\mathbf{Z}$.

Nous avons alors le résultat suivant, qui généralise le théorème 2. Nous en omettrons la démonstration, car c'est une généralisation immédiate de celle du théorème 2.

THÉORÈME 4. *Les faisceaux $\tilde{N}_f\otimes f^*(\mathcal{O}_X)$ et $\mathcal{O}_A$ sont isomorphes.*

Nous allons appliquer ce qui précède aux S-courbes introduites dans [1] par Borsuk. Soit M une surface fermée. Une S-courbe dans M est un continu localement connexe de dimension un A contenu dans M, tel qu'il existe une suite $\{D_i\}$ de disques deux à deux disjoints dans M avec $A = M\setminus\bigcup_{i=1}^{\infty}\mathring{D}_i$. D'après ([1], (7.4)), deux S-courbes dans une même surface M sont homéomorphes; suivant Borsuk, nous noterons A_M l'unique (à homéomorphisme près) S-courbe contenue dans M. Si $\dot{D}_i$ est le bord du disque D_i, la réunion des $\dot{D}_i$ est appelée le bord de A_M, et $A_M\setminus\bigcup_{i=1}^{\infty}\dot{D}_i$ est appelé l'intérieur de A_M; d'après ([1], (8.1) et (8.3)), l'intérieur et le bord de A_M sont caractérisés topologiquement dans A_M.

Borsuk a prouvé ([1], th. (11.1)) que, si M n'est pas orientable, alors A_M n'est pas homéomorphe à un sous-ensemble d'une surface orientable. Nous allons généraliser ce résultat comme suit.

PROPOSITION 3. *Si M n'est pas orientable, il n'existe aucune immersion de A_M dans une surface orientable.*

Démonstration. Supposons au contraire qu'il existe une immersion g de A_M dans la surface orientable X. Soit C une courbe simple fermée contenue dans M et n'ayant qu'un seul côté dans M. D'après ([1], (8.5)), nous pouvons supposer que C est contenue dans l'intérieur de A_M.

A l'inclusion de C dans M est associé, comme à la section 2, un faisceau $\tilde{N}_1$ sur C. Puisque C n'a qu'un côté dans M, le corollaire 1.1 montre que

(1) $\tilde{N}_1(C) = 0$.

La restriction f de g à C est une immersion de C dans X; nous lui associons un faisceau $\tilde{N}_f$ sur C. Puisque X est orientable, $f^*(\mathcal{O}_X)$ a une section non triviale; C étant orientable, le théorème 4 et le lemme 3 entraînent

(2) $\tilde{N}_f(C) \neq 0$.

Notons la propriété suivante de A_M:

(3) Si p est un point de C, tout voisinage V de p dans M contient un disque D vérifiant

(i) p est dans l'intérieur de D,
(ii) $D\cap C$ est un arc qui sépare D en deux composantes,
(iii) le bord de D est disjoint de tous les disques D_i, $i = 1, 2, \ldots$

Pour voir cela, soit $\tilde{M}$ le quotient de M obtenu en identifiant chaque D_i à un point, et soit $\pi\colon M\to\tilde{M}$ la projection naturelle. Alors, $\tilde{M}$ est homéomorphe à M ([1], (3.1)), π/C est un homéomorphisme de C sur $\pi(C)$, et $\pi(D_i)$ est un point d_i de M, $i = 1, 2, \ldots$ Il est alors facile de trouver un disque $\tilde{D}$ contenu dans $\pi(V)$, dont l'intérieur contient $\pi(p)$, dont le bord est disjoint de l'ensemble dénombrable des d_i, et tel que $\tilde{D}\cap\pi(C)$ soit un arc. Il suffit de prendre $D = \pi^{-1}(\tilde{D})$.

Chaque tel disque D possède en outre les deux propriétés suivantes.

(4) Si D est comme dans (3) et Q est une composante de $\mathring{D}\setminus C$, alors $Q\cap A_M$ est connexe.

Ceci se démontre à l'aide du lemme (4.1) de [1] (voir la démonstration de ([1], (8.1)).

(5) Si D est comme dans (3), $D\cap A_M$ est homéomorphe à la S-courbe A_{S^2}, et p est dans l'intérieur de la S-courbe $D\cap A_M$.

En effet, $D\cap A_M$ est un continu localement connexe d'après ([1], (4.1)) et, si nous représentons S^2 comme réunion de D et d'un disque D' tel que $D\cap D' = \dot{D}\cap\dot{D}' = \dot{D}$, alors $S^2\setminus D\cap A_M$ est la réunion de l'intérieur de D' et des intérieurs des D_i qui sont contenus dans A_M; ces disques sont deux à deux disjoints et aucun ne contient p.

Il résulte facilement de (3) et (4) que le couple (A_M, C) vérifie les conditions (H.1) et (H.2) de la section 2. Nous pouvons donc lui associer un faisceau N_2 sur C. En outre, si D est comme dans (3), l'inclusion de $(A_M\cap\mathring{D})\setminus C$ dans $\mathring{D}\setminus C$ induit un isomorphisme de $\check{H}^0(\mathring{D}\setminus C)\cong \mathbf{Z}$ sur $\check{H}^0((A_M\cap\mathring{D})\setminus C)$; il en résulte facilement que les faisceaux $\tilde{N}_1$ et $\tilde{N}_2$ sont isomorphes.

Comparons maintenant les faisceaux $\tilde{N}_2$ et $\tilde{N}_f$. Pour cela, étant donné un point p de C, soit V un voisinage ouvert de p dans A_M tel que $g|V$ soit un homéomorphisme de V sur $g(V)$ et que $V\cap C$ soit un arc ouvert J. Soit E un disque ouvert de X contenant $f(p)$ et tel que $E\cap f(J)$ soit un arc ouvert séparant E en deux composantes E^+ et E^-. Soit D un disque comme dans (3) contenu dans $V\cap g^{-1}(E)$, et soient $\mathring{D}^+$ et $\mathring{D}^-$ les deux composantes de $\mathring{D}\setminus C = \mathring{D}\setminus J$.

(6) Chacun des deux ensembles E^+ et E^- contient exactement l'un des deux ensembles $g(\mathring{D}^+)$ et $g(\mathring{D}^-)$.

En effet, $g(D)$ est une courbe de Sierpiński contenue dans E et $g(p)$ un point de l'intérieur de $g(D)$, d'après l'invariance topologique de l'intérieur. Le raisonnement de ([1], (8.3)) montre alors que $g(p)$ est adhérent à $g(D)\cap E^+$ et à $g(D)\cap E^-$; chacun des ensembles E^+ et E^- rencontre donc $g(\mathring{D}\setminus C)$, d'où (6).

Il résulte de (6) que la restriction de g à $\mathring{D}\setminus C$ induit un isomorphisme de $\tilde{H}^0(E\setminus f(J))\cong \boldsymbol{Z}$ sur $\tilde{H}^0(\mathring{D}\setminus J)$, d'où l'on déduit facilement que les faisceaux $\tilde{N}_f$ et $\tilde{N}_2$ sont isomorphes.

Nous arrivons alors à une contradiction car les faisceaux $\tilde{N}_1$, $\tilde{N}_f$ et $\tilde{N}_2$ sont tous isomorphes, ce qui est impossible, d'après (1) et (2).

References

[1] K. Borsuk, *On embedding curves in surfaces*, Fund. Math. 59 (1966), 73–89.
[2] M. Brown, *Locally flat embeddings of topological manifolds*, Ann. Math., 75, (1962), 331–341.
[3] J. Cheeger and J. M. Kister, *Counting topological manifolds*, Topology 9 (1970), 149–151.
[4] R. Godement, *Théorie des faisceaux*, Hermann, 1964.
[5] W. S. Massey, *Homology and cohomology theory*, Marcel Dekker, 1978.
[6] F. Raymond, *The end point compactification of manifolds*, Pacific J. Math. 10 (1960), 947–963.
[7] T. B. Rushing, *Geometrical arguments concerning two-sided submanifolds, flat submanifolds and pinched bicollars*, Fund. Math. 74 (1972), p. 73–84.

UNIVERSITÉ PARIS VI
INSTITUT DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUEÉS
4 place Jussieu
75252 Paris Cedex 05

Received 21 April 1987