Abbildung von I' auf I durch, und wenden dann auf I und $\mathfrak{A}_\theta$ Satz 7 mit $\delta = \frac{1}{2}$ an. Ebenso wie vorhin folgt hieraus, dass I' zlgkl. als $\mathfrak{A}_\theta$ ist. Da aber I zlgkl. als I' ist, schliesst man daraus leicht, dass auch I zlgkl. als $\mathfrak{A}_\theta$ ist.

Wir haben also aus Satz 7 erschlossen:

Zusatz: Mit den Bezeichnungen von Satz 7 gilt: I ist zlgkl. als jedes $\mathfrak{A}_\theta \cdot (0 < \theta < 1)$; I ist zlgkl. als K.

Damit haben wir die für die Ausführungen der §§ 6, 7 der Einleitung notwendigen Unterlagen restlos hergestellt.

Sur les plus petits types de dimensions incomparables.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Le but de cette Note est de prouver qu'*il existe deux ensembles linéaires, E et F, dont les types de dimensions* [1]) *ne sont pas comparables, et tels que si M et N sont deux ensembles* (*linéaires* [2])), *dont les types de dimensions ne sont pas comparables, on a nécessairement soit*

$$(1) \qquad dE \leqslant dM \quad \text{et} \quad dF \leqslant dN,$$

soit

$$(2) \qquad dF \leqslant dM \quad \text{et} \quad dE \leqslant dN$$

(soit à la fois (1) et (2)).

Démonstration. Désignons par E l'ensemble formé du nombre 0 et de tous les nombres de la forme

$$\frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+n}},$$

où m et n sont des nombres naturels.

Or, désignons par F l'ensemble formé des nombres $0, \frac{1}{n}$ et $1 + \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

[1]) Pour la définition du type (nombre) de dimensions, voir: M. Fréchet „*Les espaces abstraits* etc.“ Paris, 1928, p. 29 ss.; aussi: *Fund. Math.* t. VIII, p. 193.

[2]) ou, plus généralement, deux ensembles d'un espace métrique quelconque.

Je dis que les ensembles E et F satisfont aux conditions de notre théorème.

Nous dirons qu'un ensemble de points Q jouit à son point q de la propriété P, s'il existe pour tout voisinage V de q un voisinage U de q, tel que l'ensemble $V-U$ contient une infinité de points de Q. On démontre sans peine que la propriété P d'un point de Q se conserve par des transformations homéomorphes de l'ensemble Q.

Nous allons déterminer tous les types topologiques, dépourvus de points jouissant de la propriété P.

On voit sans peine que pour qu'un ensemble Q ne contienne aucun point jouissant de la propriété P, il faut et il suffit qu'on ait $Q''Q=0$. Or, on voit sans difficulté que parmi les types topologiques des ensembles Q, tels que $Q''Q=0$, il y en a un qui est le plus grand, notamment le type de l'ensemble G de tous les nombres de la forme

$$m+\frac{1}{n}, \quad \text{où} \quad m=1,2,3,\ldots; \quad n=1,2,3,\ldots,$$

de sorte que tout ensemble Q, tel que $Q''Q=0$, est homéomorphe à un sous-ensemble (une portion) de G.

D'autre part on prouve aisément que pour qu'un ensemble Q ne contienne aucun point jouissant de la propriété P, il faut et il suffit qu'il ne contienne aucun sous-ensemble homéomorphe à E. Il en résulte sans peine que, si pour un ensemble Q n'a pas lieu la formule $dE \leqslant dQ$, on a nécessairement $dQ \leqslant dG$.

Supposons maintenant que pour un ensemble Q la formule $dF \leqslant dQ$ n'est pas vraie: on voit aussitôt qu'il faut et il suffit que l'ensemble $Q'Q$ contienne au plus un point. On en déduit facilement qu'on a dans ce cas $dQ \leqslant dE$.

(En effet, soit Q un ensemble tel que l'ensemble $Q'Q$ contient au plus un point. Si $Q'Q=0$, l'ensemble Q est isolé et, comme on voit sans peine, homéomorphe à un sous-ensemble de E, p. e. au sous-ensemble formé de tous les nombres de la forme $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{1+n}}$ $(n=1,2,3,\ldots)$. Or, soit $Q'Q \neq 0$, donc $Q'Q=(p)$, où (p) désigne l'ensemble formé d'un seul point, p. Désignons par Q_0 l'ensemble de tous les points q de Q, tels que $\varrho(q,p) \geqslant 1$, et, pour $n=1,2,3,\ldots$,

par Q_n l'ensemble de tous les points q de Q, tels que $\frac{1}{n+1} \leqslant \varrho(q,p) < \frac{1}{n}$. Les ensembles Q_k $(k=0,1,2,3,\ldots)$ sont évidemment formés des points isolés de l'ensemble Q (ou bien sont vides). Or, on peut évidemment établir une correspondance biunivoque entre les points de Q et ceux d'un sous-ensemble de E, de sorte qu'au point p corresponde le nombre 0 et qu'à tout point de Q_k $(k=0,1,2,\ldots)$ corresponde un nombre de la forme $\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{k+1+n}}$ $(n=1,2,3,\ldots)$, et on voit sans peine qu'une telle correspondance est une homéomorphie (entre Q et un sous-ensemble de E), d'où résulte que $dQ \leqslant dE$).

Les types de dimensions des ensembles E et F ne sont pas comparables: en effet, il ne peut être $dE \leqslant dF$, puisque l'ensemble F ne jouit pas évidemment en aucun de ses points de la propriété P, et l'ensemble E en jouit au point 0, et, d'autre part, il ne peut être $dF \leqslant dE$, puisque F contient deux de ses points d'accumulation tandis que E n'en contient qu'un seul.

Soient maintenant M et N deux ensembles (linéaires) dont les types de dimensions ne sont pas comparables.

Si aucune des formules $dE \leqslant dM$ et $dE \leqslant dN$ n'avait pas lieu, on aurait, d'après ce que nous avons démontré plus haut, $dM \leqslant dG$ et $dN \leqslant dG$. Or, on voit sans peine que les types de dimensions de deux sous-ensembles de G sont toujours comparables, ce qui implique une contradiction, dM et dN n'étant pas comparables, par hypothèse.

Une au moins des formules $dE \leqslant dM$ et $dE \leqslant dN$ est donc vraie, p. e. $dE \leqslant dM$. Je dis qu'on a alors nécessairement $dF \leqslant dN$.

En effet, comme nous avons prouvé plus haut, si la formule $dF \leqslant dN$ n'avait pas lieu, on aurait la formule $dN \leqslant dE$, donc, d'après $dE \leqslant dM$, la formule $dN \leqslant dM$, contrairement à l'hypothèse que dM et dN ne sont pas comparables.

Notre propositon est donc démontrée complètement.

Quant aux formules (1) et (2), il est à remarquer qu'elles peuvent être vraies toutes les deux (pour deux ensembles M et N convenablement choisis, dont les types de dimensions ne sont pas comparables).

Quant aux ensembles E et F, on pourrait démontrer sans peine que pour tous les ensembles Q et R les inégalités

$$dQ < dE < dR$$

entraînent les inégalités

$$dQ < dF < dR$$

(quoiqu'on a $dE \neq dF$) [1].

[1]) Cf. le problème posé par M. Fréchet dans son livre cité, p. 31, note (1).

On two-dimensional analysis situs with special reference to the Jordan curve-theorem.

By

D. W. Woodard (Philadelphia).

Introduction. R. L. Moore, in his paper, „*On the Foundations of Plane Analysis Situs*", Transactions of the American Mathematical Society, Volume 17, 1916, proposed three systems of axioms, Σ_1, Σ_2, Σ_3, for the development of two-dimensional analysis situs. This paper will hereafter be referred to as „Moore". To facilitate reference, Moore's notation will be followed as closely as practicable.

In Axiom 8, which belongs to all three systems, Moore assumes that every simple closed curve is the boundary of a region, that is, that every simple closed curve defines a bounded connected set of connected exterior having further properties implied by certain other axioms of the three systems.

The chief purpose of this investigation is to replace Moore's Axiom 8 by another axiom of such nature that no property of the simple closed curve is assumed. The Jordan curve-theorem in its most general form appears as the fundamental theorem of the set of theorems. Two systems of axioms, I and II, are presented. It is proved that (1) all of Moore's theorems follow as consequences of each of the systems of axioms, (2) every simple closed curve is the boundary of a set of points having all the properties of a region, (3) every space satisfying the set designated as Axioms I is homeomorphic with the Euclidean plane and (4) there exist spaces satisfying Axioms II that are „neither metrical, descriptive, nor separable" [1]).

[1]) Axioms II are satisfied by the space thus described by Moore, page 164.