Sur un problème de M. Knaster.

Par

Stefan Mazurkiewicz (Varsovie).

1. M. Knaster a posé le problème suivant: D désignant un ensemble fermé homéomorphe d'un ensemble plan et situé dans l'espace euclidien à 3 dimensions, est-ce que tout point de D est accessible dans cet espace? (*Fund. Math.* VIII, Problème 43, p. 376).

2. Les résultats récents de M. Alexandroff permettent d'obtenir d'une manière très simple la solution affirmative de ce problème et ce la pour un nombre quelconque de dimensions. On arrive ainsi au théorème suivant:

A désignant un ensemble fermé situé dans R_n (espace euclidien à n dimensions completé par le point à l'infini) et homéomorphe d'un sous-ensemble du R_{n-1}, tout point $a \in A$ est accessible dans R_n.

3. Soit $S_n(x, \rho)$ la sphère du R_n de centre x et de rayon ρ, $F_n(x, \rho)$ sa frontière. Désignons par $\phi(A)$ le sous-ensemble du R_{n-1} homéomorphe de A. X et x étant respectivement — un sous-ensemble et un point de A, désignons par $\phi(X)$ resp. $\phi(x)$ le sous-enble et le point correspondant (en vertu de la homéomorphie considerée) de $\phi(A)$.

On peut toujours supposer; que le point a est situé dans le fini.

4. Lemme: Soit G un composant de l'ensemble ouvert $S_n(a, \rho) - A$. Si $a \in \overline{G}$ et $\rho_1 < \rho$, alors il existe un composant G_1 de l'ensemble ouvert $G \times S_n(a, \rho_1)$ tel que $a \in \overline{G}_1$.

Démonstration. Posons $B = A \times F_n(a, \rho_1)$. Le point $\phi(a)$ n'est pas contenu dans l'ensemble fermé $\phi(B)$. Soit H le composant de l'ensemble ouvert $R_{n-1} - \phi(B)$ qui contient $\phi(a)$.

Comme $\rho(\phi(a), \phi(B)) > 0$, on peut déterminer un nombre $\delta > 0$ tel que l'inégalité:

$$\rho(x, a) < \delta \tag{1}$$

entraîne pour tout point $x \in A$ l'inégalité

$$\rho(\phi(x), \phi(a)) < \rho(\phi(a), \phi(B)) \tag{2}$$

et par suite:

$$\phi(x) \in H. \tag{3}$$

Ce nombre δ est necessairement $< \rho_1$.

Soit maintenant c un point de l'ensemble $G \times S(a, \delta)$; un tel point existe, car $a \in \overline{G}$. Désignons par G_1 le composant de l'ensemble ouvert $G \times S(a, \rho_1)$ qui contient c. Je dis que l'on a $\overline{G}_1 \supset a$. Supposons en effet le contraire. Alors

$$\rho(a, \overline{G}_1) > 0. \tag{4}$$

Soit c_1 un point de G tel que:

$$\rho(c_1, a) < \rho(a, \overline{G}_1) \tag{5}$$

un tel point existe d'après $a \in \overline{G}$. On a de plus:

$$\rho(c_1, a) \leqq \rho(a, c) < \delta. \tag{6}$$

La frontière $\overline{G}_1 - G_1$ de G_1 est une coupure du R_n entre c et c_1. Elle contient par suite *une coupure irréductible entre c et c_1*, que nous désignerons par L. On a:

$$L \subset \overline{G}_1 - G_1 \subset F_n(a, \rho_1) + A \tag{7}$$

$$L = L_1 + L_2 \quad \text{où} \quad L_1 = L \times A; \quad L_2 = L \times F_n(a, \rho_1). \tag{8}$$

Comme

$$c + c_1 \subset S(a, \delta) \tag{9}$$

on a necessairement en tenant compte de $\delta < \rho_1$:

$$L \times S(a, \delta) = L_1 \times S(a, \delta) \neq 0 \tag{10}$$

donc d'après la signification de δ:

$$\phi(L_1) \times H \neq 0. \tag{11}$$

D'autre part, d'après (4): $\phi(a)\epsilon(H-\phi(L_1))$, donc $H-\phi(L_1)\neq 0$, donc H étant connexe:

(12) $$\phi(L_1)\times H\times\overline{H-\phi(L_1)}\neq 0.$$

Soit $\phi(c_2)$ un point de l'ensemble (12), $\phi(c_3)\epsilon(L_1)$ un point different de $\phi(c_2)$ (L_1 ne peut pas se reduire au seul point c_2), enfin d un point de l'ensemble $H-\phi(L_1)$ tel que:

(13) $$\rho(\phi(c_2), d)=\eta\begin{cases}<\rho(\phi(c_2),\ \phi(c_3))\\ <\rho(\phi(c_2),\ \phi(B))\end{cases}.$$

Posons:

(14) $$\phi(L_1)\times\overline{S_{n-1}(\phi(c_2),\ \eta)}=\phi(L_3)$$

$$\phi(L_1)\times[R_{n-1}-S_{n-1}(\phi(c_2),\eta)]=\phi(L_4)$$

(15) $$\phi(L_3)\times\phi(L_4)=\phi(L_3\times L_4)=\phi(M)\subset F_{n-1}(\phi(c_2),\eta).$$

On aura, $F_{n-1}(\phi(c_2),\eta)$ contenant le point d:

(16) $$F_{n-1}(\phi(c_2),\eta)-\phi(M)\neq 0.$$

L'ensemble fermé $\phi(M)$ est par suite un sous-ensemble vrai de la surface spherique $F_{n-1}(\phi(c_2),\eta)$. Donc, $p^r(X)$ désignant le $r^{\text{ème}}$ nombre de Betti (mod. 2) [1]) de l'ensemble X, on aura:

(17) $$p^{n-2}[\phi(M)]=0$$

donc aussi, M étant homéomorphe de $\phi(M)$:

(18) $$p^{n-2}(M)=p^{n-2}(L_3\times L_4)=0.$$

D'autre part d'après (13), (14):

(19) $$\phi(L_3)\times\phi(B)=0.$$

(20) $$L_3\times B=0.$$

Enfin, comme $\phi(c_2)+\phi(c_3)\subset\phi(L_1)$, on aura: $c_2+c_3\subset L_1\subset L$.
D'après (8), (14) on a la décomposition:

(21) $$L=L_3+(L_2+L_4).$$

Les ensembles fermes L_3 et L_2+L_4 ne sont pas identiques

1) P. Alexandroff. *Une definition des nombres de Betti pour un ensemble fermé quelconque.* C. R. 184, p. 317.

a L, car L_2+L_4 ne contient pas c_2 et, en vertu de (13) L_3 ne contient pas c_3; L étant coupure irreductible entre c et c_1, il s'ensuit:

(22) L_3 et L_2+L_4 ne coupent pas R_n entre c et c_1.

Les relations (18), (19) entraînent:

(23) $$L_3\times(L_2+L_4)=(L_3\times L_2)+(L_4\times L_3)$$

(24) $$L_3\times L_2=A\times L_3\times L_2=L_3\times[A\times L\times F_n(a,\rho_1)]\subset L_3\times B=0$$

(25) $$L_3\times(L_2+L_4)=L_3\times L_4$$

(26) $$p^{n-2}[L_3\times(L_2+L_4)]=0.$$

D'après la „*deuxième généralisation du théorème de Phragmén-Brouwer*" due à M. Alexandroff [1]) il s'ensuit de (21), (22) et (26), que L n'est pas une coupure entre c et c_1 contrairement à la supposition.

Notre lemme est ainsi demontré.

5. Passons maintenant à la démonstration du théorème énoncé. On peut supposer sans restreindre la généralité que $\phi(A)$ n'est pas identique à R_{n-1}. Alors d'après le théorème sur l'invariance du nombre des domaines connexes determinés dans R_n par un ensemble fermé [2]) le domaine R_n-A est connexe et, A étant non dense dans R_n, on a: $a\epsilon\overline{R_n-A}$.

Formons maintenant une suite $\{U_k\}$ de domaines connexes de manière suivante:

I. $U_1=R_n-A$.

II. U_{k+1} est un composant de $U_k\times S\left(a,\frac{1}{k}\right)$, tel que $a\epsilon\overline{U}_{k+1}$.

D'après le lemme une telle suite existe.

Soit b_k un point arbitraire de U_k. U_k étant connexe et contenant b_k+b_{k+1}, il existe un continu $T_k\subset U_k$, contenant b_k et b_{k+1}.

L'ensemble:

(27) $$T=\overline{\sum_{k=1}^{\infty}T_k}=\sum_{k=1}^{\infty}T_k+a$$

1) P. Alexandroff: *Une generalisation nouvelle du théorème de Phragmén-Brouwer* C. R. 184, p 575.

2) P. Alexandroff: *Sur la décomposition de l'espace par les ensembles fermés* C. R. 184, p. 425.

est evidemment un continu et on a $A \times T = a$. Donc a est accessible dans R_n c. q. f. d.

6. Un problème ce pose: le théorème reste-t il vrai si on supprime la condition que A est fermé? Le résultat suivant me parait probable: Si l'ensemble $A \subset R_n$ est homéomorphe d'un sous-ensemble vrai du R_{n-1}, alors $R_n - A$ est un semi-continu.

Varsovie, 4/X 1928.

On Continuous Curves which are Homogeneous except for a Finite Number of Points.

By

T. C. Benton (Philadelphia).

1. Introduction. It is the author's purpose to classify all the plane continuous curves which are homogeneous except for a finite number of points. This has only been completed in the case where the non-homogeneous points may be made to correspond to each other. If the number of non-homogeneous points is greater than 3 it is found that a bounded continuous curve is the sum of a number of curves which are homogeneous except for two points. It is shown that a continuous curve, homogeneous except for two points is a finite number of arcs (not two) joining the two points. Then the general case is solved by replacing each one of the two point curves, whose sum is the given curve, by an arc joining the two non-homogeneous points. The resulting curve can then be either a simple closed curve or in special cases a more complicated curve which is in one-to-one correspondence with the projection of the edges of one of the regular or semi-regular solids upon one of its faces in such a manner that none of the projections of edges have any intersections except the projections of the vertices of the solid.

The paper is an extension of the results of S. Mazurkiewicz[1]) who proved that a bounded continuous curve which is homogeneous at every point is a simple closed curve.

The author is deeply indebted to Dr. J. R. Kline who suggested the problem and gave invaluable assistance in the working

[1]) S. Mazurkiewicz: *Sur les continus homogènes.* Fund. Math. vol. 5 (1922) p. 131. This article will be quoted by paragraph thus: # 16 M.